Revista Cólombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993) págs. 187–190

CIERTAS PROPIEDADES INTRINSECAS Y EXISTENCIA DE PUNTOS FIJOS PARA ALGUNOS OPERADORES

por

L. NOVA G.

RESUMEN. Se estudiarán propiedades intrínsecas como también existencia de puntos fijos para cierta clase de operadores no necesariamente continuos que contienen a las aplicaciones no-expansivas y a las contracciones como subclases propias.

§ 1. INTRODUCCION.

Estudiando el comportamiento de Operadores T: X $\to$ X donde X es un espacio de Banach y T satisface:

$$\|Tx - Ty\| \leq a \|x - y\| + b\{\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\};$$

para analizar la existencia de puntos fijos, se ha precisado en subdividir en ciertas subclases:

$$T \in A(a,b) \Leftrightarrow \|Tx - Ty - b(x - Tx + Ty - y)\| \leq a \|x - y\|$$

$$T \in B(a,b) \Leftrightarrow \|Tx - Ty - b(x - Tx)\| \leq a \|x - y\| + b \|y - Ty\|$$

$$T \in D(a,b) \Leftrightarrow \|Tx - Ty\| \leq a \|x - y\| + b\{\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\}.$$

Palabras claves: Asintoticidad Regular, Iterativas de Picard, Puntos Fijos, Puntos Periódicos.

Clasificación de la AMS: Primaria 47H10, Secundaria 46A30.

Claramente $A(a, b) \subseteq B(a, b) \subseteq D(a, b)$ y si $a < 1$, entonces

$$D(a,b) \subseteq D(0, \frac{a+b}{1-a}).$$

Algunos aspectos de la clase A(a,b) fueron presentados por el Dr. W. Derrick durante el Congreso Internacional de Análisis Funcional en honor al Profesor M. Valdivia en Peñiscola-España (1990). Aquí se mostrarán algunos aspectos de la clase B(a,b).

§ 2. PROPIEDADES DE LA CLASE B(a,b)

Obsérvese que $D(a,b) \subseteq D(a',b')$ si $a \leq a'$, $b \leq b'$, además todo operador está en la clase $D(1, 1)$; por lo tanto son de interés los casos $a < 1$, $b < 1$, $a = 1$, $b = 1$.

Teorema 1. *Sea* T *en la clase* B(a,b) *con* $a < 1$. *Si* $(x_n)_n$ *es una sucesión tal que* $(I - T)x_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$, *entonces* $(Tx_n)_n$ *y* $(x_n)_n$ *son sucesiones de Cauchy y* $(x_n)_n$ *converge al único punto fijo de* T.

Demostración. Como $B(a,b) \subseteq D(a,b) \subseteq D(0, \frac{a+b}{1-a})$ (la última inclusión se tiene sólo en caso de que $a < 1$), entonces $(Tx_n)_n$ es una sucesión de Cauchy si $(I-T)x_n \to 0$. Además por la desigualdad triangular $(x_n)_n$ también es sucesión de Cauchy y ambas tienen que converger al mismo punto: $z \in X$ como:

$$\| Tz - Tx_n - b(z - Tz) \| \leq a \, \| z - x_n \| + b \, \| x_n - Tx_n \|,$$

tomando límite cuando $n \to \infty$, concluimos que $(1+b) \| z - Tz \| = 0$. e.d. $z = Tz$. □

Obsérvese que $T: C_o \to C_o$ definida por $T(x_1, x_2,...) = (1, x_1, x_2,...)$, satisface que $T \in B(1,0)$, con $a = 1$, $b = 0$. El conjunto de puntos fijos de T es ϕ y si $x_n = (\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0,...)$, entonces $\| x_n - Tx_n \| = \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero $(x_n)_n$ no converge en C_o.

Nótese que la condición del Teorema 1 se cumple para la sucesión de iterativas de Picard alrededor de cualquier punto, es decir,

Teorema 2. *Si* T *está en la clase* B(a,b) *con* $a < 1$, *entonces* T *es asintóticamente regular en todo punto.*

Demostración. En efecto, a partir de x_o (arbitrario), definimos $x = x_n = Tx_{n-1} = T^n x_o$, $y = x_{n-1}$. Como $T \epsilon B(a,b)$, entonces

$$\| x_{n+1} - x_n - b(x_n - x_{n+1}) \| \leq a \| x_n - x_{n-1} \| + b \| x_{n-1} - x_n \| .$$

Por lo tanto,

$$\| x_n - Tx_n \| \leq \frac{a+b}{1+b} \| x_{n-1} - Tx_{n-1} \| .$$

Iterando éste proceso n veces, tenemos que

$$\| x_n - Tx_n \| \leq (\frac{a+b}{1+b})^n \| x_o - Tx_o \|$$

y puesto que $a < 1$, entonces se obtiene lo deseado y de acuerdo al resultado del Teorema l, la sucesión de iterativas de Picard de T alrededor de cualquier punto converge al único punto fijo de T. □

Otra característica que tienen los operadores T en la clase $B(a, b)$ con $a < 1$ esta dada por el conjunto de puntos periódicos de orden 2, al cual denotaremos con $Per_2(T)$.

Teorema 3. *Sea* $T \epsilon B(a , b)$, $a < 1$. $Per_2(T) = F_T = \{z \epsilon X/ Tz = z\}$.

Demostración. Sea $z \epsilon Per_2(T)$, como $T \epsilon B(a,b)$, entonces para
$x = z$, $y = Tz$, se tiene que

$$\| Tz - T^2z - b(z - Tz) \| \leq a \| z - Tz \| + \| Tz - T^2z \|$$

es decir

$$(1+b) \| Tz - z \| \leq (a+b) \| z - Tz \|$$

y puesto que $a < 1$, entonces $z = Tz$. Usando la desigualdad triangular de la norma y el hecho de que $T \epsilon B(a,b)$, entonces también se tiene que:

$$\| Tx - Ty \| \leq \frac{a+b}{1+b} \| x - y \| + \frac{2b}{1+b} \| y - Ty \| . \qquad (*)$$

$$\| (Tx - x) - (Ty - y) \| \leq \frac{a+1}{b+1} \| x - y \| + \frac{2b}{1+b} \| y - Ty \| . \qquad (**)$$

Si en $(*)$ intercambiamos los papeles de x y de y y sumamos, obtenemos que

$$\| Tx - Ty \| \leq \frac{a+b}{1+b} \| x -y \| + \frac{b}{1+b} \{ \| x - Tx \| + \| y - Ty \| \}$$

es decir $T \in D\left(\frac{a+b}{1+b}, \frac{b}{1+b}\right)$. Nótese que $\frac{b}{1+b} < 1$. Si en (*) $y = Ty$, entonces

$$\| Tx - y \| \leq \frac{a+b}{1+b} \| x - y \|$$

y si además $a < 1$, entonces T es cuasi-no-expansiva.

De otra parte, si en (*) $y = Ty$. y $x_n \to y$, entonces $Tx_n \to y$, es decir, T es continua en F_T (si $F_T \neq \phi$) y en consecuencia $(I - T)\, x_n \to 0$ (cfr. Teorema 1).

Si en (**), $y = Ty$, entonces

$$\| Tx - x \| \leq \frac{1+a}{1+b} \| x - y \|$$

y así, si $y \in F_T$, $a < b$, entonces $T^{-1}(y) = \{y\}$. □

Agradecimientos. Quiero expresar mi gratitud al Dr. W. Derrick quien ha sido la persona quien me ha orientado en el estudio de los puntos fijos, como también al comité organizador de este encuentro.

BIBLIOGRAFIA

1. W.R. Derrick y L. Nova, *Interior Properties and fixed Points of Certain Discontinuous Operators,* Proceedings of The International Functional Analysis meeting, Peñiscola, Spain, North-Holland, (1992), 239-245.
2. K. Goebel, W.A. Kirk & T.N. Shimi, *A Fixed Point Theorem in Uniformly Convex Spaces,*. Boll. Un. Mat. Ital., (4) 7 (1973), 63-754.
3. B.E. Rhoades, *A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings,* Trans. Amer. Math. Soc., 226 (1977), 257-290.
4. B.E. Rhoades, *Contractive Definitions Revisited,* Contemporary Mathematics, 21 (1983), 189-205.

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá – COLOMBIA