

LA TRANSFORMADA Z

por

D. LOPEZ y E. OBREGON

1.- Introducción. En muchos sistemas lineales aparece en uno o más puntos la información en forma discreta. Un sistema que opera en esta forma se denomina un sistema de información discreta. Por ejemplo, un sistema en el cual se haya introducido un computador digital, estará sometido en algunas de sus partes a una información discreta (una sucesión de números). En la práctica, un sistema que opera con información continua puede en muchos casos beneficiarse (en su estabilidad y en su funcionamiento) con la introducción de señales discretas. Esto, sumado al hecho de que el almacenamiento y la transmisión de señales discretas son fáciles y seguros, hace que el estudio y análisis de este tipo de sistemas hayan tomado hoy en día tanta importancia dentro del campo de la Ingeniería de Control. Los pasos más importantes en el análisis de un sistema con información discretas son: a) la descripción matemática del proceso de obtención de la señal discreta; b) la descripción matemática del proceso de reconstrucción de la información recibida; c) la relación entre las variables de excitación (entrada) y de salida del sistema, mediante un método operacional conocido bajo el nombre de transformación Z.

2.- El proceso de obtención de la señal discreta. En la figura 1 se representa esquemáticamente el proceso de obtención de la señal discreta.

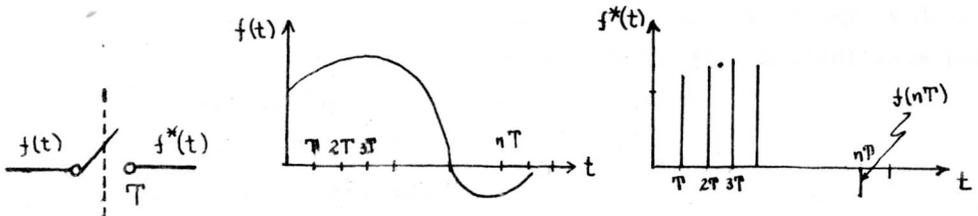


Figura 1

La función $f(t)$ es pasada por un interruptor, el cual cierra por un espacio muy corto de tiempo cada T segundos. La salida del interruptor nos dará una señal discreta, la cual denotaremos por $f^*(t)$. Debe anotarse que esto es solamente una representación esquemática del proceso, y que por consiguiente, el mecanismo que produce el muestreo de $f(t)$ puede ser de tipo mecánico, electrónico, o aún puede no existir, en el sentido de que la función que nos interese ya venga en forma discreta (como en el caso de un radar o de un computador digital). El intervalo T es en general constante, aunque existen hoy en día teorías matemáticas para manejar el caso en el cual él es variable. En este artículo nos limitaremos únicamente al primer caso.

La función que aparece en la figura 1 es una idealización del caso real, ya que en la práctica el interruptor permanece cerrado durante un intervalo de tiempo ϵ . En otras palabras, la función $f^*(t)$ consiste en la realidad de una sucesión de escalones finitos de duración ϵ cada T segundos. El análisis de señales discretas del tipo anterior presenta dificultades y, por otra parte, en la práctica no aporta mayor beneficio a la solución del problema. Por esta razón nos reduciremos a considerar que $f^*(t)$ consiste de una sucesión de impulsos de magnitudes $f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots$. Para expresar matemáticamente $f^*(t)$ definimos la función transportadora $\delta_T(t)$ mediante la fórmula:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1)$$

Debe entenderse aquí, que la función $\delta(t)$ es la función de DIRAC, conocida también como la función impulso unitario. La figura 2 muestra una

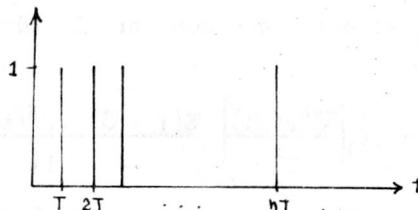


Figura 2

representación gráfica de la función $\delta_T(t)$; por tanto,

$$f^*(t) = \delta_T(t)f(t) \quad (2)$$

o también,

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT). \end{aligned} \quad (3)$$

Como $e^{-\alpha s}$ es la transformada de LAPLACE de $\delta(t - \alpha)$, tenemos

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (4)$$

Si llamamos $F^*(s)$ la transformada de Laplace de $f^*(t)$, es fácil obtener de (4) que

$$\mathcal{L}[\delta_T(t)] = \Delta_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = (1 - e^{-Ts})^{-1}. \quad (5)$$

3.- Reconstrucción de la señal recibida en forma discreta. Una vez recibida la señal discreta, es necesario, en muchos casos, convertirla en una función continua. Este problema ha sido bastante estudiado, y una descripción completa de él se sale de los límites de este artículo. Sin embargo, haremos un breve resumen del método seguido. El proceso general consiste en extrapolar una señal, con base en la información obtenida anteriormente en forma discreta. Naturalmente, esto requiere que se asuma a priori la clase de función que mejor se ajusta a la función que va a reconstruirse. En general, una extrapolación polinómica de orden cero ó orden uno es, en muchos casos, aceptable; sin embargo, puede ocurrir que sea necesario obtener aproximaciones de orden mayor. En la figura 3 puede verse la reconstrucción de orden cero y de orden uno de una función $r(t)$. Es sencillo probar que para el caso de orden m ; la fórmula de extrapolación polinómica está dada por

$$r(nT + \tau) = \sum_{i=0}^m \left[\frac{\nabla^i r(nT)}{T^i} \right] \frac{\tau(T + \tau) \dots [(i-1)T + \tau]}{i!} + r(nT) \quad (6)$$

$0 \leq \tau < T$

Así, por ejemplo, para el caso de orden cero, $r(nT + \tau) = r(nT)$, $0 \leq \tau < T$,

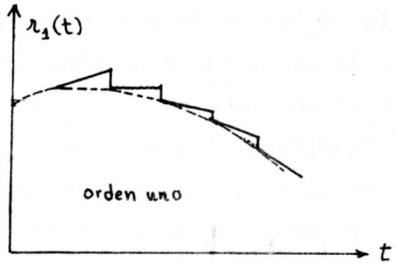
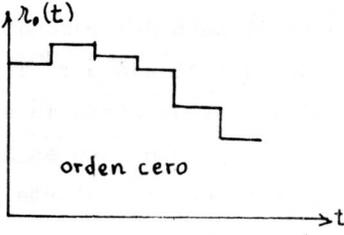
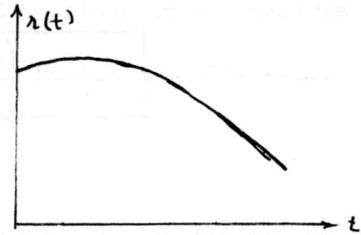
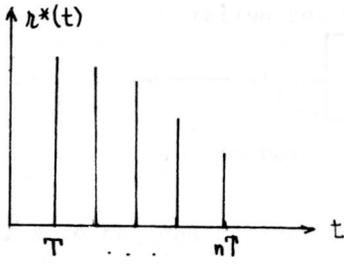


Figura 3

o, lo que es equivalente,

$$r_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{u(t - nT) - u[t - (n+1)T]\} r(nT) \quad (7)$$

Por lo tanto,

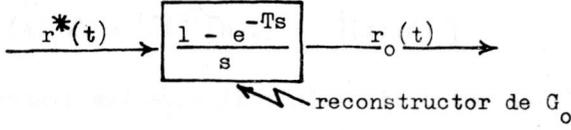
$$\mathcal{L}[r_0(t)] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} r(nT) \right] ;$$

si $r(t) = \delta(t)$, entonces

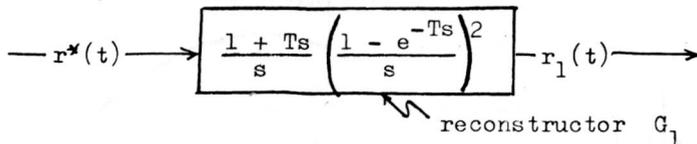
$$\mathcal{L}[r_0(t)] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = G_0(s)$$

(función de transferencia).

En forma de diagrama se tiene que



En forma similar, la reconstrucción de orden uno sería:



Fuera de las extrapolaciones polinómicas, también son posibles las de tipo exponencial, las cuales se basan principalmente en el desarrollo en serie de $G_m(s)$ y la posterior eliminación de términos de exponentes muy grandes de la dicha expansión. Por ejemplo, para el caso del reconstructor polinómico de orden cero, $G_0(s)$, éste puede ser aproximado por $T(1+Ts)^{-1}$, y esta función de transferencia puede ser simulada por un circuito eléctrico con un condensador y una resistencia. En las aplicaciones en las cuales T es pequeño, los circuitos de este tipo se están bastante indicados.

3.- La transformación Z. Hemos visto en el numeral 2, ecuación (4), cómo la transformada de Laplace de la función $f^*(t)$ viene dada por

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs}$$

La aparición de s en la forma e^{Ts} sugiere el cambio de variable $e^{Ts} = z$. Así tendremos

$$F^*(s) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (8)$$

$F(z) = Z[f^*(t)]$ se denomina la transformada Z de la función $f^*(t)$. Las características de la transformación Z pueden analizarse como sigue:

$$f^*(t) = \delta_T(t) f(t)$$

$$\mathcal{L}[\delta_T(t)] = (1 - e^{-Ts})^{-1} = \Delta_T(s)$$

Usando el teorema de multiplicación real para las transformadas de Laplace, tenemos:

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \mathcal{L}[f(t)\delta_T(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[\delta_T(t)]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) \Delta_T(s-p) dp \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \frac{F(p) dp}{1-e^{-T(s-p)}}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

donde $\rho_f < a < \text{Re}(s)$ y ρ_f es la abscisa de convergencia de $f(t)$.

La evaluación de la integral (9) se hace mediante una integral de contorno, cerrando la trayectoria de integración en el lado izquierdo o en el lado derecho del plano y evaluando los residuos en los diferentes polos encerrados. (Es de anotar que en los casos ordinarios, los polos de $F(p)$ están situados en el lado izquierdo del plano p .) Los polos de $1-e^{-T(s-p)}$ ocurren en los puntos

$$p = s + \frac{2\pi n}{T} j, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

por lo tanto, si la trayectoria de integración está cerrada por la derecha, incluiremos sólo un número infinito de polos, mientras que si la trayectoria está cerrada por la izquierda, sólo se incluirá un número finito de polos (figura 4).

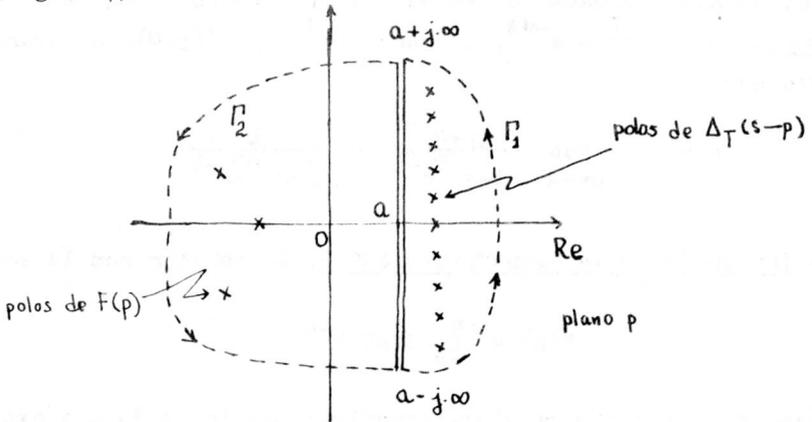


Figura 4

Usando el contorno Γ_1 , tenemos:

$$F^*(s) = -\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{F(p) dp}{1-e^{-T(s-p)}}$$

$$= -\sum_{(A_T)} \text{res} \frac{F(p)}{1-e^{-T(s-p)}}$$

luego:

$$F(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(s + \frac{2\pi n}{T} j\right) \quad (10)$$

Usando el contorno Γ_2 , tenemos

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{F(p) dp}{1-e^{-T(s-p)}} = \sum_{(F)} \text{res} \frac{F(p) dp}{1-e^{-T(s-p)}} \quad (11)$$

Usando la variable z , tenemos

$$F(z) = \sum_{(F)} \text{res} \frac{F(p)}{1-e^{pT}z^{-1}} \quad (12)$$

De la ecuación (12) puede deducirse que si $F(p)$ tiene un número finito de polos, la transformada Z es una función racional en z^{-1} (o en z).

Ejemplo. Si $f(t) = e^{-\alpha t}$, entonces $F(p) = 1/(p+\alpha)$. La transformada Z será entonces

$$F(z) = \text{res}_{p=-\alpha} \frac{(p+\alpha)^{-1}}{1-e^{pT}z^{-1}} = \frac{1}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}}$$

5.- Inversión de la transformación Z . De acuerdo con la ecuación (8)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

El proceso de inversión requiere encontrar una relación que exprese de manera explícita $f(kT)$. Multiplicando por z^{k-1} en (8), obtenemos

$$F(z).z^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n+k-1} = f(0)z^{k-1} + f(T)z^{k-2} + \dots$$

Y aplicando el teorema de la integral de CAUCHY, encontramos

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz = f(kT), \quad k=0,1,2,\dots \quad (13)$$

donde Γ encierra todos los polos de $F(z)z^{k-1}$. Normalmente, si el sistema es estable, los polos de $F(z)$ estarán incluidos dentro o sobre la circunferencia $|z| = 1$, lo cual hace que generalmente se tome esta curva como Γ . La fórmula (13) nos proporciona la relación necesaria para la inversión de $F(z)$.

Ejemplo. Sea

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}};$$

entonces,

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{z^k}{z - e^{-\alpha T}} dz = e^{-\alpha kT};$$

es decir,

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} \delta(t - nT)$$

En muchas situaciones prácticas, en las cuales sólo es necesario el conocimiento de unos pocos términos de la serie representativa de $f^*(t)$, puede utilizarse el método de división de fracciones parciales. Así, por ejemplo, si

$$F(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots,$$

tenemos

$$f^*(t) = q_0 \delta(t) + q_1 \delta(t-T) + q_2 \delta(t-2T) + \dots$$

Ejemplo. Si $F(z) = 1/(1 - (0,2)z^{-1})$, y si efectuamos la división indicada tenemos

$$F(z) = 1 + (0,2)z^{-1} + (0,04)z^{-2} + (0,008)z^{-3} + \dots$$

y por consiguiente:

$$f^*(t) = 1 \cdot \delta(t) + (0,2)\delta(t-T) + (0,04)\delta(t-2T) + \dots$$

En este punto es interesante anotar que una de las grandes ventajas del uso de la transformación Z es que su inversión (de acuerdo con lo anterior) puede efectuarse numéricamente.

6.- Algunos teoremas sobre la transformación Z . a) Adición: Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones que admiten transformaciones de Laplace, entonces:

$$Z[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z)$$

En efecto: por definición,

$$\begin{aligned} Z[f_1(t) \pm f_2(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} [f_1(nT) \pm f_2(nT)] z^{-n} \\ &= F_1(z) \pm F_2(z). \end{aligned}$$

b) Multiplicación por una constante: $Z[af(t)] = a.F(z)$, donde a es una constante.

c) Traslación real: $Z[f(t-nT)] = z^{-n}F(z)$, donde n es un entero.

En efecto: por definición,

$$Z[f(t-nT)] = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT-nT)z^{-m} = z^{-n} \sum_{k=-n}^{\infty} f(kT)z^{-k};$$

pero $\sum_{k=-n}^{\infty} f(kT)z^{-k} = 0$, luego $Z[f(t-nT)] = z^{-n}F(z)$.

d) Traslación compleja: $Z[e^{-at}f(t)] = Z[F(s+a)] = F(ze^{aT})$, donde $F(z) = Z[f(t)]$.

Por definición,

$$Z[e^{-at}f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT}f(nT)z^{-n};$$

llamando $y = e^{aT}z$, tenemos

$$Z[e^{-at}f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)y^{-n} = F(y) = F(ze^{aT})$$

e) Valor inicial: $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(z)$

$$F(z) = f(0)z^0 + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

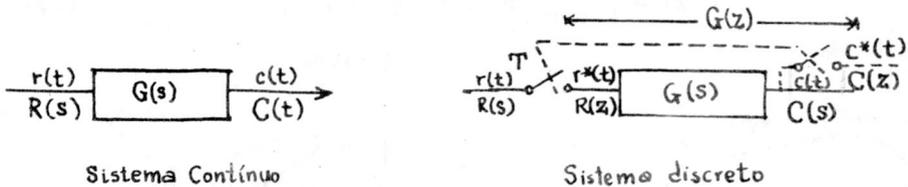
Por consiguiente: $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$

f) Valor final: $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z)$

7.- Función de transferencia discreta. Para un sistema con operación continua, las características del sistema están representadas por una función de transferencia

$$G(s) = C(s)/R(s) \quad (14)$$

Esta función de transferencia es la transformada de Laplace de la función de salida correspondiente a una excitación de impulso $\delta(t)$. Para un sistema con información discreta, existe una función análoga, la cual



Sistema Continuo

Sistema discreto

Figura 5

Figura 6

llamaremos función de transferencia discreta. Llamando $g(t)$ a la función de salida correspondiente a un impulso $\delta(t)$, podremos escribir

$$c_o(mT) = r(0) \cdot g(mT)$$

que nos es otra cosa que la salida en el tiempo mT debida a una excitación en el tiempo 0, $r(0)\delta(t)$. En general, $c_n(mT)$ es la salida en el tiempo mT debida a una excitación en el tiempo nT , $r(nT)\delta(t-nT)$; $c_n(mT) = r(nT)g(mT-nT)$ (figura 7). Por tanto, la salida total en el tiempo mT debida al tren $r^*(t)$ será:

$$c(mT) = \sum_{n=0}^m r(nT)g(mT-nT) \quad (15)$$

como $g(t-pT) = 0$ para $pT > t$, tenemos

$$c(mT) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)g(mT-nT) \quad (16)$$

Ahora, por definición

$$c^*(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C(mT) \delta(t-mT),$$

y

$$C(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c(mT) z^{-m}.$$

Por tanto,

$$c(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) g(mT-nT) z^{-m},$$

y haciendo $k = m-n$, tenemos $C(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) z^{-n} g(kT) z^{-k}$, y como $g(kT) = 0$ para $k < 0$, entonces

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) z^{-n} g(kT) z^{-k}. \quad (17)$$

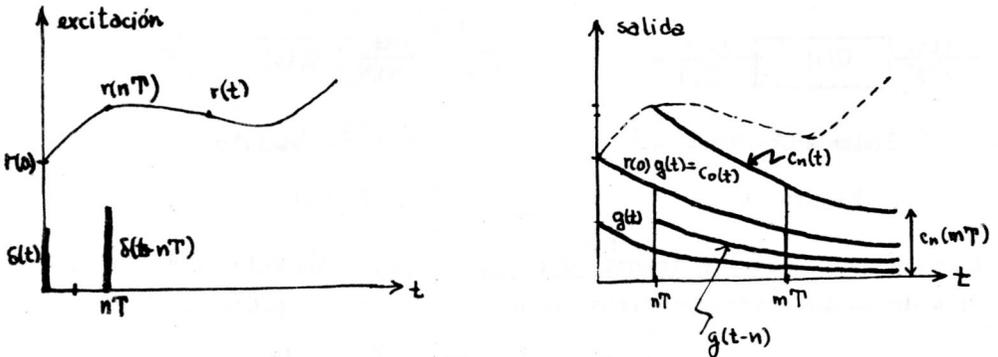


Figura 7
generación de $c^*(t)$

La suma (17) puede ser separada en una suma en k y otra en n , con lo cual

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) z^{-n} = G(z)R(z). \quad (18)$$

Ejemplo: Si $G(s) = 1/(s+a)$ y $g(t) = e^{-at}$, entonces

$$G(z) = 1/(1-e^{-dT} \cdot z^{-1}).$$

Si la excitación es una función unidad $u(t)$, entonces $R(s) = 1/s$, y $R(z) = 1/(1-z^{-1})$; luego $C(z) = 1/(1-e^{-dT} \cdot z^{-1})(1-z^{-1})$. Invertiendo,

$$c(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1} dz}{(1 - e^{-aT} z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{n+1}}{z - e^{-aT}} + \lim_{z \rightarrow e^{-aT}} (z^{n+1}/(z-1))$$

Por consiguiente:

$$c(nT) = \frac{1 - e^{-aT(n+1)}}{1 - e^{-aT}} = 1 + e^{-aT} + \dots + (e^{-aT})^n$$

La deducción de (18) se basa en la hipótesis de que un elemento continuo está colocado entre $r^*(t)$ y $c^*(t)$. Sin embargo, podría ocurrir que en vez de un elemento continuo, tuviésemos uno digital (por ejemplo, un computador que efectúe operaciones aritméticas sobre una información discreta). Aún en estos casos es posible definir una función de transferencia, como lo veremos en lo que sigue.

El caso más corriente es averiguar la salida en el instante $C(nT)$ con base de combinaciones lineales de excitaciones y salidas previas. Así,

$$c(nT) + \sum_{i=1}^k b_i c((n-i)T) = \sum_{i=0}^m a_i r((n-i)T).$$

Multiplicando por z^{-n} , tenemos

$$c(nT)z^{-n} + \sum_{i=1}^k b_i c((n-i)T)z^{-(n-i)} z^{-i}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m a_i r((n-i)T) z^{-(n-i)} z^{-i}$$

(teniendo en cuenta que $c(t) = 0$ para $t < 0$); es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(nT)z^{-n} + \sum_{p=i}^{\infty} \sum_{i=1}^k b_i c(pT)z^{-p} z^{-i} = \sum_{p=-i}^{\infty} \sum_{i=0}^m a_i r(pT)z^{-p} z^{-i}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(nT)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c(nT)z^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n} \sum_{i=0}^k a_i z^{-i}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c(nT)z^{-n} \right) (1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n} \right) (a_0 + \dots + a_m z^{-m})$$

luego:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}} \quad (19)$$

Definimos $D(z)$ como la función de transferencia del computador digital.

Ejemplo: Integración numérica. Queremos encontrar la integral de la función $x(t)$ en el intervalo $[0, t_0]$:

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) d\lambda$$

Hagamos:

$$\begin{aligned} y(nT) &= \int_0^{(n-1)T} x(\lambda) d\lambda + \int_{(n-1)T}^{nT} x(\lambda) d\lambda \\ &= y((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} x(\lambda) d\lambda \\ &= y((n-1)T) + (nT - (n-1)T)x(t'_n) \end{aligned}$$

donde $(n-1)T \leq t'_n \leq nT$, en virtud del teorema del valor medio para las integrales. Por consiguiente:

$$y(nT) = y((n-1)T) + T \cdot x(t'_n)$$

y

$$y(nT)z^{-n} = y((n-1)T)z^{-(n-1)}z^{-1} + T \cdot x(t'_n)z^{-n}$$

de donde

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} y((n-1)T)z^{-(n-1)}z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} T x(t'_n)z^{-n} \\ &= \sum_{p=-1}^{\infty} y(pT)z^{-p}z^{-1} + T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x(t'_n)z^{-n}; \quad (20') \end{aligned}$$

pero $y(t) = 0$ para $t < 0$, luego $y(-T) = 0$. Por consiguiente:

$$\sum_{p=-1}^{\infty} y(pT)z^{-p} = \sum_{p=0}^{\infty} y(pT)z^{-p} = \sum_{p=0}^{\infty} y(nT)z^{-n}. \quad (20)$$

Reemplazando en (20'), tenemos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} y(nT)z^{-n} \right) (1-z^{-1}) = T \sum_{n=0}^{\infty} x(t'_n)z^{-n}$$

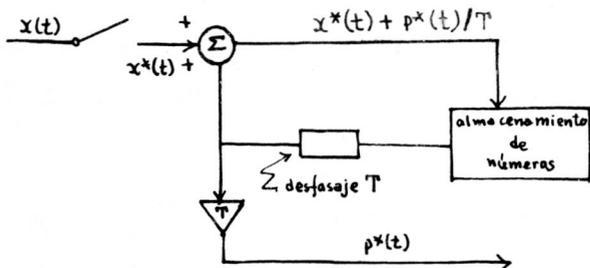
y

$$Y(z) = \frac{T}{1-z^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} x(t'_n) z^{-n} \quad (21)$$

Es evidente que t'_n depende de $x(\lambda)$, de T y de n ; sin embargo, para T pequeño, $x(t'_n)$ puede ser aproximado por alguna de las fórmulas de extrapolación. Así tendremos de (2), y usando $x(t'_n) \cong x((n-1)T)$,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{T}{1-z^{-1}} \sum_{n=-1}^{\infty} x(nT) z^{-n-1} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \\ &= \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} X(z): \end{aligned}$$

Por consiguiente: $D(z) = Y(z)/X(z) = Tz^{-1}/(1-z^{-1})$ es la función de transferencia en este caso. Nótese que si se usa $x(t'_n) \cong x(nT)$, entonces $y(0) = 0 + Tx(0) \neq 0$, lo cual no está de acuerdo con la figura 1. (Sería entonces necesario corregir la relación de recurrencia mediante la condición inicial $x(0)$.) Mostramos en la figura 9 la implementación necesaria para un computador digital para integración numérica:



$$T(x^*(t-T) + p^*(t-T)/T) = p^*(t); \text{ por consiguiente,}$$

$$p^*(t) = p^*(t-T) + Tx^*(t-T) \Rightarrow p^*(t) = y^*(t)$$

Figura 9

BIBLIOGRAFIA

- [1] RAGAZZINI-FRANKLIN : Sampled-Data Control Systems, New York: McGraw-Hill, 1958.
- [2] BENJAMIN, K.: Automatic Control Systems, New York: Prentice-Hall, 1962.

- [4] MURPHY, G.: Control Engineering, Princeton: Van Nostrand Co., 1959.
- [5] CHURCHILL, R.: Operational Mathematics, New York: McGraw-Hill, 1958.
- [6] NEHARI, Z.: Complex Analysis, New York: Allyn and Bacon, 1961.

(Recibido octubre 1964)

Facultad de Ingenieria
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E.