## 18. USO DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE EN INTEGRALES IMPROPIAS

Definición:

Sea $f$ una función de $t$.

La transformada de Laplace de esta función se define por la relación:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, la transformada inversa viene dada por la relación:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

Usando estas relaciónes es fácil conseguir:

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \therefore \quad \operatorname{sen}\omega t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]$$

$$\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad \therefore \quad \cos\omega t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\right]$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a} \quad \therefore \quad e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right]$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a} \quad \therefore \quad e^{-at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right]$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad \therefore \quad 1 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]$$

Ejemplo 1. Sea calcular la integral: $I = \int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}x}{x^2+a^2}\,dx$

Convertimos esta integral en una función de $t$, así:

$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}tx}{x^2+a^2}\,dx$. Tomando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} tx}{x^2+a^2} e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2} \int_0^\infty \operatorname{sen} tx\, e^{-pt} dt\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2} \mathcal{L}[\operatorname{sen} tx] dx = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2} \frac{x}{p^2+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(p^2+x^2)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^2}{p^2-a^2} \left[\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+p^2}\right] dx = \frac{1}{p^2-a^2} \int_0^\infty \left[\frac{x^2}{x^2+a^2} - \frac{x^2}{x^2+p^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{p^2-a^2}\left[x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} - x + p\tan^{-1}\frac{x}{p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p^2-a^2}\left[p\tan^{-1}\frac{x}{p} - a\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^\infty = \frac{1}{p+a}\cdot\frac{\pi}{2} \;;$$

luego

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \frac{1}{p+a}\cdot\frac{\pi}{2} \;;$$

tomando Laplace inversa se obtiene:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} e^{-at},$$

$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} tx}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-at}$. Haciendo, $t = 1$ resulta:

$$I = \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

Ejemplo 2. Calcular : $I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x} dx \quad \therefore \quad \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x} dx\right] e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} tx\, dt\right] dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\frac{x}{p^2+x^2}\right] dx = \int_0^\infty \frac{dx}{p^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{p}\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \;;$$

luego $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ; haciendo $t = 1$ se obtiene:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

__Ejercicios__ __de__ __aplicación__:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{2}(1-e)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos 2tx}{x^2}\,dx = \pi t$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a}$$

NOTA: El ejemplo 2. es mas fácil por este método que usando los conocimientos de polos y residuos estudiados en variable compleja.

Recibido julio 1966

RICARDO PLATA T.