19. ADVERTENCIA SOBRE LAS INTEGRALES IMPROPIAS Y EL PORQUE DE CIERTAS HIPOTESIS EN ALGUNOS TEOREMAS SOBRE TRANSFORMACIONES DE LAPLACE

ADVERTENCIA: Es falso que:

$$\text{«} \int_{a^+}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{converge} \implies \lim_{t \to +\infty} = 0 \text{»}$$

Veamos para ello dos ejemplos:

EJEMPLO 1.- Consideremos la función f definida por, (en $]0,\infty[$)

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2, & \text{si } t \neq 1, 2, \dots n, \dots \\ 1, & \text{si } t = 1, 2, \dots n, \dots \end{cases}$$

La función es discontinua en los puntos $t = 1,2,\ldots,n,\ldots,$ - pero la integral impropia $\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ converge hacia 1; sin embargo $\lim_{t\to\infty} f(t)$ no existe

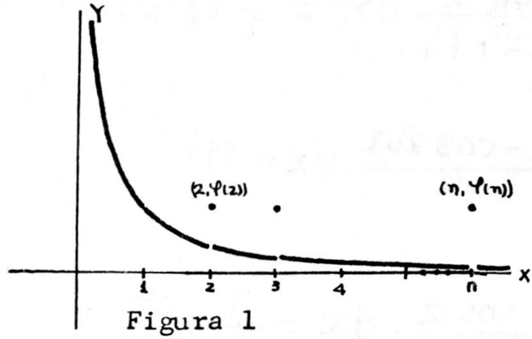

Figura 1

EJEMPLO 2.- Hagamos [W]

$$g(t)=\begin{cases} 1-|t|, & \text{si } 0\leq |t| \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1\leq |t| \leq \infty \end{cases}$$

y pongamos $f(t) = \sum_{k=2}^{\infty} g\left[k^2(t-k)\right]$. Es fácil ver que el gráfico de $f(t)$ en la vecindad de $t=n$, entero≥ 2, es tal como aparece en la figura 2.

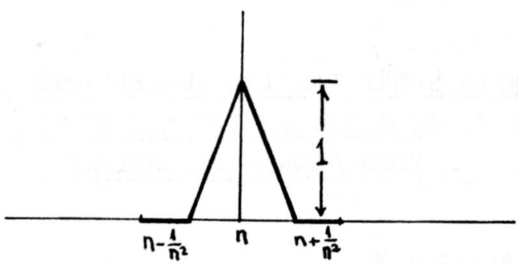

Figura 2

Ahora bien

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} g[k^2(t-k)]dt = \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^{\infty} g(k^2(t-k)dt$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-1}^{1} g(\eta)\,d\eta.$$

haciendo el cambio de variable $\eta = k^2(t-k)$. Luego

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) - 1$$

donde $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, $s \geqslant 2$ es la función ζ de Riemann.

En el segundo ejemplo la función f es continua; vemos pues que la hipótesis de continuidad no mejora la situación. Aún la derivabilidad es insuficiente, como lo muestra una función f que en una vecindad del punto $t = n$ (n entero) sea de la forma que aparece en la figura 3, donde h es la función del ejemplo 2.

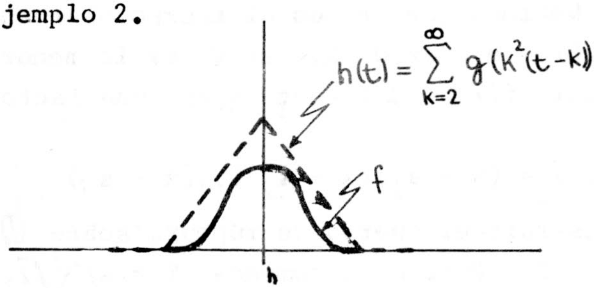

Figura 3

Esta es la razón por la cual la hipótesis $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-st}\varphi(t) = 0$ es necesaria en teoremas como el siguiente:

<u>Si φ es una función que admite una derivada continua en el intervalo $0 \leqslant t < \infty$, si $f(s) = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$ es su transformación de Laplace</u> ($s > s_c$, <u>donde s_c es la abscisa de convergencia</u>), y <u>si</u> $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-st}\varphi(t) = 0$ ($s > s_c$), <u>entonces</u>

$$\mathcal{L}\{\varphi'(t)\} = -\varphi(0) + s f(s) \qquad (s > s_c)$$

(Cf. [W], pag. 377, sgs.)

BIBLIOGRAFIA: [W] Advanced Calculus, WIDDER, D.V. Prentice - Hall (1959).

Recibido agosto 1966

Alumnos de Cálculo Avanzado 1966
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional