Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 157–186

DOS SISTEMAS ADICIONALES DE POLINOMIOS ORTOGONALES RELACIONADOS CON LOS POLINOMIOS DE POLLACZEK

por

JAIRO A. CHARRIS(*), CLAUDIA P. GÓMEZ y
GUILLERMO RODRÍGUEZ–BLANCO

RESUMEN. Se estudian las propiedades espectrales de dos sistemas de polinomios ortogonales relacionados con los polinomios cribados de Pollaczek. El objetivo básico es el de detectar en tales sistemas la presencia de puntos de masa extremos o sumergidos.

ABSTRACT. The spectral properties of two systems of orthogonal polynomials closely related to the sieved Pollaczek polynomials are studied. The main goal is to detect extreme or embedded mass point for such systems.

AMS–MOS Subjet Classification (1985 Revision). Primary 33A65. Secondary 33A50, 33A77.
Palabras Clave. Polinomios ortogonales, medida de ortogonalidad, fracciones continuas, Polinomios de Pollaczek, polinomios cribados, operadores y matrices de Jacobi, espectro de un operador, punto de masa.
(*) Este autor ha sido financiado en parte por N.S.F. Grant Int. 8803099 y, para viajes, por COLCIENCIAS.

§ 1. INTRODUCCION.

En un trabajo previo, [13], hemos estudiado dos sistemas ortogonales íntimamente relacionados con los polinomios de Pollaczek.

En este trabajo estudiaremos dos sistemas adicionales de polinomios que, como aquellos, están determinados por relaciones de recurrencia de la forma

$$\begin{aligned} x\, S_{2n}(x) &= S_{2n+1}(x) + a_n^{(0)}\, S_{2n-1}(x) \\ x\, S_{2n+1}(x) &= S_{2n+2}(x) + a_n^{(1)}\, S_{2n}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

bajo las condiciones iniciales

$$S_{-1}(x) = 0, \quad S_0(x) = 1 \tag{1.2}$$

La razón de estudiar estos dos sistemas adicionales radica en la mayor flexibilidad de los mismos, comparados con los de [13].

Un ejemplo simple e interesante de polinomios ortogonales definidos por una relación de recurrencia de la forma (1.1) se encuentra en [14], p. 91. En tal caso $a_n^{(0)} = a$, $a_n^{(1)} = b$, $a, b > 0$. En [6] se han estudiado en detalle tales polinomios, y en [14] se han considerado perturbaciones de rango 2 de tal sistema, cuyo interés particular es su periodicidad (v. [16]).

En nuestro caso, el primer sistema, $\{q_n(x)\}$, esta dado por (1.1) y (1.2) con

$$a_o^{(1)} = 2bc\,; \quad a_n^{(0)} = \frac{n}{n+\lambda}a, \quad a_n^{(1)} = \frac{n+2\lambda}{n+\lambda}b, \quad n \geq 1, \tag{1.3}$$

donde

$$\lambda > \frac{1}{2}; \quad a, b, c > 0. \tag{1.4}$$

El coeficiente $a_0^{(0)}$ carece de importancia. El segundo sistema será el $\{q_n^{(1)}(x)\}$, de los primeros asociados (v. más adelante) de $\{q_n(x)\}$. Ambos sistemas son aún ortogonales bajo hipótesis mucho menos restrictivas que las dadas por (1.4), pero su análisis sería mucho más delicado. La hipótesis (1.4) brinda suficiente libertad para nuestros propósitos.

Antes de explicar el origen de $\{q_n(x)\}$ y $\{q_n^{(1)}(x)\}$, observamos que de (1.1) se deduce que $\{S_{2n}(x)\}$ satisface la relación de recurrencia

$$[x^2 - a_n^{(0)} - a_n^{(1)}]\, S_{2n}(x) = S_{2n+2}(x) + a_n^{(0)} \cdot a_{n-1}^{(1)}\, S_{2n-2}(x), \quad n \geq 1 \tag{1.5}$$

A su vez, $\{S_{2n+1}(x)\}$ verifica la relación

$$[x^2 - a_{n+1}^{(0)} - a_n^{(1)}]\, S_{2n+1}(x) = S_{2n+3}(x) + a_n^{(0)} . a_n^{(1)}\, S_{2n-1}(x), \qquad n \geq 1 \tag{1.6}$$

Tanto (1.5) como (1.6) serán útiles en el análisis de $\{q_n(x)\}$ y $\{q_n^{(1)}(x)\}$.

Relaciones de recurrencia de la forma (1.1) surgen frecuentemente en el estudio de procesos fisicoquímicos: véanse [4], [34], [36]. Usualmente aparecen en la descripción de fenómenos cuánticos en términos del análisis matricial de Heisenberg–Jacobi o en el proceso de diagonalización de Hamiltonianos en bases apropiadas de L_2 ([4], [5], [18], [32]). En realidad, $\{q_n(x)\}$ y $\{q_n^{(1)}(x)\}$ son primeras aproximaciones a la descripción de ciertos procesos diatómicos en los cuales a , b dependen de las componentes, λ es un parámetro de acoplamiento y c depende de las condiciones iniciales. El soporte de la medida de ortogonalidad de los polinomios determina el espectro de las matrices de Jacobi (o de los Hamiltonianos) correspondientes y, así, los niveles de energía del proceso. Los dos sistemas poseen, bajo condiciones iniciales apropiadas, valores propios extremos o sumergidos, los cuales corresponden a concentraciones espectrales que sugieren resonancias. Ambos fenómenos conducen a sistemas de polinomios ortogonales interesantes, explícitamente dados por relaciones de recurrencia ([11], [15], [21], [22], [23], [24]).

La relación de recurrencia (1.1) es también un caso especial de la de los polinomios simétricos cribados generales, en el sentido de [9], [10]. Nuestros polinomios están, de hecho, relacionados con los polinomios cribados de Pollaczek. Es importante mencionar, sin embargo, que las técnicas utilizadas en [1], [7], [8], [19], [20], para determinar las medidas de ortogonalidad no son apropiadas en estos casos, pues $\{q_n(x)\}$ y $\{q_n^{(1)}(x)\}$ no parecen originarse en un proceso de cribación en el sentido de estos trabajos. Seguiremos, por lo tanto, el punto de vista directo propuesto en [9], aunque no en una forma tan general como la de tal artículo. De hecho, muchas ideas en [9], [10] fueron motivadas por la presente investigación. Esperamos proponer ideas para el tratamiento de los problemas que se presentan en el manejo de sistemas no periódicos como $\{q_n(x)\}$ y $\{q_n^{(1)}(x)\}$, e indicar de qué manera es posible superar algunas de las dificultades.

Este artículo se originó en las investigaciones llevadas a cabo por C.P. Gómez y G. Rodríguez–Blanco en sus tesis de Maestría en la Universidad Nacional de Bogotá, efectuadas bajo la dirección de J. Charris. El artículo previo [13] de los mismos autores presenta, en las Secciones 2 y 3,una exposición detallada del material básico dentro del cual se enmarcan los resultados de la investigación de dichas tesis, incluyendo las propiedades necesarias de los Polinomios de Pollaczek y amplia bibliografía sobre el tema.

Tal artículo resulta bastante extenso, a pesar de que para muchos detalles se refiere al lector al material tratado en [17]. Con el fin de evitar que el presente artículo adolezca del mismo defecto, omitiremos presentar tal material básico, refiriendo al lector a [13] cuando esto sea necesario. Adjuntamos, sin embargo, algunas nociones fundamentales.

Un sistema de polinomios $\{P_n(x) \mid n \geq 0\}$ es ortogonal si para todo $n \geq 0$, $P_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales, $P_0(x)=1$, y existe una medida positiva μ, con soporte $\operatorname{Supp}\mu$ en la recta real,tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)\, P_m(x)\, d\mu(x) = \lambda_n\, \delta_{mn}\ , \quad m, n \geq 0\ , \tag{1.7}$$

donde $\lambda_n > 0$, $n \geq 0$. Se dice entonces que $\{P_n(x)\}$ es ***ortogonal con respecto*** a μ y que μ es una ***medida de ortogonalidad,*** o una ***medida espectral,*** de $\{P_n(x)\}$. Si $\lambda_0=1$, lo cual siempre podemos suponer, se dice que μ está *normalizada.* Es bien sabido que $\{P_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a alguna medida μ si y solo sí existen números reales A_n, B_n, C_n, tales que

$$A_n\, A_{n+1}\, C_{n+1} > 0, \quad n \geq 0, \tag{1.8}$$

y que

$$(A_n\, x + B_n)\, P_n(x) = P_{n+1}(x) + C_n\, P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.9}$$

con

$$P_{-1}(x)=0, \quad P_0(x)=1. \tag{1.10}$$

Esto se conoce como el *Teorema de Favard* (v. [2], [6], [13], [14]). Si para todo $i=0, 1, 2, \cdots$, se define $\{P_n^{(i)}(x)\}$ por

$$(A_{n+i}\, x + B_{n+i})\, P_n^{(i)}(x) = P_{n+1}^{(i)}(x) + C_{n+i}\, P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.11}$$

y

$$P_{-1}^{(i)}(x)=0, \qquad P_0^{(i)}(x)=1, \tag{1.12}$$

$\{P_n^{(i)}(x)\}$ es también un sistema ortogonal, denominado el ***sistema de los polinomios i–asociados de*** $\{P_n(x)\}$. Es claro que $P_n(x)=P_n^{(0)}(x)$, $n \geq 0$. Es posible demostrar que si $\{P_n(x)\}$ ***está definido por*** (1.9) ***y*** (1.10) ***bajo las hipótesis*** (1.8), ***y existe una constante*** $M > 0$ ***tal que***

$$\left|\frac{B_n}{A_n}\right| \leq \frac{M}{3}\ , \quad \sqrt{\frac{C_{n+1}}{A_n\, A_{n+1}}} \leq \frac{M}{3}\ , \quad n \geq 0, \tag{1.13}$$

entonces $\{P_n(x)\}$ ***es ortogonal con respecto a una única medida normalizada***

μ, para la cual se tiene que

$$\operatorname{Supp}\mu \subseteq [-M, M] \tag{1.14}$$

Para toda medida normalizada de un sistema ortogonal $\{P_n(x)\}$ dado por (1.9) y (1.10) se tiene además que

$$\lambda_0 = 1 \ ; \qquad \lambda_n = \frac{A_0}{A_n} C_1 C_2 \dots C_n \ , \ n \geq 1, \tag{1.15}$$

con λ_n como en (1.7).

Para las medidas de ortogonalidad $\mu^{(i)}$ de los $\{P_n^{(i)}(x)\}$ se tendrá también que si (1.13) se satisface entonces

$$\operatorname{Supp}\mu^{(i)} \subseteq [-M, M] \tag{1.16}$$

Si $\{q_n(x)\}$ está determinado por (1.1), (1.2) y (1.3), $\{q_n^{(1)}(x)\}$ estará, a su vez, determinado por

$$\begin{aligned} x q_{2n}^{(1)}(x) &= q_{2n+1}^{(1)}(x) + a_n^{(1)} q_{2n-1}^{(1)}(x) \\ x q_{2n+1}^{(1)}(x) &= q_{2n+2}^{(1)}(x) + a_{n+1}^{(0)} q_{2n}^{(1)}(x) \ , \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

y $q_{-1}^{(1)}(x) = 0$, $q_0^{(1)}(x) = 1$. La relación de recurrencia (1.17) es aún de la forma (1.1).

Observamos al respecto que si $A_n = 1$, $n \geq 0$, en (1.9), entonces $P_n(x)$ es, para todo $n \geq 0$, un polinomio mónico, es decir, su coeficiente director es 1. Este es el caso de los polinomios $\{S_n(x)\}$ definidos por (1.1) y, en particular, de $\{q_n(x)\}$ y $\{q_n^{(1)}(x)\}$. Los polinomios $\{S_n(x)\}$ son además simétricos, en el sentido de que

$$S_n(-x) = (-1)^n S_n(x), \ n \geq 0, \tag{1.18}$$

como se deduce inmediatamente de (1.1).

Si $\{P_n(x)\}$ es un sistema ortogonal de polinomios y definimos

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \ , n \geq 0 \ , \tag{1.19}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x)\, p_m(x)\, d\mu(x) = \delta_{mn} \ , \ m, n \geq 0 \ , \tag{1.20}$$

y los polinomios $\{p_n(x)\}$ están determinados por la relación de recurrencia

$$x\,p_n(x) = b_n\,p_{n-1}(x) + a_n\,p_n(x) + b_{n+1}\,p_{n+1}(x)\ ,\ n \geq 0, \qquad (1.21)$$

y las condiciones iniciales $p_{-1}(x)=0$, $p_0(x)=1$, donde

$$a_n = -\frac{B_n}{A_n},\quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{C_{n+1}}{A_n\,A_{n+1}}}\ ,\ n \geq 0. \qquad (1.22)$$

Se dice que $\{p_n(x)\}$ es el *sistema ortonormal* definido por $\{P_n(x)\}$. (Obsérvese que C_0 en (1.9) y b_0 en (1.21) pueden escogerse arbitrariamente).

Observamos también que si $\{Q_n(x)\,|\,n \geq 0\}$ es un sistema de polinomios que satisface (1.9) para $n \geq 2$, entonces

$$Q_n(x) = \left(A - \frac{C}{C_1}\right)P_n(x) + \left(B + \frac{C}{C_1}P_1(x)\right)P^{(1)}_{n-1}(x),\quad n \geq 1, \qquad (1.23)$$

donde $\{P_n(x)\}$ satisface (1.9) para $n \geq 0$ y $P_{-1}(x)=0$, $P_0(x)=1$, donde

$$A = Q_0(x),\quad B = Q_1(x) - Q_0(x)\,P_1(x),$$

$$C = Q_2(x) - (A_1\,x + B_1)\,Q_1(x) + C_1\,Q_0(x). \qquad (1.24)$$

Esto es fácil de verificar por inducción. Ademas $C=0$ si $\{Q_n(x)\}$ satisface (1.9) para $n \geq 1$, y $B=C=0$, si lo hace para $n \geq 0$. En este caso $P_n(x)=Q_n(x)$ para todo n si y solo sí $Q_0(x)=1$, es decir, si y solo si $A=1$.

Observamos finalmente que la medida de ortogonalidad μ de $\{P_n(x)\}$ se descompone en la forma (v. [33])

$$\mu = \mu_c + \mu_p + \mu_s \text{ (descomposición de Lebesgue)} \qquad (1.25)$$

donde μ_c es absolutamente continua y portada por C_μ (el *soporte continuo* de μ), μ_p es una medida de saltos portada por P_μ (*conjunto de las masas de* μ) y μ_s es singular continua, portada por un subconjunto S_μ de C_μ de medida de Lebesgue nula. La parte absolutamente continua μ_c de μ se escribe de la forma $d\mu_c(x)=\varphi(x)\,dx$, donde $\varphi(x)$ es integrable en el sentido de Lebesgue. Es claro que $C_\mu \bigcap P_\mu=\emptyset$ y que $\mathrm{Supp}\mu=C_\mu \bigcup P_\mu$. El conjunto de puntos aislados de $\mathrm{Supp}\mu$, si los hay, se denota con D_μ (el *soporte discreto de* μ). Es claro que $D_\mu \subseteq P_\mu$. Los puntos en D_μ son los *puntos de masa aislados de* μ.

El conjunto $P_\mu \bigcap \overset{\circ}{\overline{C}}_\mu$ $\Big(\overset{\circ}{\overline{C}}_\mu$ es el interior de la clausura de $C_\mu\Big)$ se denomina el conjunto de los *puntos de masa sumergidos de* μ; $P_\mu \cap \left(\overline{C}_{\mu_0} - \overset{\circ}{\overline{C}}_{\mu}\right)$, el de los *puntos de masa extremos*. Si $\int f\,d\mu = \int_a \varphi(x)\,f(x)\,d\mu$ para toda función continua f con soporte compacto en (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, y $\varphi(x) \neq 0$ en (a,b), entonces $(a,b) \subseteq C_\mu$.

Una matriz real tridiagonal simétrica e infinita

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_1 & a_1 & b_2 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \ldots & . \\ . & . & . & . & . \ldots & . \end{bmatrix}$$

tal que $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$ se llama una *matriz de Jacobi* (v. [6], [12] y las referencias allí mencionadas). Se dice que $\mathbb{J}$ es acotada si existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{3}, \quad b_{n+1} \leq \frac{M}{3}, \quad n \geq 0. \tag{1.27}$$

Sea $\ell_2(\mathbb{C})$ el espacio de las sucesiones complejas (x_n), $n \geq 0$, tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$. Con el producto interno

$$((x_n);(y_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\,\overline{y}_n,$$

$\ell_2(\mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert.

Una matriz de Jacobi acotada $\mathbb{J}$ define sobre ℓ_2 un operador lineal acotado $\hat{\mathbb{J}}$ por

$$\hat{\mathbb{J}} e_n = b_{n+1} e_{n+1} + a_n e_n + b_n\, e_{n-1}, \quad n \geq 0 \tag{1.28}$$

y extensión lineal continua. Aquí, $e_n = (\delta_{0n}, \delta_{1n}, \ldots)$, $n \geq 0$, es la base canónica de ℓ_2, y $e_{-1} = (0, 0, \ldots)$; $\mathbb{J}$ es la matriz de $\hat{\mathbb{J}}$ relativa a (e_n). El operador $\hat{\mathbb{J}}$ se llama el *operador de Jacobi determinado por* $\mathbb{J}$. Si $\mathbb{J}$ satisface (1.27) entonces $\| \hat{\mathbb{J}} \| \leq M$.

Sea $\{P_n(x)\}$ el sistema de polinomios determinado por $\mathbb{J}$ mediante

$$x P_n(x) = b_{n+1} P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) + b_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (1.29)$$

y

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{b_1}(x - a_0). \quad (1.30)$$

Entonces $\{P_n(x)\}$ es un sistema ortonormal de polinomios con respecto a una medida positiva μ tal que $\mu(\mathbb{R}) = 1$, y se llaman los *polinomios de* $\mathbb{J}$. La medida μ es única y tiene soporte compacto si (1.27) se verifica, en cuyo caso $\operatorname{Supp}\mu \subseteq [-M, M]$. Puede demostrarse que entonces $\operatorname{Supp}\mu$ coincide con el *espectro* $\sigma(\mathbb{J})$ de $\mathbb{J}$; el *espectro puntual* es P_μ; los puntos de masa sumergidos de μ son los *valores propios sumergidos* de $\mathbb{J}$, i.e., los valores propios de $\mathbb{J}$ que son interiores al espectro; los puntos en D_μ son los *valores propios aislados* de $\mathbb{J}$; y los puntos de masa extremos son los *valores propios en la frontera* de $\sigma_c(\mathbb{J})$. Si $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$ es una *resolución espectral continua por la derecha* de $\mathbb{J}$ y σ es la distribución de μ, es decir, si

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} d\mu, \quad (1.31)$$

entonces $\sigma(t) = (E_t e_0 ; e_0)$. Recíprocamente, es posible obtener (E_t) a partir de μ mediante

$$E_\lambda e_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} P_n(t)\, P_j(t)\, d\mu(t) \right\} e_j, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (1.32)$$

y extensión lineal continua.

El sistema de polinomios ortogonales de la matriz es frecuentemente útil en la determinación del espectro de la misma.

§ 2. EL SISTEMA $\{q_n(x)\}$.

El sistema $\{q_n(x)\}$ está determinado por (1.1) y (1.2) con $a_n^{(0)}, a_n^{(1)}$ dados por (1.3). La relación (1.5) correspondiente es

$$[x^2 - a - b + \frac{\lambda}{n+\lambda}(a-b)]\, q_{2n}(x) = q_{2n+2}(x) + \frac{(n+2\lambda-1)\, n}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}\, ab\, q_{2n-2}(x), \quad (2.1)$$

para $n \geq 2$ y

$$[x^2 - a - b + \frac{\lambda}{1+\lambda}(a-b)]\, q_2(x) = q_4(x) + \frac{2abc}{1+\lambda}\, q_0(x), \quad (2.2)$$

con

$$q_0(x)=1\ ,\ q_1(x)=x\quad ,\ q_2(x)=x^2-2bc. \tag{2.3}$$

Si

$$\omega=\frac{x^2-a-b}{2\sqrt{ab}} \tag{2.4}$$

y definimos

$$Q_n(\omega)=\frac{(\lambda)_n}{n!\left(\sqrt{ab}\right)^n}\,q_{2n}(x)\ ,\ n\geq 0, \tag{2.5}$$

donde $(\lambda)_n$, el factorial de Pochammer, está dado por

$$(\lambda)_0=1,\quad (\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1),\quad n\geq 1,$$

se obtiene para $n\geq 2$ que

$$\begin{aligned}&2\left[(n+\lambda)\omega+\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right]Q_n(\omega)\\ &=(n+1)Q_{n+1}(\omega)+(n+2\lambda+1)\,Q_{n-1}(\omega),\end{aligned} \tag{2.6}$$

También

$$\left[(1+\lambda)\omega+\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right]Q_1(\omega)=Q_2(\omega)+\lambda c\ Q_0(\omega) \tag{2.7}$$

y

$$\begin{aligned}Q_0(\omega)=1,\ Q_1(\omega)&=\frac{\lambda}{\sqrt{ab}}[x^2-2bc]\\ &=2\left[\lambda\omega+\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right]+2\lambda(1-c)\sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.6), (2.7) y (2.8) se deduce, entonces, mediante (1.23), que

$$Q_n(\omega)=c\ R_n(\omega)+\lambda(1-c)\left[2\omega+\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right]R^{(1)}_{n-1}(\omega), \tag{2.9}$$

o sea, que

$$q_{2n}(x)=\frac{n!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda)_n}\left[c\,R_n(\omega)+\frac{\lambda(1-c)x^2}{\sqrt{ab}}R^{(1)}_{n-1}(\omega)\right],\quad n\geq 1, \tag{2.10}$$

donde

$$R_n(\omega)=P_n\left(\omega;\lambda,0,\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right),\ n\geq 0, \tag{2.11}$$

son polinomios de Pollaczek (v. [13], Sección 3; [8], [27], [28], [29], [30], [35]).

Sea $\{q_n^{(1)}(x)\}$ el sistema de los primeros asociados de los polinomios $\{q_n(x)\}$. De (1.6), (1.17) y (1.23) se deduce, de la misma manera, que

$$q_{2n+1}^{(1)}(x)=\frac{(n+1)!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda)_{n+1}}\lambda x\, Q_n^{(1)}(\omega) \tag{2.12}$$

donde $\{Q_n^{(1)}(\omega)\}$ es el sistema de los primeros asociados de $\{Q_n(\omega)\}$, y es fácil verificar que $Q_n^{(1)}(\omega)=R_n^{(1)}(\omega)$, $n\geq 0$. La fracción continua $q(x)$ de $\{q_n(x)\}$ ([13], Sección 2) es entonces

$$q(x)=\frac{\frac{\lambda x}{\sqrt{ab}}R(\omega)}{c+\frac{\lambda(1-c)}{\sqrt{ab}}x^2R(\omega)}=\frac{\frac{\lambda x}{\sqrt{ab}}\beta\int_0^{1]}(1-\beta^2u)^{-A-1}(1-u)^{-B-1}du}{c+\frac{\lambda(1-c)}{\sqrt{ab}}x^2\beta\int_0^{1]}(1-\beta^2u)^{-A-1}(1-u)^{-B-1}du}. \tag{2.13}$$

Esto resulta de [13], Teorema 3.1. Además

$$A=-\lambda\left(1-\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}}{2\sqrt{\omega^2-1}}\right),\quad B=-\lambda\left(1+\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}}{2\sqrt{\omega^2-1}}\right). \tag{2.14}$$

como se deduce de (3.13) en [13] y donde $\beta=\beta(\omega)=\omega-\sqrt{\omega^2-1}$ es como en (3.1) de [13]. Observamos que las integrales en (2.13) son en el sentido del *valor principal de Hadamard* (v. [13], Sección 3; [2], [8]). En particular

$$\int_0^{1]}(1-\beta^2u)^{-A-1}(1-u)^{-B-1}du=-\frac{1}{B}\,{}_2\mathbb{F}_1\left(\begin{matrix}A+1 & 1\\ -B+1 & \end{matrix}\middle|\,\beta^2\right)$$

donde

$${}_2\mathbb{F}_1\left(\begin{matrix}a & b\\ c & \end{matrix}\middle|\,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\,n!}z^n,\quad |z|<1,$$

denota la serie hipergeométrica ([31], Chap. 4).

De aquí en adelante, el significado de $R_n(\omega)$ será el de (2.11), y de A y B, el de (2.14).

La función $q(x)$ es analítica en $\mathbb{C}-[-N,N]$, ([13], Seción 3), donde

$$N = a + \sqrt{2b(c+1)}\,. \tag{2.15}$$

Esto se deduce de (1.3) y (1.13). De hecho, q(x) es analítica en $\mathbb{C}-\overline{L}$, donde L es

$$L = \Big(-(\sqrt{a}+\sqrt{b}),\, -\big|\sqrt{a}-\sqrt{b}\big|\Big) \bigcup \Big(\big|\sqrt{a}-\sqrt{b}\big|,\, \sqrt{a}+\sqrt{b}\Big), \tag{2.16}$$

excepto, tal vez, por polos simples en $[-N, N]-\overline{L}$.

Denotemos con v la medida de ortogonalidad normalizada de $\{q_n(x)\}$. Entonces $\operatorname{Supp} v \subseteq [-N, N]$. De (3.16) en [13] se deduce que la parte absolutamente continua v_c de v es

$$dv_c = \frac{c|x|\left|(1-\beta^2)^{-A-1}\right|^2 |\Gamma(-B)|^2}{\pi\sqrt{ab}\,\Gamma(2\lambda)} \frac{\sqrt{1-\omega^2}\quad \chi(x)}{\left| c - \dfrac{\lambda(1-c)x^2\beta}{\sqrt{ab}\quad B}\, {}_2\mathbb{F}_1\!\left(\begin{matrix} A+1 & 1 \\ -B+1 & \end{matrix} \,\middle|\, \beta^2 \right) \right|^2} dx, \tag{2.17}$$

donde $\chi(x)$ denota la función característica de L y A, B y β son funciones de ω. El hecho de que $\lambda > 1/2$ asegura la convergencia absoluta de ${}_2\mathbb{F}_1$ en (2.17) y garantiza que ésta no se anula en L. Entonces, $L \subseteq C_v$, $D_v = ([-N, N]-\overline{L}) \bigcap \operatorname{Supp} v$ y $P_v \subseteq D_v \bigcup \{\pm z_0, \pm z_1\}$, $z_0 = \big|\sqrt{a}-\sqrt{b}\big|$, $z_1 = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, con $P_v \subseteq D_v$ si y solo si $\overline{L} = C_v$.

La relación de ortogonalidad es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_n(x)\, q_m(x)\, d\,v(x) = \lambda_n \delta_{mn}\,,\ m, n \geq 0, \tag{2.18}$$

donde

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_1 = 2bc, \tag{2.19}$$

y

$$\lambda_{2n} = \lambda c \frac{n!\,(2\lambda)_n}{(\lambda)_n^2(\lambda+n)}(ab)^n,$$

$$\lambda_{2n+1} = \lambda c \frac{n!\,(2\lambda)_{n+1}}{(\lambda)_{n+1}^2}\, b\,(ab)^n, \qquad n \geq 1. \tag{2.20}$$

Esto se deduce de (1.15) y de la relación de recurrencia de $\{q_n(x)\}$.

Observamos que si

$$z_0 = |\sqrt{a} - \sqrt{b}\,|, \quad z_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \tag{2.21}$$

y

$$\tilde{z}_0 = \lambda\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right), \quad \tilde{z}_1 = \lambda\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \tag{2.22}$$

entonces (v. [13], Sección 3, relaciones (3.30) y (3.31)),

$$q_2n(z_0) = (-1)^n \frac{n!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda)_n}\left(c\, L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0) - \frac{\lambda(1-c)\, z_0^2}{\sqrt{ab}}\, L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0;1)\right) \tag{2.23}$$

y

$$q_{2n}(z_1) = \frac{n!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda)_n}\left(c\, L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_1) + \frac{\lambda(1-c)\, z_1^2}{\sqrt{ab}}\, L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_1;1)\right), \tag{2.24}$$

donde $\{L_n^{(\alpha)}(x\,;\,i)\}$ es el sistema de polinomios asociados de Laguerre ([13], Sección 3). De (2.23) se obtiene, cuando $a=b$ (asi que $z_0=0$, $\tilde{z}_0=0$), que

$$q_{2n}(0) = (-1)^n \frac{n!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda)_n}\, c\, L_n^{(2\lambda-1)}(0). \tag{2.25}$$

Por lo tanto, usando (2.20) y (2.25), y denotando con $\Gamma(x)$ la función Gamma (v. [25], [31]), se tiene que

$$\frac{q_{2n}(0)}{\sqrt{\lambda_{2n}}} = (-1)^n \sqrt{\frac{(\lambda+n)\, c\, \Gamma(2\lambda)}{\lambda}}\; \ell_n^{(2\lambda-1)}(0), \tag{2.26}$$

donde $\left\{q_n(x) \big/ \sqrt{\lambda_n}\right\}$ es el sistema ortonormal de $\{q_n(x)\}$ y (v. [3])

$$\ell_n^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}}\cdot L_n^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \tag{2.27}$$

es el sistema de polinomios ortonormales de Laguerre.

Teniendo en cuenta [13], Teorema 2.4, podemos demostrar

Teorema 2.1. *Cuando* $a=b$, $z_0=0$ *está libre de masas de* υ.

Demostración. De (2.26) se deduce que

$$\frac{q_{2n}^2(0)}{\lambda_{2n}} \sim \frac{c\,\Gamma(2\lambda)}{\lambda}\, n \left(\ell_n^{(2\lambda-1)}(0)\right)^2, \quad n\to\infty.$$

Como $\ell_n^{(2\lambda-1)}(0)$ no tiene masas en $x=0$ (v. [3]), $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ell_n^{(2\lambda-1)}(0)\right)^2$ diverge.

Esto implica que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n^2(0)}{\lambda_n}$ diverge, y la conclusión resulta de [13], Teorema 2.4. □

Corolario 2.1. *Cuando* $a=b$, $(-2\sqrt{a}, 2\sqrt{a}) \subseteq C_v$. *En particular,* v *no tiene puntos de masas sumergidos.*

Teorema 2.2. *Sean* λ, a, b *dados y supóngase que* $\tilde{z}_0 \le 0$ (*resp.* $\tilde{z}_1 \le 0$). *Entonces, los puntos* $\pm z_0$ (*resp.* $\pm z_1$) *están libres de masas de* v, *excepto, posiblemente, para un valor* $c=c_0(\lambda,a,b)$ (*resp.* $c=c_1(\lambda,a,b)$) *del parámetro* c.

Demostración Puesto que $\tilde{z}_0 \le 0$, $L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0) \ne 0$ para $n \ge 0$, y de (2.20), (2.23) y (2.27) se obtiene que

$$\frac{q_{2n}^2(z_0)}{\lambda_{2n}} = \frac{\Gamma(2\lambda)}{c\lambda}\left(c - \frac{\lambda\,(1-c)}{\sqrt{ab}} z_0^2 \frac{L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0;1)}{L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)}\right)^2 (\lambda+n)\left(\ell_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)\right)^2. \tag{2.28}$$

Supongamos ahora que z_0 es punto de masa de v, asi que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_{2n}^2(z_0)}{\lambda_{2n}}$ es convergente ([13], Teorema 2.4). Teniendo en cuenta que

$$(\lambda+n)\left(\ell_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)\right)^2 \sim C\, n^{\frac{1}{2}}\, e^{4\sqrt{nz_0}}$$

(donde C, que depende de λ, a, b, es independiente de n), como resulta de la fórmula de Perron para los polinomios de Laguerre ([35], p. 199), se concluye que la expresión en paréntesis en (2.28) debe anularse cuando $n\to\infty$, lo cual es posible para un único valor $c=c_0(\lambda, a, b)$, necesariamente dado por

$$c_0(\lambda,a,b) = \frac{\frac{\lambda z_0^2}{\sqrt{ab}}\,\phi_0(\lambda,a,b)}{\frac{\lambda z_0^2}{\sqrt{ab}}\,\phi_0(\lambda,a,b)+1}, \tag{2.29}$$

donde

$$\phi_0(\lambda,a,b) = \lim_{n\to\infty}\frac{L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0;1)}{L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)}. \tag{2.30}$$

El mismo argumento demuestra que si $\tilde{z}_1 \leq 0$ entonces $c=c_1(\lambda,a,b)$, donde

$$c_1(\lambda,a,b)=\frac{\frac{\lambda z_1^2}{\sqrt{ab}}\,\phi_1(\lambda,a,b)}{\frac{\lambda z_1^2}{\sqrt{ab}}\,\phi_1(\lambda,a,b)-1}, \tag{2.31}$$

y

$$\phi_1(\lambda,a,b)=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_1;1)}{L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_1)}. \tag{2.32}$$

Esto completa la demostración. □

En la demostración del teorema anterior debe observarse que si z es punto de masa de $\{q_n(x)\}$, lo mismo es cierto de $-z$. Esto resulta del hecho de que $q_n(-x)=(-1)^n q_n(x)$ para todo $n \geq 0$, (Relación (1.18)).

Si z_0, z_1 están libres de masas de υ para un cierto valor de c, se dice que c es *no–crítico.* Los valores $c_0(\lambda,a,b)$ y $c_1(\lambda,a,b)$, cuando existen, son entonces *condiciones críticas internas* (es decir, para $\pm z_0$) y *externas* (es decir, para $\pm z_1$), respectivamente.

Teorema 2.3. *Para que* $C_\upsilon=\overline{L}$, *es necesario y suficiente que* c *sea no–crítico.*

Demostración. *Si* $\overline{L} = C_\upsilon$ *entonces* z_0, z_1 no son puntos de masa de υ. Por lo tanto, c es no–crítico. Recíprocamente, si c es no–crítico, $\overline{L} \subseteq C_\upsilon$ y, dado que q(x) es analítica en $[-N,N]-\overline{L}$, excepto posiblemente por singularidades aisladas, entonces $P_\upsilon=D_\upsilon=\operatorname{Supp}\upsilon \bigcap \left([-N,N]-\overline{L}\right)$, i.e., $C_\upsilon \bigcap \left([-N,N]-\overline{L}\right)=\emptyset$. Por lo tanto, $C_\upsilon \subseteq \overline{L}$. □

Estableceremos ahora algunos resultados sobre la presencia de masas de υ en z_0, z_1. Para ello utilizaremos resultados de Askey y Wimp en [3] (v. también [37]). Recordamos que la función ψ de Tricomi, $\psi(a,b,x)$, está definida por

$$\psi(a,b,x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-xt}\,t^{a-1}\,(1+t)^{b-a-1}\,dt, \tag{2.33}$$

siempre que $\operatorname{Re}(x) > 0$, $\operatorname{Re}(a) > 0$. El resultado de Askey y Wimp es (v. (3.5) de [3])

$$\frac{L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(z;1)}{L_n^{(2\lambda-1)}(z)}=\frac{\psi(2\lambda,2\lambda;-z)}{\psi(2\lambda-1,2\lambda;-z)}+O\left(e^{-4\sqrt{-nz}}\right), \tag{2.34}$$

o sea,

$$\frac{L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(z;1)}{L_n^{(2\lambda-1)}(z)}=e^{-z}(-z)^{2\lambda-1}\,\Gamma(-2\lambda+1,-z)+O\left(e^{-4\sqrt{-nz}}\right), \tag{2.35}$$

siempre que $z<0$ y $\lambda>\frac{1}{2}$. Aquí,

$$\Gamma(\alpha,\zeta)=\int_{\zeta}^{\infty}e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt\ ,\ \zeta>0, \tag{2.36}$$

es la función Gama incompleta (v. [26] Cap II).

Teorema 2.4. *Si* $a<b$ *y* $\lambda>1/2$, $\pm z_0$ *son puntos extremos de masa de* υ *si y solo si* c *está dado por* (2.29) *con*

$$\phi_0(\lambda,a,b)=\frac{\psi(2\lambda,2\lambda,-\tilde{z}_0)}{\psi(2\lambda-1,2\lambda,-\tilde{z}_0)}=\exp(-\tilde{z}_0)\,(-\tilde{z}_0)^{2\lambda-1}\,\Gamma(-2\lambda+1,-\tilde{z}_0)\,. \tag{2.37}$$

Demostración. Puesto que $\lambda>1/2$ y $\tilde{z}_0<0$, $\phi(\lambda,a,b)$ está bien definido y $L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)\neq 0$ para $n\geq 0$. Teniendo en cuenta (2.20), (2.23) y (2.26), se obtiene además que

$$\frac{q_{2n}^2(z_0)}{\lambda_{2n}}=$$

$$=\frac{\Gamma(2\lambda)}{\lambda c}(\lambda+n)\left(c-\lambda(1-c)\frac{z_0^2}{\sqrt{ab}}\phi_0(\lambda,a,b)+O\left\{e^{-4\sqrt{-n\tilde{z}_0}}\right\}\right)^2\left(\ell_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)\right)^2.$$

Por lo tanto, si (2.37) se cumple, entonces

$$\frac{q_{2n}^2(z_0)}{\lambda_{2n}}=\frac{\Gamma(2\lambda)}{\lambda c}(\lambda+n)\left(O\left(e^{-4\sqrt{-n\tilde{z}_0}}\right)\right)^2\left(\ell_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)\right)^2.$$

Ahora, mediante la fórmula de Perron para los polinomios de Laguerre ([35], p.199), se demuestra que

$$(n+\lambda)\Big(\ell_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0)\Big)^2 \sim C\, n^{1/2}\, e^{4\sqrt{-n\tilde{z}_0}}, \quad n \to +\infty,$$

donde C es una constante (que depende de $\tilde{z}_0$ pero no de n). Así, para alguna constante $M > 0$,

$$\frac{q_{2n}^2(z_0)}{\lambda_{2n}} \le M\, n^{1/2}\, e^{-4\sqrt{-n\tilde{z}_0}}.$$

Entonces, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2n}^2(z_0)}{\lambda_{2n}} < +\infty.$ Para establecer que z_0 es un punto de masa,

tenemos que demostrar aún que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2n+1}^2(z_0)}{\lambda_{2n+1}}$ converge. Esto es consecuencia de que

$$\frac{q_{2n+1}^2(z_0)}{\lambda_{2n+1}} \le \frac{2}{z_0^2}\left(\frac{n+1}{\lambda+n+1}\, a\, \frac{q_{2n+2}^2(z_0)}{\lambda_{2n+2}} + \frac{n+2\lambda}{n+\lambda}\, b\, \frac{q_{2n}^2(z_0)}{\lambda_{2n}}\right),$$

como se deduce de la relación de recurrencia de $\{q_n(x)\}$ y de la desigualdad $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$. □

Mucho más delicado es asegurar la existencia de masas en z_1.

Teorema 2.5. *Si* $b < a < 2b$, *existe* $\lambda_0 \ge 1$ *tal que si* $\lambda > \lambda_0$ *y* c *está dado por* (2.31), *con*

$$\phi_1(\lambda, a, b) = \frac{\psi(2\lambda, 2\lambda, -\tilde{z}_1)}{\psi(2\lambda-1, 2\lambda, -\tilde{z}_1)} \tag{2.38}$$

entonces z_1 *es un punto extremo de masa de* v.

Demostración. Supongamos $\lambda > 1$. El argumento usado en la demostración del Teorema 2.4 asegura que si c, dado como se afirma, es > 0, entonces z_1 es un punto extremo de masa. Demostraremos entonces que c, dado por (2.31), es eventualmente positivo. Sea $\zeta = -\tilde{z}_1$. Entonces $\zeta > 0$ y

$$\frac{\psi(2\lambda, 2\lambda, \zeta)}{\psi(2\lambda-1, 2\lambda, \zeta)} = \frac{1}{2\lambda-1}\, \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t}\, t^{2\lambda-2}\, \frac{t}{1+t}\, dt}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t}\, t^{2\lambda-2}\, dt}$$

$$=\frac{1}{2\lambda-1}\left(1-\frac{\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t}\, t^{2\lambda-2}\, \frac{1}{1+t}\, dt}{\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t}\, t^{2\lambda-2}\, dt}\right).$$

Pero

$$\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t}\, t^{2\lambda-2}\, \frac{1}{1+t} dt \;\le \int_0^{+\infty} e^{-\zeta t}\, t^{2\lambda-3}\, dt = \frac{\zeta}{2\lambda-2}\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t}\, t^{2\lambda-2} dt.$$

entonces

$$\lambda\, \phi_1(\lambda, a, b) \ge \frac{\lambda}{2\lambda-1}\left(1-\frac{\zeta}{2\lambda-2}\right),$$

y por lo tanto

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\phi_1(\lambda, a, b) \ge \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right) > \frac{1}{4},$$

pues las hipótesis implican que $\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}} < 1$. Se deduce que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda z_1^2}{\sqrt{ab}}\, \phi_1(\lambda, a, b) > 1,$$

y esto completa la demostración. □

También,

Teorema 2.6. *Para todo* $\lambda > 1/2$ *existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que si* $1 < a/b < 1+\epsilon_0$ *y* c *está dado por* (2.31) *y* (2.38), *entonces* z_1 *es un punto de masa extremo de* υ.

Demostración. De nuevo, sea $\zeta = -\tilde{z}_1$. Entonces $\zeta \to 0+$ cuando $a/b \to 1$. Sea c dado por (2.31). Puesto que

$$\phi_1(\lambda, a, b) = e^{\zeta}\, \zeta^{2\lambda-1}\int_{\zeta}^{+\infty} e^{-u}\, u^{-2\lambda}\, du = \int_1^{+\infty} e^{\zeta(1-u)}\, u^{-2\lambda}\, du,$$

se tiene que

$$\frac{\lambda z_1^2}{\sqrt{ab}}\,\phi_1(\lambda,a,b) \to \frac{\lambda z_1^2}{\sqrt{ab}}\,\frac{1}{2\lambda-1} = \frac{\lambda}{2\lambda-1}\Big(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+2\Big).$$

Pero

$$\frac{\lambda}{2\lambda-1}\Big(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+2\Big) \ge \frac{4\lambda}{2\lambda-1} > 1.$$

Entonces c es positivo, y la afirmación queda demostrada. □

Teorema 2.7 . *Si* $a=b$, $\lambda > 3/2$ *y*

$$c=\frac{4\lambda}{2\lambda+1}, \tag{2.39}$$

entonces $z_1=2\sqrt{a}$ *es un punto extremo de masa de* v *.*

Demostración. Tenemos que $\tilde{z}_1=0$, así que, de (2.24),

$$q_{2n}(2\sqrt{a})=\frac{n!\big(\sqrt{ab}\big)^n}{(\lambda)_n}\Big(c\,L_n^{(2\lambda-1)}(0)+4\lambda(1-c)\,L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(0;1)\Big).$$

Como $\lambda \ne 1/2$, (2.28) en [13] implica que

$$L_n^{(2\lambda-1)}(0)=\frac{(2\lambda)_n}{n!}\ ,\quad L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(0;1)=\frac{1}{2\lambda-1}\Big(\frac{(2\lambda)_n}{n!}-1\Big),\quad n\ge 0.$$

Entonces,

$$q_{2n}(2\sqrt{a})=\frac{n!\,a^n}{(\lambda)_n}\bigg(\Big(c+\frac{4\lambda(1-c)}{2\lambda-1}\Big)\frac{(2\lambda)_n}{n!}-\frac{4\lambda(1-c)}{2\lambda-1}\bigg).$$

Ahora, si $\lambda > 3/2$ y c está dado por (2.39), entonces $c \ne 1$, y

$$q_{2n}(2\sqrt{a})=\frac{n!\,a^n}{(\lambda)_n}\,\frac{4\lambda(1-c)}{2\lambda-1}\,.$$

De (2.20) y de las fórmulas asintóticas (3.8) en [13] se deduce entonces que

$$\frac{q_{2n}^2(2\sqrt{a})}{\lambda_{2n}}=\frac{n!\,(\lambda+n)}{\lambda(2\lambda)_n\,c}\Big(\frac{4\lambda(1-c)}{2\lambda-1}\Big)^2 \sim \frac{\Gamma(2\lambda)}{\lambda}\,c\,n^{2-2\lambda}.$$

Puesto que $2-2\lambda < -1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_{2n}^2(2\sqrt{a})}{\lambda_{2n}}$ es convergente, y el mismo argumento usado al final de la demostración del Teorema 2.4 asegura que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2n+1}^2(2\sqrt{a})}{\lambda_{2n+1}}$ también lo es. En virtud del Teorema 2.4 en [13] podemos entonces concluir que $2\sqrt{a}$ es punto de masa extremo de v □

Nota 2.1 La matriz de Jacobi J de $\{q_n(x)\}$ es la matriz (1.26) con $a_n = 0$ para $n \geq 0$ y

$$b_1 = \sqrt{2bc} \ ; \ b_{2n} = \sqrt{\frac{n\,a}{n+\lambda}}, \ b_{2n+1} = \sqrt{\frac{(n+2\lambda)\,b}{n+\lambda}}, \ n \geq 1. \tag{2.40}$$

Los Teoremas 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7 implican que las perturbaciones de rango 2 del operador $\hat{J}$ de J pueden agregar o remover valores propios extremos.

Nota 2.2. Algunos cálculos (algo largos, v. [17]) muestran que bajo las hipótesis del Teorema 2.7,

$$v(\{2\sqrt{a}\}) = \frac{2\lambda - 3}{2(2\lambda - 1)}. \tag{2.41}$$

Cuando $z = z_0$, z_1 y $z \neq 0$, es más difícil determinar $v(\{z\})$, y sólo es posible dar valores aproximados, con base en (2.23) de [13].

Ahora describiremos D_v, el soporte discreto de v, es decir, el conjunto de polos de $q(x)$ en $[-N, N] - \bar{L}$ (v. [13], Sección 2). Sean

$$F(x) = \frac{\lambda x}{\sqrt{ab}} \beta \int_0^{1]} (1 - \beta^2 u)^{-A-1} (1-u)^{-B-1} du,$$

$$G(x) = c + \frac{\lambda(1-c)}{\sqrt{ab}} x^2 \beta \int_0^{1]} (1 - \beta^2 u)^{-A-1} (1-u)^{-B-1} du, \tag{2.42}$$

donde $\beta = \beta(\omega) = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}$, $\omega = \frac{x^2 - a - b}{2\sqrt{ab}}$, y donde $A = A(\omega)$, $B = B(\omega)$ están dados por (2.14). Sea D el conjunto de los ceros de $G(x)$ en $[-N, N\} - \bar{L}$.

Demostraremos que $D_v = D$ si $a \leq b$, $D_v = D \bigcup \{0\}$ si $b < a$.

Sean

$$D_0 = (-|\sqrt{a} - \sqrt{b}|, |\sqrt{a} - \sqrt{b}|) \bigcap D, \ D_1 = ((-\infty, -\sqrt{a} - \sqrt{b}) \bigcup (\sqrt{a} + \sqrt{b})) \bigcap D,$$

así, que $D = D_0 \bigcup D_1$. Necesitaremos algunos resultados preliminares. Los dos lemas siguientes son fáciles de establecer. La siguiente fórmula, que permite

$$\frac{dB}{dx}(x)=\frac{(a-b)\,\omega\, x}{a\, b\,(\omega^2-1)^{3/2}},\ x\neq \pm 1. \tag{2.43}$$

Lema 2.1. *Sean* $a<b$. *Como función de* x, B *es decreciente en* $(z_1,+\infty)$ *y tiende a* $-\lambda$ *cuando* $x\to+\infty$ *y a* $+\infty$ *cuando* $x\to z_1+$. *Por lo tanto, existen* $N\geq y_0>y_1>\ldots>y_n>\ldots>z_1$ *tales que* $B(y_n)=n$, $n=0,1,2,\ldots$.*Si* $a\geq b$, B *es negativo en* $(z_1,+\infty)$.

Lema 2.2. *Como función de* x, B *es negativo en el intervalo* $(0\,,z_0)$ *si* $a\leq b$, *y creciente en este intervalo si* $b<a$. *En este último caso,* B *tiende a* $-\lambda$ *cuando* $x\to 0+$ *y a* $+\infty$ *cuando* $x\to z_0-$. *Por lo tanto, existen* $0<x_0<x_1<\cdots<x_n<\cdots<z_0$ *tales que* $B(x_n)=n$, $n=0,1,2,\ldots$.
La siguiente afirmación es mucho más delicada:

Lema 2.3. *Supóngase que* $c<1$. *Sean* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *como en los Lemas* 2.1 *y* 2.2. *Sea* $G(x)$ *dado por* (2.42). *Entonces* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *son polos de* $G(x)$, *y para cada* $n=0,1,2,\cdots$ *existen* $\overline{x}_n$, $\overline{y}_n$, *únicos, tales que* $0<\overline{x}_0<x_0$, $x_n<\overline{x}_{n+1}<x_{n+1}$, $y_n>\overline{y}_n>y_{n+1}$, *y* $G(\overline{x}_n)=G(\overline{y}_n)=0$. *Además, estos son los únicos puntos en* $[-N\,,N]-\overline{L}$ *donde* G *se anula, y son polos simples de* $q(x)$.

Demostración. Claramente x_n, y_n son polos de $G(x)$, y mediante cálculos simples se demuestra que si $\zeta_n=x_n\,,y_n$ entonces

$$\operatorname{Res}(G\,,\zeta_n)=\frac{\lambda(1-c)}{\sqrt{ab}\ n!}(2\lambda)_n\,\beta^{2n+1}\ \zeta_n^2\,(1-\beta_n^2)^{2\lambda-1}\Big(\frac{dB}{dx}(\zeta_n)\Big)^{-1},\ n\geq 0, \tag{2.44}$$

donde $\beta_n=\beta(\omega_n)$, $\omega_n=\omega(\zeta_n)$, y $\frac{dB}{dx}(\zeta_n)$ está dado por (2.43) en $x=\zeta_n$. Por lo tanto, $\operatorname{Res}(G\,,\zeta_n)>0$. Se deduce que para $n\geq 0$,

$$\lim_{x\to x_n+} G(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to x_{n+1}-} G(x)=-\infty, \tag{2.46}$$

y también que $\lim_{x\to x_0-} G(x)=-\infty$. Además

$$\lim_{x\to y_{n+1}+} G(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to y_n-} G(x)=-\infty, \tag{2.47}$$

Como G es continua (de hecho, analítica) en cada intervalo $(x_n\,,x_{n+1})$ y $(y_n\,,y_{n+1})$, existen $\overline{x}_{n+1}\,,\overline{y}_n$ en estos intervalos tales que $G(\overline{x}_{n+1})=G(\overline{y}_n)=0$. Puesto que $G(0)=c>0$, se tiene además que $G(\overline{x}_0)=0$ para algún $\overline{x}_0\in(0\,,x_0)$. Claramente, $\overline{x}_n$, $\overline{y}_n$ son polos simples de $q(x)$, y $\operatorname{Res}(q(x),\overline{\zeta}_n)=F(\overline{\zeta}_n)/G'(\overline{\zeta}_n)$, $\overline{\zeta}_n=\overline{x}_n,\overline{y}_n$, $n\geq 0$. Supóngase que existen otros puntos $\overline{x}$ en $(x_n\,,x_{n+1})$ (o en $(0\,,x_1)$) donde G se anula. Estos no pueden ser infinitos en número, y podemos escoger dos de ellos, $\overline{x}_n\,,\overline{x}_n$, tales que G no se anule en $(\overline{x}_n', \overline{x}_n'')$. Tenemos que $G'(\overline{x}_n') \neq 0 \neq G'(\overline{x}_n'')$, puesto que $\overline{x}_n', \overline{x}_n''$ son polos simples de $q(x)$. Por lo tanto, $G'(\overline{x}_n')$ y $G'(\overline{x}_n'')$ tienen signos opuestos. Pero $F(x) = \frac{c}{(c-1)x} < 0$, $x = \overline{x}_n', \overline{x}_n''$. Entonces $\mathrm{Res}(q,x)$ posee signos opuestos en $x = \overline{x}_n', \overline{x}_n''$. Esto es imposible, dado que $\mathrm{Res}(q,x) = \upsilon(\{x\}) \geq 0$. El mismo argumento en (y_{n+1}, y_n) demuestra la unicidad de $\overline{y}_n$. Dado que G no se anula en x_n, y_n, este argumento demuestra también que G solo se anula en $x = \overline{x}_n, \overline{y}_n$, $n \geq 0$. □

Nota 2.3. Cuando $c > 1$, G tiene aún ceros en $\{\overline{y}_n \mid n \geq 0\}$ y en $\{\overline{x}_n \mid n \geq 1\}$, los cuales son polos simples de $q(x)$, pero $G(\overline{x}_0) \neq 0$ (pues $G(0) = c > 0$ y $\lim_{x \to x_0^-} G(x) = +\infty$). Cuando $c = 1$, $q(x)$ tiene polos simples en los puntos $\{x_n \mid n \geq 0\}$ y $\{y_n \mid n \geq 0\}$, que son polos de $F(x)$. Nótese que si $x = x_n, y_n, \overline{x}_n, \overline{y}_n$ es polo de $q(x)$, lo mismo es cierto de $-x$. Esto se debe a la simetría del sistema $\{q_n(x)\}$.

Con las notaciones del Lema 2.3 y de la Nota 2.3, se tiene entonces que

Teorema 2.8. *El conjunto* D *está conformado como sigue:*

1) *Si* $a > b$ *entonces* $D_0 = \{\pm \overline{x}_n / n \geq 0\}$, *donde* $0 < \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\overline{x}_n \to \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ($\overline{x}_0$ *debe omitirse si* $c > 1$, *mientras que* $\overline{x}_n = x_n$, $n \geq 0$, *si* $c = 1$). *Además* $D_1 = \emptyset$ *si* $c \leq 1$, *mientras que* $D_1 = \{\pm y_0^*\}$, $y_0^* > \sqrt{a} + \sqrt{b}$, *si* $\lambda > \frac{1}{2}$, $c > \frac{4\lambda}{2\lambda - 1}$ *y* $a \sim b$ (*i.e.*, $1 < \frac{a}{b} < 1 + \epsilon$ *para algún* $\epsilon > 0$ *conveniente*).

2) *Si* $a < b$ *entonces* $D_0 = \emptyset$ *si* $c \geq \frac{1}{2}$; $D_0 = \{\pm x_0^*\}$, *con* $0 < x_0^* < \sqrt{b} - \sqrt{a}$, si $c < \frac{1}{2}$ *y* $b \gg a$ (*i.e.*, $b/a > M$ *para algún* $M > 0$). *Además,* $D_1 = \{\pm \overline{y}_n \mid n \geq 0\}$, $\overline{y}_0 > \overline{y}_1 > \overline{y}_2 > \ldots > \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\overline{y}_n \to \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *si* $c \neq 1$, $\overline{y}_n = y_n$, $n \geq 0$, *si* $c = 1$.

3) *Si* $a = b$ *entonces* $D_0 = \emptyset$. *Además* $D_1 = \emptyset$ *si* $c \leq 1$ *o* $1 < c \leq \frac{4\lambda}{2\lambda - 1}$; *y* $D_1 = \{\pm y_0^*\}$, $y_0^* > \sqrt{a} + \sqrt{b}$, *si* $c > \frac{4\lambda}{2\lambda - 1}$.

Demostración.

1) El argumento para demostrar que D_0 es como se ha descrito, resulta inmediatamente del Lema 2.3 y de la Nota 2.3. Ahora, es claro que si $c \leq 1$ entonces $G(x) > 0$ en $(z_1, +\infty)$, $z_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (las integrales en (2.42) son convergentes en $(z_1, +\infty)$, porque $B < 0$ en este intervalo). Supongamos entonces que $\lambda > \frac{1}{2}$ y que $c > \frac{4\lambda}{2\lambda - 1}$. Tenemos que

$$G(z_1) = c + \frac{\lambda(1-c)}{\sqrt{ab}} z_1^2 e^{\zeta} \int_1^{+\infty} e^{-\zeta u} u^{-2\lambda} du,$$

y es fácil verificar que

$$G(z_1) \to c + \frac{4\lambda(1-c)}{2\lambda - 1}$$

cuando $a/b \to 1$. Luego, $G(z_1) < 0$ si $a \sim b$, $\lambda > 1/2$ y $c > 4\lambda/2\lambda-1$. Así, en este caso existirá $y_0^* \in (z_1, +\infty)$ tal que $G(y_0^*)=0$, y y_0^* es necesariamente único (véase la demostración del Lema 2.3).

2) El argumento acerca de la composición de D_1 es también consecuencia del Lema 2.3 y de la Nota 2.3. En cuanto a la composición de D_0, tenemos que $G(0)=c$ y que

$$G(z_0)=c - \frac{\lambda(1-c)}{\sqrt{ab}} z_0^2 e^{\zeta} \int_1^{+\infty} e^{-\zeta u} u^{-2\lambda} du,$$

$z_0=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\zeta=2\lambda\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$, y es fácil verificar que

$$\frac{\lambda z_0^2}{\sqrt{ab}} e^{\zeta} \int_1^{+\infty} e^{-\zeta u} u^{-2\lambda} du < 1.$$

Por lo tanto, $G(z_0) > c-(1-c)=2c-1$, i.e., $G(z_0) \geq 0$ si $c \geq 1/2$, así G no se anula en $(0, z_0)$ si $c \geq 1/2$. Por otra parte, $G(z_0) \to c-(1-c)=2c-1$ si $b/a \to +\infty$. Así, si $c < 1/2$ y $b \gg a$, $G(z_0) < 0$, y existirá $x_0^* \in (0, z_0)$, necesariamente único, tal que $G(x_0^*) = 0$. Esto demuestra (2).

Para demostrar (3), recordemos que $2\lambda > 1$ cuando $a=b$. Así mismo, $D_0=\emptyset$ (dado que $z_0=0$). Ahora, $A=B=-\lambda$ y $z_1=2\sqrt{a}$. Luego, si $c \leq 1$ entonces

$$G(x)=c + \lambda(1-c)\, a^{-1} \beta x^2 \int_0^1 (1-\beta^2 u)^{\lambda-1} (1-u)^{\lambda-1} du > 0$$

para $x \in (2\sqrt{a}, +\infty)$, y $D_1 = \emptyset$. Por otra parte, $\lim_{x\to+\infty} G(x)=1$ si $c > 1$, y

$$G(z_1)=c + 4\lambda(1-c) \int_0^1 (1-u)^{2\lambda-2} du = c + \frac{4\lambda(1-c)}{2\lambda-1}.$$

Por lo tanto, si $1 < c \leq \frac{4\lambda}{2\lambda-1}$ entonces $D_1=\emptyset$; pero si $c > \frac{4\lambda}{2\lambda-1}$ entonces $G(z_1) < 0$, y existirá $y_0^* \in (2\sqrt{a}, +\infty)$, único, tal que $G(y_0^*)=0$.

□

Como $D_{\upsilon} \subseteq [-N, N]-\overline{L}$, es claro que $D_{\upsilon} \subseteq D \bigcup \{0\}$. Para determinar completamente D_{υ} sólo queda por establecer entonces que:

Teorema 2.9. *El punto* $x=0$ *está en* P_{υ} *(y por tanto en* D_{υ}*) si y solo si* $b < a$. *Además,*

$$v(\{0\})=\frac{1}{c\left(\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)^{-2\lambda-1}-1\right)+1}. \tag{2.48}$$

Demostración. Hemos visto que $0 \notin P_v$ si $a=b$. Cuando $a > b$, las integrales en (2.39) son convergentes. Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} x\,F(x)=0$, $\lim_{x\to 0} G(x)=c$, así que $\lim_{x\to 0} x q(x)=0$, y $0 \notin P_v$. Ahora, si $b < a$ entonces $x=0$ es un polo de $F(x)$ y $\lim_{x\to\infty} G(x) = c + (1-c)\operatorname{Res}(F,0)$. Por lo tanto

$$v(\{0\})=\lim_{x\to 0} x q(x)=\frac{\operatorname{Res}(F,0)}{c+(1-c)\operatorname{Res}(F,0)},$$

y (2.48) resulta de un cálculo simple. □

§ 3. EL SISTEMA $\{q_n^{(1)}(x)\}$.

Ya en (2.12) se ha establecido que

$$q_{2n+1}^{(1)}(x)=\frac{(n+1)\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda+1)_n}\, x\, R_n^{(1)}(\omega), \tag{3.1}$$

donde ω es como en (2.4) y

$$R_n(\omega)= P_n\left(\omega;\lambda,0,\frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right), \tag{3.2}$$

es un polinomio de Pollaczek en (2.11). El sistema $\{q_n^{(2)}(x)\}$ satisface, por otra parte,

$$\begin{aligned} x\, q_{2n}^{(2)}(x) &= q_{2n+1}^{(2)}(x) + \frac{n+1}{n+\lambda+1}\, a\, q_{2n-1}^{(2)}(x) \\ x\, q_{2n+1}^{(2)}(x) &= q_{2n+2}^{(2)}(x) + \frac{n+2\lambda+1}{n+\lambda+1}\, b\, q_{2n-2}^{(2)}(x),\ n\geq 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

y

$$q_{-1}^{(2)}(x)=0,\quad q_0^{(2)}(x)=1,$$

Mediante (1.5), (1.23) y (3.3) es fácil verificar, como en la Sección 2, que

$$q_{2n}^{(2)}(x)=\frac{(n+1)!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda+1)_n}\left(R_n^{(1)}(\omega)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\, R_{n-1}^{(2)}(\omega)\right),\ n\geq 0, \tag{3.4}$$

con $R_n(\omega)$ como en (3.2). De (3.1) y (3.9) se tiene entonces que la fracción continua $q^{(1)}(x)$ es

$$q^{(1)}(x)=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\,R^{(1)}(\omega)\right),\quad x\notin[-N,N] \tag{3.5}$$

con N como en (2.15). Ahora, el Teorema 3.1 en [13] implica que

$$R^{(1)}(\omega)=2\beta\frac{\int_0^1 u(1-\beta^2u)^{-A-1}(1-u)^{-B-1}du}{\int_0^1 (1-\beta^2u)^{-A-1}(1-u)^{-B-1}du}$$

$$=\frac{2\beta}{-B+1}\,\frac{{}_2\mathbb{F}_1\left(\begin{matrix}A+1 & 2\\ -B+2 & \end{matrix}\,\middle|\,\beta^2\right)}{{}_2\mathbb{F}_1\left(\begin{matrix}A+1 & 1\\ -B+1 & \end{matrix}\,\middle|\,\beta^2\right)}, \tag{3.6}$$

con A, B dados por (2.14) y $\beta=\beta(\omega)=\omega-\sqrt{\omega^2-1}$, y ${}_2\mathbb{F}_1$ denota la serie hipergeométrica. La parte absolutamente continua de la medida de ortogonalidad μ de $\{q_n^{(1)}(x)\}$ es entonces

$$d\mu_c(x)=\frac{2|\Gamma(-B+1)|^2}{\pi\,\Gamma(2\lambda+1)|x|}\left|(1-\beta^2)^{A-1}\right|^2\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\left|{}_2\mathbb{F}_1\left(\begin{matrix}A+1 & 1\\ -B+1 & \end{matrix}\,\middle|\,\beta^2\right)\right|^2}\chi(x)dx, \tag{3.7}$$

donde χ denota la función característica de L (dado por (2.16)) y A, B, β son funciones de ω. Esto es consecuencia de (3.16) y (3.18) en [13]. Entonces $L\subseteq C_\mu$. Ahora determinaremos si $\overline{L}=C_\mu$.

Si $z_0=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$ y $z_1=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, las relaciones (3.30), (3.31) de [13], y (3.1), implican que

$$q_{2n+1}^{(1)}(z_0)=(-1)^n \frac{(n+1)!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda+1)_n} z_0 L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_0;1) \tag{3.8}$$

y que

$$q_{2n+1}^{(1)}(z_1)=\frac{(n+1)!\left(\sqrt{ab}\right)^n}{(\lambda+1)_n} z_1 L_n^{(2\lambda-1)}(\tilde{z}_1;1),\ n\geq 0, \tag{3.9}$$

con $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$ dados por (2.22). De esto se deduce, exactamente como en el Teorema 21, que

Teorema 3.1. *Si* $a \neq b$ *entonces* z_0 *y* z_1 *están libres de masas de* μ *y* $\overline{L}=C_\mu$.

Más interesante es que

Teorema 3.2. *Si* $a=b$ *entonces* $z_1=2\sqrt{a}$ *está libre de masas, pero* $z_0=0$ *porta una masa de* μ*. En este caso* $C_\mu=[-2\sqrt{a},0)\cup(0,2\sqrt{a}]$, *y* 0 *es interior a* $\overline{C}_\mu$.

Demostración. Recordemos que $\lambda > 1/2$. La afirmación acerca de z_1 se deduce de (3.9), como en el Teorema 2.1.
Ahora demostraremos que 0 es un punto de masa. La relación de ortogonalidad es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_n^{(1)}(x)\, q_m^{(1)}(x)\, d\mu(x)=\lambda_n\, \delta_{mn},\ m,n\geq 0, \tag{3.10}$$

donde

$$\lambda_{2n}=\frac{n!\,(1+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n^2} a^n b^n,\quad \lambda_{2n+1}=\frac{(n+1)!\,(1+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n^2\,(n+\lambda+1)} a^{n+1} b^n,\ n\geq 0. \tag{3.11}$$

También, de (3.4) y de la relación de recurrencia de $\{q_n^{(1)}(x)\}$, se deduce que

$$q_{2n}^{(1)}(x)=\frac{n!\left(\sqrt{ab}\right)^{n-1}}{(\lambda+1)_n}\left((n+1)\sqrt{ab}\, R_n^{(1)}(\omega)+(n+2\lambda)\, b\, R_{n-1}^{(1)}(\omega)\right),\ n\geq 0, \tag{3.12}$$

y cuando $a=b$ y $z_0=0$, que

$$q_{2n}^{(1)}(0) = (-1)^n \frac{n!\,a}{(\lambda+1)_n}\left((n+1)\,L_n^{(2\lambda-1)}(0;1) - (n+2\lambda)\,L_{n-1}^{(2\lambda-1)}(0;1)\right). \tag{3.13}$$

De (3.28) y (3.29) en [13] se deduce además que

$$L_n^{(2\lambda-1)}(0;1) = \frac{1}{2\lambda-1}\left(\frac{(2\lambda)_{n+1}}{(n+1)!} - 1\right), \quad n \geq 0,\ \lambda \neq \frac{1}{2}, \tag{3.14}$$

y, de (3.13), que

$$q_{2n}^{(1)}(0) = \frac{n!\,a^n}{(\lambda+1)_n},\ n \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\left(q_{2n}^{(1)}(0)\right)^2}{\lambda_{2n}} = \frac{n!}{(2\lambda+1)_n},\ n \geq 0.$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(q_{2n}^{(1)}(0)\right)^2}{\lambda_{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2\lambda+1)_n} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2\lambda+1 & \end{matrix}\,\middle|\, 1\right) = \frac{2\lambda}{2\lambda-1} \tag{3.15}$$

y dado que $q_{2n+1}^{(1)}(0) = 0$, la afirmación resulta del Teorema 2.4 en [13]. □

Nota 3.1. Bajo las hipótesis del Teorema 3.1 se deduce inmediatamente del Teorema 2.4 en [13] y de (3.15) que

$$\mu(\{0\}) = \frac{2\lambda-1}{2\lambda}. \tag{3.16}$$

Observemos que cuando $a = b$, 0 es un punto de masa sumergido de μ. Determinaremos ahora si 0 es un punto de masa aislado cuando $a \neq b$.

Teorema 3.3. *El punto* $x = 0$ *es un punto de masa aislado de* μ *si y solo si* $b > a$. *En tal caso*

$$\mu(\{0\}) = \frac{1}{{}_2F_1\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2\lambda+1 & \end{matrix}\,\middle|\, \frac{a}{b}\right)}. \tag{3.17}$$

Demostración. Debemos determinar cuándo 0 es polo de $q^{(1)}(x)$, i.e., cuándo $\lim_{x\to 0} x\, q^{(1)}(x) \neq 0$. Ahora, si $a \neq b$ entonces $\omega(0) = -\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$; $\beta(\omega(0)) = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ si $b < a$, $\beta(\omega(0)) = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ si $b > a$; $A = -2\lambda$, $B = 0$ si $a > b$; $A = 0$, $B = -2\lambda$ si $b > a$. Por lo tanto $\lim_{x\to 0} x\, q^{(1)}(x) = 0$ si $b < a$, y $\lim_{x\to 0} x\, q^{(1)}(x)$ es precisamente el miembro de la derecha en (3.17) si $b > a$. Esto demuestra el teorema. □

Ahora, los demás puntos de D_μ son polos de $q^{(1)}(x)$ y, necesariamenta, ceros de

$$G(x) = \int_0^1 (1-\beta^2 u)^{-A-1}(1-u)^{-B-1}\,du\,.$$

Observamos al respecto que

$$F(x) = \int_0^1 u\,(1-\beta^2 u)^{-A-1}(1-u)^{-B-1}\,du$$

no se anula en el conjunto D de ceros de G(x). Una demostración de este hecho se encuentra en [13], Lema 5.1. Teniendo esto presente se demuestra, de manera semejante a como hicimos con el Teorema 2.8, que

Teorema 3.4. *El conjunto* D *está dado como sigue:*
1) *Si* $a > b$, $D = \{\pm \overline{x}_n \mid n \geq 0\}$, *donde* $0 < \overline{x}_n < \overline{x}_{n+1}$, $n \geq 0$, *y* $\overline{x}_n \to \sqrt{a} - \sqrt{b}$.
2) *Si* $b < a$, $D = \{\pm \overline{y}_n \mid n \geq 0\}$, *donde (con* N *como en* (2.15)), $N \geq \overline{y}_n > \overline{y}_{n+1} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\overline{y}_n \to \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
3) *Si* $b = a$ *entonces* $D = \emptyset$.

También

Teorema 3.5. *El soporte puntual de* P_μ *de* μ *está dado como sigue:*
1) *Si* $a > b$, *entonces* $P_\mu = D \bigcup \{0\} = D_\mu$.
2) *Si* $b > a$, *entonces* $P_\mu = D = D_\mu$.
3) *Si* $b = a$, *entonces* $P_\mu = \{0\}$, $D_\mu = \emptyset$.

Nota 3.1. La matriz de Jacobi $\mathbb{J}$ de $\{q_n^{(1)}(x)\}$ es (1.26), con

$$a_n = 0\,,\quad b_{2n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n+\lambda+1}a}\,,\quad b_{2n+2} = \sqrt{\frac{n+2\lambda+1}{n+\lambda+1}b}\,,\quad n \geq 0\,. \tag{3.18}$$

La característica más interesante del operador $\hat{J}(\vec{x}) = J\vec{x}$ es la de poseer al 0 como un valor propio sumergido cuando $a=b$.

§ 4. Observaciones finales.

Como mencionamos en la introducción, los sistemas de polinomios considerados en este trabajo se originaron en el estudio de algunos modelos en física del estado sólido. Estos modelos se manejan usualmente por métodos numéricos o de simulación, y de esta manera se prevé su comportamiento. En el caso de nuestros polinomios, por ejemplo, existen evidencias que apoyan la existencia del número infinito de niveles discretos de energía (bound-states) y de resonancias en puntos de masa extremos, y de puntos de masa sumergidos cuando $a = b$. Es también curioso que los datos disponibles apoyan la existencia de puntos de masa extremos cuando estos son puntos límite de masas discretas, una situación que no hemos podido tratar.

Desde el punto de vista matemático, nuestros modelos refutan la sospecha de que los puntos de masa sumergidos aparecían a través de un proceso de cribación solamente cuando intervalos que son disjuntos, y donde al menos uno de ellos tiene un punto de masa extremo, se unen, o cuando una masa aislada entre dos intervalos es atrapada cuando los intervalos se unen. En el caso de los polinomios $\{q_n^{(1)}(x)\}$, por ejemplo, los intervalos disjuntos de L se unen cuando $a=b$ y aparece una masa sumergida, pero los puntos extremos de estos intervalos están libres de masas. Por otra parte, los polinomios $\{q_n(x)\}$ tienen masas en los puntos extremos de los intervalos, que se anulan cuando los intervalos se unen, y también se anulan las masas aisladas en $(\sqrt{b}-\sqrt{a}\,,\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\,)$ cuando $b \to a$.

REFERENCIAS

1. AlSalam, W., Allaway, W. and Askey, R., *Sieved ultraspherical polinomials.* Amer. Math. Soc., 284 (1984), 39-55.
2. Askey, R. and Ismail M. E. H., *Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials,* Memoirs Amer. Math. Soc., 300 (1984), 1-108.
3. Askey, R. and Wimp, J., *Associated Laguerre and Hermite polynomials,* Proc. Royal Soc. of Edinburgh, 96 A (1984), 15-37.
4. Bank, E. and Ismail, M. E. H., *The attractive Coulomb potential*

polynomials, Constructive Approximation, 1 (1985), 103-119.

5. Broad, J. T., *Gauss quadrature generated by diagonalization of* H *in infinite* L_2 *basis,*Phys. Rev., A 18 (1978), 1012-1127.
6. Charris, J. A. and Gómez, L., *Functional analysis orthogonal polynomials and a theorem of Markov,* Rev. Col. de Mat., 22 (1988), 77-128.
7. Charris, J. A. and Ismail, M. E. H., *Sieved orthogonal polynomials II: Random walk polynomials,* Canadian J. of Math., 38 (1986), 397-415.
8. Charris, J. A. and Ismail, M. E. H., *Sieved orthogonal polynomials V: Pollaczeck polynomials,* SIAM J. of Math. Anal., 18 (1987), 1177-1218.
9. Charris, J. A. and Ismail, M. E. H., *Sieved orthogonal polynomials VII: Generalized polynomial mappings,* Trans. Amer. Math. Soc., por aparecer.
10. Charris, J. A. and Ismail, M. E. H., Monsalve, S., *Sieved orthogonal polynomials X: General blocks of recurrence relations,* Pacific J. of Math., por aparecer.
11. Charris, J. A. and Rodríguez-Blanco, G., *On system of orthogonals polynomials with inner and endpoint masses,* Rev. Col. de Mat., 24 (1990), 153-177.
12. Charris, J. A., Salas, G. and Silva, V., *Polinomios ortogonales relacionados con problemas espectrales,* Rev. Col. de Mat., 25 (1991), 135-180.
13. Charris, J. A., Gómez, C. P. and Rodríguez-Blanco, G., *On two systems orthogonal polynomials related to the Pollaczek polynomials,* Rev. Col. de Mat., 26 (1992), 15-80.
14. Chihara, T. S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials,* Gordon and Breach, New York, N. Y. 1978.
15. Chihara, T. S., *Orthogonal polynomials and measure with endpoint masses,* Rocky Mountain J. Math., 15 (1985), 705-719.
16. Geronimo, J. S. and Van Assche, W., *Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients,* J. Approx. Theory 46 (1986), 251-283.
17. Gómez, C. P., *Sistemas de Polinomios Ortogonales Relacionados con los Polinomios de Pollaczek,* Tesis de Maestría, Universidad Nacional, Santafé de Bogotá, 1991.
18. Heller, E. J., Reinhardt, W. P. and Yamani, H. A., *On quadrature calculations of matrix elements using* L_2*-expansions techniques,* J. Comp. Phys., 13 (1973), 536-549.
19. Ismail, M. E. H., *Sieved orthogonal polynomials I: Symmetric Pollaczek analogues,* SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), 1093-1113.
20. Ismail, M. E. H., *Sieved orthogonal polynomials III: Orthogonality on several intervals,* Trans. Amer. Math. Soc., 294 (1986), 89-111.
21. Koekoek, R., *Generalizations of Laguerre (type) polynomials,* Report 8758, Delft Univ. of Technology, Delft, The Netherlands, 1987.
22. Koekoek, R., *Koornwinder's generalized Laguerre polynomials and their q-analogues,* Report 8887, Delft Univ. of Technology, Delft, The Netherlands, 1988.

23. Koekoek, R., *Generalizations of Laguerre polynomials,* Report 8225, Delft Univ. of Technology, Delft, The Netherlands, 1989.
24. Koornwinder, T. H., *Orthogonal polynomials with weight function* $(1\text{-}x)^{\alpha}(1\text{-}x)^{\beta}+M\delta(x\text{-}1)+N\delta(x+1)$, Can. Math. Bulletin, 27 (1984), 205-241.
25. Lebedev, N. H., *Special Functions and their Applications,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
26. Olver, F. W. J., *Asymptotics and Special Functions,* Academic Press, New York, N. Y., 1974.
27. Pollaczek, F., *Sur une généralization des polynómes de Legendre,* C. R. Acad. Sci. Paris, 228 (1949), 1363-1365.
28. Pollaczek, F., *Sur une famille de polynómes orthogonaux qui contiennent les polynómes de Hermite et de Laguerre comme des cases limites,* C. R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 1563-1565.
29. Pollaczek, F., *Sur une famille de polynómes orthogonaux á quatre paramétres,* C. R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 2254-2256.
30. Pollaczek, F., *Sur une généralization des polynómes de Jacobi,* Memor. Sci. Mathematiques, 131, GauthierVillars, Paris, 1956.
31. Rainville, E. D., *Special Functions,* Macmillan, New York, N. Y., 1974.
32. Reinhardt, W. P., Yamani, H. A., L_2*-discretizations of the continuum radial kinetic energy and Coulomb hamiltonians,* Phys, Rev, A11 (1975), 1144-1155.
33. Shilov, G. E. and Gurevich, B. L., *Integral, Measure and Derivate:* a Unified Approach, Dover, New York, N. Y., 1977.
34. Slim, H. A., *On correcursive orthogonal polynomials and their applications to potencial scattering,* J. Math. Anal. and Applic, 136 (1988), 1-19.
35. Szegö, G., *Orthogonal Polynomials,* 4$^{\text{th}}$. Edition, Colloquium Publications, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1975.
36. Wheeler, J. C., *Modified moments and continued fraction coefficients for the diatomic linear chain,* J. Chem. Phys., 80 (1984), 472-476.
37. Wimp, J., *Orthogonal polynomials in the tabulation of Stieltjes transforms,* preimpreso, J. Math. Anal. Appl. (1983).

FIRST AUTHOR: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SANTAFÉ DE BOGOTÁ – COLOMBIA

SECOND AUTHOR:PROGRAMA DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE NARÑO, PASTO – COLOMBIA

THIRD AUTHOR: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SANTAFÉ DE BOGOTÁ – COLOMBIA