Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 231-233

RANGO NUMÉRICO DE PRODUCTOS CONMUTATIVOS

RAO DUGGIRALA K.

Universidad del Valle, Cali

El rango numérico de un operador lineal T en un espacio de Hilbert H con producto interno $< , >$ es el subconjunto de $\mathbf{C}$ dada por

$$W(T) = \{< T\,x,\ x >, \|x\| = 1\}.$$

El radio numérico de T está definido por

$$w(T) = \sup\{|\lambda|.\ \lambda \in W(T)\}.$$

Cuando dos operadores lineales y acotados A y B conmutan. se conjetura que

$$w(AB) \leq w(A)\|A\|\ . \tag{1}$$

Muller (1988) demostró que la desigualdad (1) no es válida en general, sin condiciones adicionales sobre A y B. Bouldin (1971) demostró que la desigualdad (1) es válida cuando B conmuta adicionalmente con A^*A o AA^*. Si A es normal, por el Teorema de Fuglede (1950) B conmuta con A^* y, consecuentemente, con A^*A y AA^*. No se conocen otras condiciones suficientes para la validez de (1). Otros resultados interesantes fueron obtenidos por Holbrook (1971), Okubo y Ando (1976).

En esta nota utilizaremos la teoría de las dilaciones para demostrar que la condición $A^2 = \alpha I$ donde $\alpha \in \mathbf{C}$ es suficiente para obtener la desigualdad (1).

La motivación para la condición $\alpha I = A^2$ viene de las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

$b, c \in \mathbf{C}$, utilizadas en la simplificación de varias demostraciones en dimensión finita como la de la convexidad de $W(T)$ en el análisis matricial (Horn y Johnson, 1988).

Teorema. *Sean A y B operadores lineales acotados, $AB = BA$ y $A^2 = \alpha I$, donde $\alpha \in \mathbf{C}$. Entonces $w(AB) \leq w(B)||A||$.*

Demostración. Supongamos que $||A|| < 1$ y $w(B) = 1$. Sea K el espacio de Hilbert obtenido a partir de H con producto interno $< \, , >_k$ dada por

$$< x, \; y >_K = < Dx, \; Dy > \qquad \text{donde} \quad D^2 = I + A^*A + A^{*2}A^2 + \dots$$

Sea L la suma directa $K \oplus K \oplus \dots$ Definimos los siguientes operadores en L.

$$S(f_1, f_2, f_3 \dots) = (Af_1, D^{-1}f_1, f_2, f_3, \dots)$$
$$T(f_1, f_2, f_3, \dots) = (Bf_1, D^{-1}BDf_2, D^{-1}BDf_3, \dots) .$$

Obsérvese que S es una isometría en L y $ST = TS$.

Obsérvese también que

$$\langle DBf, Df \rangle = \left\langle D^2Bf, f \right\rangle = \langle Bf, f \rangle + \langle BAf, Af \rangle + \dots$$

y, consecuentemente ,

$$|\langle BDf, Df \rangle| \leq \langle Df, Df \rangle .$$

Como el radio numérico de T es el supremo de los radios numéricos en las componentes, obtendremos $W_L(T) \leq 1$. En estas condiciones podemos asegurar que $W_L(ST) \leq 1$ (Bouldin (1971)).

Elaborando $\langle STg, g \rangle$, donde $g = (f_1, f_2, \dots)$, obtenemos

$$|\left\langle D^2ABf_1, f_1 \right\rangle + \langle Bf_1, Df_2 \rangle + \langle Bf_2, Df_3 \rangle + \dots| \leq ||Df_1||^2 + ||Df_2||^2 + \cdots$$

Tomando $0 = f_3 = f_4 = \cdots$,

$$Df_2 = A^*(I - A^*A + A^{*2}A^2 - A^{*3}A^3 + \cdots)f_1$$

obtendremos

$$|\left\langle (I + A^*A + A^{*2}A^2 + \cdots)ABf_1, f_1 \right\rangle + \left\langle (I - A^*A + A^{*2}A^2 + \cdots)ABf_1, f_1 \right\rangle |$$
$$\leq ||Df_1||^2 + ||Df_2||^2 .$$

Ahora

$$\begin{aligned} ||Df_2||^2 &= ||A^*(I - A^*A + A^*A - \cdots)f_1||^2 \\ &\leq ||(I - A^*A + A^{*2}A^2 \cdots)f_1||^2 \\ &\leq \left\langle (I - A^*A + A^{*2}A^2 - \cdots)f_1, f_1 \right\rangle \; ; \end{aligned}$$

como operador autoadjunto $I - A^*A + A^{*2}A^2 \cdots$ cumple la desigualdad

$$I - A^*A + A^{*2} - \dots \leq I .$$

Como $A^2 = \alpha I$, $\quad |\alpha| < 1$ y, consecuentemente,

$$(1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + \cdots) \, |\langle ABf_1, f_1 \rangle| \leq (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + \cdots) \, \langle f_1, f_1 \rangle .$$

Utilizando la continuidad del producto interno $\langle , \rangle$ podemos asegurar que

$$|\langle ABf_1, f_1 \rangle| \leq \langle f_1, f_1 \rangle$$

cuando $||A|| \leq 1$.

REFERENCIAS

1. R. Bouldin, *The Numerical Range of a product*, J. Math. Anal. Appl. **33** (1971), 212–219.
2. B. Fuglede, *A Commutativity Theorem for Normal Operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. **36** (1950), 35–40.
3. J.A.R. Holbrook, *Inequalities Governing the Operator Radii Associated with Unitary ρ-dilations*, Michigan Math. J. **18** (1971), 145–159.
4. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge. Univ. Press, New York, 1988.
5. V. Müller, *The Numerical Radius of a Commuting Product*, Michigan Math. J. **35** (1988), 255–260.
6. K. Okubo, T. Ando, *Operator Radii of Commuting Products*, Proc. Amer. Math. Soc. **56** (1976), 203–210.

(*Recibido en septiembre de 1992; la versión revisada en abril de 1993*)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL VALLE, APARTADO AÉREO 2188, CALI - COLOMBIA