20.- CONSTRUCCION DEL CUERPO DE ROTURA DEL POLINOMIO $f(x)=x^5 - 2$

Fijamos primero algunas notaciones. Si S es un subconjunto de un cuerpo P, el cual es una extensión de un cuerpo Φ, entonces $\Phi[S]$ y $\Phi(S)$ denotan respectivamente la sub-álgebra de P y el sub-cuerpo de P sobre Φ generados por S. $\Phi[x]$ denota el anillo de los polinomios sobre Φ en la indeterminada x, y $(g(Y))$ denota el ideal de $\mathbb{Q}[Y]$ generado por $g(Y)$.

Recordatorio: Decimos que P es el cuerpo de rotura de un polinomio $f(x)$ sobre un cuerpo K, si P es la menor extensión de K para la cual $f(x)$ admite en $K[x]$ una factorización de la forma:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$$

Vamos ahora a construir el cuerpo de ruptura sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) = x^5 - 2$. Para ello tomemos $Y = x/\sqrt[5]{2}$, lo cual nos permite escribir:

$$\begin{aligned} x^5 - 2 &= 2(Y^5 - 1) \\ &= 2(Y - 1)(Y^4 + Y^3 + Y^2 + Y + 1) \qquad (1) \end{aligned}$$

Ahora bien ([2], chap.1 ,th.6), sabemos que existe el cuerpo de rotura P de $Y^5 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$. Es evidente que P_1 es el cuerpo de rotura de Y^5-1 si y sólo si P_1 es el cuerpo de rotura de $g(Y) = Y^4 + Y^3 + Y^2 + Y + 1$. Mostremos ahora que $g(Y)$ es irreductible: el cambio de variable $Z = Y - 1$, nos permite escribir:

$$g(Y) = \frac{Y^5 - 1}{Y - 1} = \frac{(Z+1)^5 - 1}{Z} \tag{2}$$

$$= Z^4 + 5Z^3 + \frac{5.4}{1.2}Z^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}Z + 5$$

Si $p = 5$, vemos que el polinomio que se encuentra en el miembro derecho de (2), satisface las condiciones necesarias para aplicar el criterio de EISENSTEIN(1 ,chap.4,ex.2,3,pag.127 Luego $g(Y)$ es irreductible. Por consiguiente, $P_1 = \mathbb{Q}[Y]/(g(Y))$ es un cuerpo, el cual puede ser considerado como el sobre-cuerpo de $\mathbb{Q}$ generado por $\mathbb{Q}$ y e, donde $e = Y + (g(Y))$, yaı que $g(e)=0$, y escribir $P_1 = \mathbb{Q}(e)$. Como $g(e) = 0$, tenemos $e^5 -1 = 0$, y como $e \neq 1$, resulta que e es un elemento de orden 5 en el grupo multiplicativo P_1^* ; de esto concluímos que $1, e, e^2, e^3, e^4$ son raíces distintas de $Y^5 - 1$. Se ve enseguida que P_1 es el cuerpo de rotura de $g(Y)$ sobre $\mathbb{Q}$, ya que admite la factorización siguiente:

$$g(Y) = (Y - e)(Y - e^2)(Y - e^3)(Y - e^4)$$

en $P_1 = \mathbb{Q}(e)$, y es la extensión menor que satisface estas condiciones, puesto que $g(Y)$ es irreductible en $\mathbb{Q}$, y el conjunto de generadores de P_1 ha sido obtenido aumentando $\mathbb{Q}$ en un único elemento.

En estas condiciones, $\mathbb{Q}(e)$ puede ser conisderado como un álgebra sobre $\mathbb{Q}$ generada por un único elemento cuyo polinomio minimal es $g(Y)$, el cual es de grado 4; podemos afirmar pues que $\mathbb{Q}(e)$ es de dimensión 4 sobre $\mathbb{Q}$. Podemos ver también que

$$x^5 - 2 = 2(Y^5 - 1)$$

$$= (aY - a)(aY - ae)(aY - ae^2)(aY - ae^3)(aY - ae^4)$$

$$= (x - a)(x - ae)(x - ae^2)(x - ae^3)(x - ae^4)$$

donde $a = \sqrt[5]{2}$, lo cual muestra que $x^5 - 2$ es irreductible en P_1 ya que a, a^2, a^3, a^4 no pertenecen a P_1. Por un razonamiento similar vemos que $P = P_1[x]/(x^5 - 2)$ es un cuerpo: $P = P_1(\sqrt[5]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, e)$, ya que $f(\sqrt[5]{2}) = 0$; evidentemente P es el cuerpo de rotura de d $f(x)$ sobre P_1.

Puesto que $R_o \subset P_1 \subset P$, y P es el cuerpo de rotura de $f(x)$ sobre P_1, por el teorema de transitividad, P es el cuerpo de rotura de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$. La dimensión de P sobre P_1 es igual al grado de $x^5 - 2$, y recordando que la dimensión de P_1 sobre $\mathbb{Q}$ es 4, conccluímos finalmente que la dimensión de P_1 sobre $\mathbb{Q}$ es 20.

Nota: En vsita del teorema fundamental de la Teoría de Galois, y del hecho de que la característica de $\mathbb{Q}$ es 0 implica la separabilidad de $x^5 - 2$, podemos asegurar que P es una extensión galuasiana.

BIBLIOGRAFIA: [1] JACOBSON, N.: Lectures in abstract algebra, vol. 1, Princeton: Van Nostrand, 1959

[2] —————: Lectures in abstract algebra, vol. 3, Princeton: Van Nostrand, 1960.

Recibido agosto 1966

OTTO RAUL RUIZ
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de C.