Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 235-247

SOBRE EL TEOREMA DE INTERPOLACIÓN DE BOREL EN ESPACIOS DE HILBERT

MANUEL VALDIVIA (*)

Facultad de Matemáticas, Burjasot (Valencia)

ABSTRACT. Let X be a real Hilbert space. If A_0 is a real number and A_m is a real symmetric and continuous m-form defined on X^m, $m = 1, 2, \ldots$, we construct a real function f on X of class C^∞ such that $f^{(m)}$ is bounded in the bounded sets of X, $f^{(m)}(0) = A_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, and f is analytic in $X \setminus \{0\}$.

§1. NOTACIONES E INTRODUCCIÓN

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son los cuerpos de los números reales y complejos, respectivamente; $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números enteros no negativos.

Denotamos por $\|.\|$ la norma de cualquier espacio de Banach. Si X es un espacio de Hilbert, real o complejo, y n es un entero positivo, suponemos que la norma de X^n es la hilbertiana, es decir, para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de X^n, $x_j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, n$, escribimos

$$\|x\| := (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

En particular, si $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\|z\| = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Suponemos $\mathbb{R}^n$ sumergido, en la forma usual, en $\mathbb{C}^n$. Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ están en $\mathbb{C}^n$, entonces

$$u.v := u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n .$$

Si A es una forma n-lineal continua definida en X^n, ponemos $\widehat{A}$ para el polinomio n-homogéneo determinado por A, es decir, $\widehat{A}$ es la aplicación de X en el cuerpo sobre el cual está definido X de manera que

$$\widehat{A}(x) = A(x, x, \ldots, x), \; x \in X .$$

(*) **Subvencionado en parte por la DGICYT .**

Denotamos por sim A la forma simetrizada de A, o sea, si G es el grupo de todas las permutaciones de los elementos $1, 2, \ldots, n$, entonces, para $x_j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$(\text{sim } A)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \ldots \sigma_n \in G} A(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) .$$

Escribimos

$$\|A\| := \sup \{|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)| : \|x_j\| \leq 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\} ,$$

$$\|\widehat{A}\| := \sup\{x : \|x\| \leq 1\} .$$

Si α es un mulíndice de orden n, es decir, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $|\alpha|$ representa su longitud, o sea, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ y $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!$; dado el muliíndice $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, ponemos $\beta \leq \alpha$ cuando $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$; entonces

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!\, (\alpha - \beta)!} .$$

Si f es una función real definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y de clase C^∞, entonces

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} ,$$

para cada x de dicho abierto y cada multiíndice α; sop f es el soporte de f.

Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ y $P \subset \mathbb{R}^n$, $d(x, M)$ denota la distancia de x a M y $d(M, P)$ es la distancia entre los conjuntos M y P. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $x \in \Omega$, ponemos $B(x; \Omega)$ para la bola abierta en $\mathbb{C}^n$ de centro x y radio $\frac{1}{3} d(x, \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$. Escribimos

$$\Omega^* := \bigcup_{x \in \Omega} B(x; \Omega) .$$

Obviamente, Ω^* es un abierto de $\mathbb{C}^n$ que corta a $\mathbb{R}^n$ en Ω.

En [1], E. Borel prueba que si $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ es una sucesión de números reales, existe una función real f definida en $\mathbb{R}$ y de clase C^∞ tal que $f^{(n)}(0) = a_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Este resultado se puede extender a espacios de Hilbert reales en la siguiente forma:

. *Sea A_0 un número real y sea A_m una forma n-lineal, simétrica y continua definida en X^m, $m = 1, 2, \ldots$, siendo X un espacio de Hilbert real. Entonces existe una función real f definida en X y de clase C^∞ tal que $f^{(m)}(0) = A_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.*

La prueba dada en [2] de este enunciado, y que generaliza la demostración constructiva clásica para el caso en que X tenga dimensión finita, [4], equivale a lo siguiente: se toma una función real φ definida en $\mathbb{R}$ y de clase C^∞ de manera que su recorrido esté en $[0, 1]$, tenga soporte en $[-1, 1]$ y valga uno en un entorno del origen; si se elige $1 > \epsilon_m > 0$ de manera que $\epsilon_m \|\widehat{A}_m\|$ sea suficientemente pequeño, $m = 1, 2, \ldots$, se puede probar que

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\widehat{A}_m(x)}{m!} \varphi\left(\|\epsilon_m^{-1} x\|^2\right) , \quad x \in X ,$$

representa una función de clase C^∞ tal que $f^{(m)}(0) = A_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

La función f anterior tiene su soporte en la bola unidad cerrada de X y, por tanto, no es analítica en $X \backslash \{0\}$. Si la dimensión de X es finita, se puede obtener una función real g definida en X y de clase C^∞, analítica en $X \backslash \{0\}$, tal que $g^{(m)}(0) = A_m$, $m = 1, 2, \ldots$, utilizando el siguiente teorema de Whitney, [5]:

(a). *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea $K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_m \subset \ldots$ un sistema fundamental de compactos de Ω tal que K_m esté contenido en el $\overset{\circ}{K}_{m+1}$ de K_{m+1}, $m = 1, 2, \ldots$. Si f es una función real de clase C^∞ definida en Ω y $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \cdots > \epsilon_m > \ldots$ son números positivos, existe una función real analítica g definida en Ω tal que*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} g(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} \right| < \epsilon_m , \quad x \in \Omega \backslash K_m , \quad |\alpha| \leq m \quad m = 1, 2, \ldots .$$

En [3], se da una extensión parcial del resultado (a) cuando X tiene dimensión infinita, pero que no es suficiente para dar respuesta a la propiedad de Borel que estamos considerando. No obstante, nosotros, en el apartado 3, construiremos funciones que resuelven el teorema de Borel y que son analíticas en $X \backslash \{0)\}$. Para ello utilizamos una propiedad de aproximación que probaremos en el apartado 2.

§2. Una propiedad de aproximación

El lema contenido en este apartado es una modificación del resultado (a) de Whitney. Usaremos su demostración en el siguiente teorema, que se obtiene observando la prueba de [5, Lemma 5]:

(b). *Sea K un compacto de $\mathbb{R}^n$. Sea g una función real de clase C^∞ definida en $\mathbb{R}^n$. Si g tiene soporte compacto, dados un $\epsilon > 0$ y un entero positivo m, existe $\lambda_0 > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} g(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} f_\lambda(x)}{\partial x^\alpha}\right| < \epsilon \ , \ x \in K \ , \ |\alpha| \leq m \ \lambda \geq \lambda_0 \ ,$$

siendo

$$f_\lambda(z) \ := (\sqrt{\pi})^{-n} \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} g(t) e^{-\lambda^2 (t-z).(t-z)} dt \ , \ z \in \mathbb{C}^n \ .$$

Lema. *Sea $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_p \subset \ldots$ un sistema fundamental de compactos en un abierto no vacío Ω de $\mathbb{R}^n$ de manera que $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$. Sea g una función real de clase C^∞ definida en Ω. Si la distancia de K_1 a sop g es positiva, dados el número entero positivo r y los números positivos $\epsilon_0 > \epsilon_1 > \cdots > \epsilon_p > \ldots$ existe una función ψ holomorfa en Ω^* y real en Ω tal que*

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} \psi(x)}{\partial x^\alpha}\right| < \epsilon_0, \quad x \in K_1, \quad |\alpha| \leq r \ ,$$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} \psi(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} g(x)}{\partial x^\alpha}\right| < \epsilon_m \ , \quad x \in \Omega \backslash K_m \ , \quad |\alpha| \leq m + r \ , \quad m = 1, \ 2, \ \ldots \ ,$$

y, para cada compacto K contenido en K_1,

$$|\psi(x + iy)| < \epsilon_0 \ , \quad x \in K \quad \|y\| < \frac{1}{3} d(K, \mathbb{R}^n \backslash \overset{\circ}{K}_1) \ .$$

Demostración. Sea

$$L \ := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x, K_1) \leq \frac{2\delta}{3}\} \ ,$$

siendo

$$\delta \ := d(K_1, (\mathbb{R}^n \backslash \overset{\circ}{K}_2) \cup \text{ sop } g) \ .$$

Tomamos funciones reales u_p de clase C^∞ definidas en $\mathbb{R}^n$ y con valores en $[0, 1]$ de tal forma que

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{en un entorno de } K_2 \backslash \overset{\circ}{K}_1 \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \backslash K_3 \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{en un entorno de } K_3 \backslash \overset{\circ}{K}_2 \\ 0 & \text{en } L \cup (\mathbb{R}^n \backslash K_4) \end{cases}$$

y, para $p = 3, 4, 5, \ldots,$

$$u_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{en un entorno de } K_{p+1} \backslash \overset{\circ}{K}_p \\ 0 & \text{en un entorno de } K_{p-1} \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \backslash K_{p+2} \end{cases} .$$

Elegimos $\gamma_p \geq 1$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} u_p(x)}{\partial x^\alpha} \right| < \gamma_p , \quad |\alpha| \leq p + r , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad p = 1, 2, \ldots .$$

Escribimos $\eta := \text{mín}\,(1, \delta)$, V_p para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ del soporte de $u_1 + u_2 + \cdots + u_p$, $p = 1, 2, \ldots,$ y $H_1(x)g(x) := u_1(x)g(x)$, $x \in \Omega$. Ponemos también para p entero y α multiíndice,

$$\mu_{p,\alpha} := (\sqrt{\pi})^{-n} \lambda_p^n V_{p+2} \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{|\alpha|} H_p(x)}{\partial x^\alpha} \right| : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$\mu_p := \sup \{ \mu_{p,\alpha} : |\alpha| \leq r \} ,$$

$$\psi_p(z) := (\sqrt{\pi})^{-n} \lambda_p^n \int_{\mathbb{R}^n} H_p(t) e^{-\lambda_p^2 (t-z).(t-z)} dt , \; z \in \mathbb{C}^n , \tag{1}$$

en donde λ_p y H_p los iremos definiendo paso a paso.

Teniendo en cuenta (b), podemos hallar $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\mu_1 e^{-\frac{\lambda_1^2 \eta^2}{2}} < \frac{\epsilon_0}{2} ,$$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} \psi_1(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} H_1(x)}{\partial x^\alpha} \right| < \frac{\epsilon_2}{2^{5+r} \gamma_2} , \quad x \in K_2 \, , |\alpha| \leq 2 + r . \tag{2}$$

Procedemos por inducción completa y suponemos que, para un entero $p - 1$, hemos obtenido $\lambda_{p-1} > 0$ y las funciones enteras en $\mathbb{C}^n$: $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{p-1}$. Ponemos

$$H_p(x) := u_p[g(x) - (\psi_1(x) + \psi_2(x) + \cdots + \psi_{p-1}(x)] \, , x \in \Omega .$$

Teniendo en cuenta de nuevo (b), hallamos $\lambda_p > 0$ tal que

$$\mu_1 e^{-\frac{\lambda_p^2 \eta^2}{2^p}} < \frac{\epsilon_0}{2^p} ,$$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} \psi_p(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} H_p(x)}{\partial x^\alpha} \right| < \frac{\epsilon_{p+1}}{2^{2p+3+r} \gamma_{p+1}} , \quad x \in K_{p+1} \, , |\alpha| \leq p + 1 + r . \tag{3}$$

Consideremos ahora la serie de funciones enteras en $\mathbb{C}^n$:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(z) , \tag{4}$$

y veamos que representa a una función holomorfa $\psi(z)$ en Ω^*. Tomemos un punto z_0 en Ω^*. Podemos hallar un punto $\mathbb{C}^n$ de centro x_0 y radio $\rho > 0$ que contenga en su interior a z_0 de tal forma que la distancia de x_0 a $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ sea mayor que 3ρ. Hallamos un entero positivo q tal que

$$\{x \in \Omega \ : \ \|x - x_0\| \leq 3\rho\} \subset \overset{\circ}{K}_q \ , \quad 3\rho^2 > \frac{1}{2^q} \ .$$

Si $p > 2$, se tiene que

$$|\psi_p(z)| \leq (\sqrt{\pi})^{-n} \lambda_p^n \int_{K_{p+2} \backslash K_{p-1}} |H_p(t)| e^{-\lambda_p^2 \|t-x\|^2} e^{\lambda_p^2 \ \|y\|^2} dt \ , \ z = x+iy \in \mathbb{C}^n \ .$$

Si elegimos además $p > q+1$ y z en B, resulta, para t en $K_{p+2} \backslash K_{p+1}$, que

$$\|t - x\| > 2\rho \ , \qquad \|y\| < \rho \ ,$$

y, por tanto,

$$|\psi_p(z)| \leq \mu_p e^{-3\lambda_p^2 \rho^2} \leq \mu_p e^{-\frac{\lambda_p^2 \eta^2}{2^p} < \frac{\epsilon_0}{2^p}} \ ,$$

de donde se deduce que la serie (4) converge uniformemente en B y su suma es holomorfa en z_0. Se obtiene de lo anterior que dicha serie representa una función ψ holomorfa en Ω^*.

Para cada multiíndice α y x variando en Ω, se tiene, derivando (1) α veces e integrando por partes, que

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \psi_p(x)}{\partial x^\alpha} = (\sqrt{\pi})^{-n} \lambda_p^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|} H_p(t)}{\partial t^\alpha} e^{-\lambda_p^2 \|t-x\|^2} dt \ , \quad p = 1, 2, \cdots \ .$$

Tomemos ahora x en K_1 y $|\alpha| \leq r$. Entonces

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} \psi_1(x)}{\partial x^\alpha} \right| \leq \mu_{1,\alpha} e^{-\lambda_1^2 \delta^2} \leq \mu_{1,\alpha} e^{-\frac{\lambda_1^2 \eta^2}{2}} < \frac{\epsilon_0}{2} \ ,$$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} \psi_2(x)}{\partial x^\alpha} \right| \leq \mu_{2,\alpha} e^{-\lambda_2^2 \left(\frac{2}{3}\delta\right)^2} \leq \mu_{2,\alpha} e^{-\frac{\lambda_2^2 \eta^2}{2^2}} < \frac{\epsilon_0}{2^2} \ ,$$

y, para $p > 2$,

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} \psi_p(x)}{\partial x^\alpha} \right| \leq \mu_{p,\alpha} e^{-\lambda_p^2 \delta^2} \leq \mu_{p,\alpha} e^{-\frac{\lambda_p^2 \eta^2}{2^p}} < \frac{\epsilon_0}{2^p} \ .$$

Se deduce de aquí que

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi(x)}{\partial x^\alpha}\right| \le \sum_{p=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi_p(x)}{\partial x^\alpha}\right| < \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\epsilon_0}{2^p} = \epsilon_0 \; .$$

Podemos afirmar, pues, que

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi(x)}{\partial x^\alpha}\right| < \epsilon_0 \; , \quad x \in K_1 \; , \quad |\alpha| \le r \; .$$

Puesto que $u_1(x)$ vale uno en un entorno de $K_2 \backslash \overset{\circ}{K}_1$, se tiene, para cada muliíndice α, que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}H_1(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}g(x)}{\partial x^\alpha} \; , \quad x \in K_2 \backslash K_1 \; ,$$

y, teniendo en cuenta (2), resulta que

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}g(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|}\psi_1(x)}{\partial x^\alpha}\right| < \frac{\epsilon_2}{2^{5+r}\gamma_2} \; , \quad x \in K_2 \backslash K_1 \; , \quad |\alpha| \le 2 + r \; . \tag{5}$$

Tomemos ahora $p > 1$. Puesto que $U_p(x)$ vale uno en un entorno de $K_{p+1} \backslash \overset{\circ}{K}_p$, se tiene, para cada multiíndice α, que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}H_p(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}g(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|}\psi_1(x)}{\partial x^\alpha} - \cdots - \frac{\partial^{|\alpha|}\psi_{p-1}(x)}{\partial x^\alpha} \; , \quad x \in K_{p+1} \backslash K_p \; ,$$

y, por tanto, se obtiene de (3),

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}g(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\psi_1(x) + \psi_2(x) + \cdots + \psi_p(x))\right| < \frac{\epsilon_{p+1}}{2^{2p+3+r}\gamma_{p+1}} < \frac{\epsilon_p}{2}$$

$$x \in K_{p+1} \backslash K_p \; , \quad |\alpha| \le p + 1 + r \; , \tag{6}$$

de aquí que, para $p - 1 > 1$,

$$\left|\frac{\partial^{|\beta|}g(x)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}(\psi_1(x) + \psi_2(x) + \cdots + \psi_{p-1}(x))\right| < \frac{\epsilon_p}{2^{2p+1+r}\gamma_p}$$

$$x \in K_p \backslash K_{p-1} \; , \quad |\beta| \le p + r \; ;$$

por otra parte, para $p - 1 = 1$, la anterior desigualdad es, exactamente, la (5). Derivemos ahora $H_p(x)$ α veces, $|\alpha| \le p + r$.

Entonces

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}H_p(x)}{\partial x^\alpha}\right| =$$

$$= \left|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\frac{\partial^{|\beta|}u_p(x)}{\partial x^\beta}\frac{\partial^{|\alpha-\beta|}}{\partial x^\beta}[g(x)-(\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_{p-1}(x))]\right|$$

$$\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\gamma_p\frac{\epsilon_p}{2^{2p+1+r}\gamma_p} = \frac{\epsilon_p}{2^{2p+1+r}}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}$$

$$\leq \frac{\epsilon_p}{2^{p+1}}\ , \quad x\in K_p\backslash K_{p-1}\ ,$$

y puesto que u_p vale cero en un entorno de K_{p-1}, se tiene que

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}H_p(x)}{\partial x^\alpha}\right| \leq \frac{\epsilon_p}{2^{p+1}}\ , \quad x\in K_p\ , \quad |\alpha|\leq p+r$$

y, por tanto, para dichos valores de x y de α, se obtiene, de acuerdo con (3),

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi_p(x)}{\partial x^\alpha}\right| \leq \left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi_p(x)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{|\alpha|}H_p(x)}{\partial x^\alpha}\right| + \left|\frac{\partial^{|\alpha|}H_p(x)}{\partial x^\alpha}\right|$$
$$< \frac{\epsilon_p}{2^{p+1}}+\frac{\epsilon_p}{2^{p+1}} = \frac{\epsilon_p}{2^p}\ . \tag{7}$$

Si $m\geq 1$, $|\alpha|\leq m+r$ y x varía en $K_q\backslash K_{q-1}$ para un $q>m$, resulta, teniendo en cuenta (5), (6) y (7), que

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi(x)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{|\alpha|}g(x)}{\partial x^\alpha}\right| \leq \left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi_p(x)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\psi_1(x)+\cdots+\psi_{q-1}(x))\right|$$
$$+\sum_{j=q}^{\infty}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi_j(x)}{\partial x^\alpha}\right| \leq \frac{\epsilon_{q-1}}{2}+\sum_{j=q}^{\infty}\frac{\epsilon_j}{2^j} < \epsilon_m\ .$$

Por tanto,

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}\psi(x)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial^{|\alpha|}g(x)}{\partial x^\alpha}\right| < \epsilon_m\ , \quad x\in\Omega\backslash K_m\ , \quad |\alpha|\leq m+r\ .$$

Finalmente, tomemos un compacto K contenido en K_1 y cuya distancia a $\mathbb{R}^n\backslash\mathring{K}_1$ sea ζ. Sea $z=x+iy$, x , $y\in\mathbb{R}^n$, de manera que $x\in K$, $\|y\|<\frac{1}{3}\zeta$. Entonces

$$|\psi_1(z)| \leq \mu_1 e^{-\lambda_1^2(\zeta+\delta)^2}e^{\frac{\lambda_1^2\zeta^2}{q}} \leq \mu_1 e^{-\frac{\lambda_1^2\eta^2}{2}} < \frac{\epsilon_0}{2}\ ,$$

$$|\psi_2(z)| \leq \mu_2 e^{-\lambda_2^2(\zeta+\delta)^2}e^{\frac{\lambda_2^2\zeta^2}{q}} \leq \mu_1 e^{-\frac{\lambda_1^2\eta^2}{2}} < \frac{\epsilon_0}{2^2}\ ,$$

y, para $p > 2$,

$$|\psi_p(z)| \leq \mu_p e^{-\lambda_p^2(\zeta+\delta)^2} e^{\frac{\lambda_p^2\zeta^2}{q}} \leq \mu_p e^{-\frac{\lambda_p^2\eta^2}{2}} < \frac{\epsilon_0}{2^p} .$$

Consiguientemente,

$$|\psi(x+iy)| < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2^p} = \epsilon_0 \ , x \in K \ , \ \|y\| < \frac{1}{3} d(K, \mathbb{R}^n \backslash \mathring{K}_1) .$$

§3. El teorema de interpolación de Borel para espacios de Hilbert

Sea X un espacio de Hilbert real. Sea $(e_j : j \in J)$ una base ortonormal de X. Ponemos Z para el conjunto de los elementos

$$z \ := \sum_{j\in J} z_j e_j \ , \quad z_j \in \mathbb{C} \ , \quad j \in J \ , \quad \sum_{j\in J} |z_j|^2 < \infty \ ,$$

con su estructura ordinaria de espacio de Hilbert. Se tiene que Z es la complexificación de X. Escribamos P para la aplicación de Z en $\mathbb{C}$ tal que

$$P(z) = \sum_{j\in J} z_j^2 \ , \quad z \in Z .$$

Obviameente, P es un polinomio continuo de segundo grado. Ponemos

$$D \ := \{z \in Z \ : \ |\mathrm{Im}\ P(z)| < \frac{1}{3} |\ \mathrm{Re}\ P(z)|\} .$$

Se tiene que D es un dominio de Z tal que $D \cap X = X \backslash \{0\}$.

Teorema. *Sea X un espacio de Hilbert real. Sean A_0 un número real y A_m una forma m-lineal real, simétrica y continua definida en X^m, $m = 1, 2, \cdots$. Si Z es el espacio de Hilbert complexificado de X, existe una función holomorfa ψ en D cuya restricción a $X\backslash\{0\}$ es real y se extiende a un elemento f de $C^\infty(X)$ tal que $f^{(m)}(0) = A_m$ y $f^{(m)}$ está acotada en los acotados de X, $m = 0, 1, 2, \cdots$.*

Demostración. Extendemos, en la forma usual, los polinomios $\widehat{A}_m(x)$, $x \in X$, a polinomios complejos continuos $B_m(z)$, $z \in Z$, $m = 1, 2, \cdots$. Consideramos la sucesión de números positivos $1 > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \cdots > \epsilon_m > \cdots$, de manera que

$$\epsilon_m \ \|B_m^{(j)}(z)\|^2 < 1 \ , \ j = 1, 2, \ldots, m \ , \ \epsilon_m < \frac{1}{m+1} \ , \ m = 1, 2, \cdots .$$

Elegimos una función φ de $C^\infty(\mathbb{R})$, que tome sus valores en $[0,1]$, tenga su soporte en $[-1,1]$ y valga uno en un entorno del origen. Ponemos $\Omega \ := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y, para cada entero positivo m, $\varphi_m(x) \ := \varphi(\epsilon_m^{-1}x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$$K_{mp} \ := [-m-p, -\frac{1}{m+p}] \cup [\frac{1}{m+p}, m+p] \ , \quad p = 1, 2, \cdots ;$$

determinamos, aplicando el lema, una función $\psi_m(z)$ holomorfa en Ω^* y real en Ω tal que

$$|\psi_m^{(j)}(x)| < \epsilon_m \ , \quad x \in K_{m1} \ , \quad j \leq m \ ,$$

$$|\psi_m^{(j)}(x) - \varphi_m^{(j)}(x)| < \epsilon_{m+p} \ , \ x \in \Omega\backslash K_{mp} \ , \ j \leq m+p, \ p = 1, 2, \cdots \ , \qquad (8)$$

y si K es un compacto contenido en K_{m1}, entonces

$$\psi_m(x+iy)| < \epsilon_m \ , \quad x \in K \ , \ |y| < \frac{1}{3} d(K, \mathbb{R}\backslash \mathring{K}_{m1}) \ .$$

Si ponemos $\psi_m(0) = 1$, se deduce de (8) que $\psi_m(x)$ es de clase C^∞ en X y $\psi_m^{(j)}(0) = 0, \ j = 1, 2, \cdots$.

Los términos de la serie

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m(z)}{m!} \psi_m(P(z)) \qquad (9)$$

son funciones holomorfas en D. Veamos ahora que la serie anterior representa una función holomorfa en dicho dominio. Tomemos un punto z_0 de D; entonces

$$|\ \mathrm{Im}\ P(z_0)| < \frac{1}{4} \ |\mathrm{Re}\ P(z_0)| \ .$$

Podemos hallar un compacto K de Ω tal que Re$P(z_0)$ pertenezca a $\mathring{K}$ y la distancia μ de K al origen sea mayor que $4|\mathrm{Im}\ P(z_0)|$. Entonces

$$U \ := \{z \in D \ : \ \mathrm{Re}\ P(z) \in K \ , |\mathrm{Im}\ P(z)| < \frac{1}{4} \ \mu \ , \|z\| \leq 2\|z_0\|\}$$

es un entorno de z_0 en D. Ponemos ζ_m para la distancia de K a $\mathbb{R}\backslash\mathring{K}_{m1}$. Hallamos un entero positivo r tal que $4\zeta_r > 3\mu$. Si tomamos $m \geq r$ y z en U, se tiene que

$$\mathrm{Re}\ P(z) \in K \ , \quad |\ \mathrm{Im}\ P(z)| < \frac{1}{4}\mu < \frac{1}{3}\zeta_r \leq \frac{1}{3}\zeta_m$$

y, por tanto,

$$|\psi_m(P(z))| < \epsilon_m \ ,$$

de aquí que

$$\frac{|B_m(z)|}{m!} \cdot |\psi_m(P(z))| \leq \frac{\epsilon_m \|B_m\| \cdot \|z\|^n}{m!} \leq \frac{\|2z_0\|^m}{m!}$$

y, por tanto, la serie (9) converge uniformemente en U, de donde se deduce que (9) representa una función $\psi(z)$ holomorfa en D.

Sea g una función perteneciente a $C^{\infty}(\mathbb{R})$ y s un entero positivo. Consideremos $g^{(k)}(t)$, en el sentido clásico, como funciones escalares, $k = 0, 1, 2, \cdots$. Calculando derivadas de la función compuesta $g \circ P$, se obtiene, para cada x en X con $\|x\| < s$,

$$\|(g \circ P)^{(k)}(x)\| \leq h_1(s)|g(P(x))| + h_2(s)|g'(P(x))| + \cdots + h_k(s)|g^{(k)}(P(x))| ,$$

en donde $h_j(s)$ no depende de g, $j = 1, 2, \cdots, k$. Entonces para todo entero positivo m y x en X con $\|x\| < s$, resulta de

$$\begin{aligned}(\widehat{A}_m(x)g(P(x)))^{(k)} &= (\widehat{A}(x)) \otimes g(P(x))^{(k)} \\ &= \text{sim} \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{\beta} A_m^{(j)}(x) \otimes (g \circ P)^{(k-j)}(x)\end{aligned}$$

que

$$\|\widehat{A}_m g(P(x)))^{(k)}\| \leq \sum_{p,\ q=0}^{k} h_{pq}(s)\|\widehat{A}_m^{(p)}(x)\| \cdot |g^{(q)}(P(x))| ,$$

en donde $h_{pq}(s)$, p, $q = 0, 1, 2, \cdots, k$ no depende de $\widehat{A}_m$ ni de g.

Fijemos ahora un entero positivo s, un entero no negativo k y un $\epsilon > 0$; suponemos que x varía en la bola abierta de X cuyo centro es el origen y cuyo radio es s. Hallamos un $\delta > 0$ tal que

$$\left(\sum_{p,\ q=0}^{k} h_{pq}(s)\delta\right) \sup \{|\varphi^{(j)}(t)| \ : \ t \in \mathbb{R} \ , \ j \leq k\} < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Tomemos $m > \sup(2k, \frac{1}{\delta})$ de manera que $\epsilon_m < \delta^2$. Entonces, si $P(x)$ pertenece a K_{m1}, se tiene que

$$|\psi_m^{(q)}(P(x))| < \epsilon_m \ , \qquad |q| \leq m \ ,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\left\| \left(\widehat{A}_m(x)\frac{\psi_m(P(x))}{m!}\right)^{(k)} \right\| &\leq \frac{1}{m!} \sum_{p,\ q=0}^{k} h_{pq}(s)\|\widehat{A}_m^{(p)}(x)\| \cdot |\psi^{(q)}(P(x))| \\ &\leq \frac{s^m}{m!} \sum_{p,\ q=0}^{k} h_{pq}(s)\delta < \frac{\epsilon s^m}{2m!} \ ,\end{aligned}$$

y si $P(x)$ no está en K_{m1}, resulta que

$$|\psi_m^q(P(x)) - \varphi_m^{(q)}(P(x))| < \epsilon_{m+1} \ , \quad |q| \leq m+1 \ ,$$

de aquí que, análogamente,

$$\left\| \left(\widehat{A}(x) \frac{\psi_m(P(x)) - \varphi_m(P(x))}{m!} \right)^{(k)} \right\| < \frac{\epsilon s^m}{2m!} \ .$$

También se tiene, puesto que $\varphi_m(P(x)) = \varphi(\epsilon_m^{-1} P(x))$, que $\varphi_m^{(q)}(P(x)) = 0$ cuando $P(x) \geq \epsilon_m$, y si $P(x) < \epsilon_m$, en cuyo caso $P(x)$ no está en K_{m1}, se verifica que

$$|\varphi_m^{(q)}(P(x))| = \epsilon_m^{-q} |\varphi^{(q)}(\epsilon_m^{-1}(P(x)) \ ,$$

por lo que, si $P(x) \geq \epsilon_m$,

$$\left\| \left(\frac{\widehat{A}_m(x)}{m!} \psi_m(P(x)) \right)^{(k)} \right\| \leq \frac{\epsilon s^m}{2m!} \ ,$$

y si $P(x) < \epsilon_m$, resulta, puesto que $\|x\|^2 = P(x)$, que

$$\left\| \left(\frac{\widehat{A}_m(x)}{m!} \psi_m(P(x)) \right)^{(k)} \right\| \leq \left\| \left(\widehat{A}_m(x) \frac{\psi_m(P(x)) - \varphi_m(P(x))}{m!} \right)^{(k)} \right\|$$

$$+ \|(\frac{\hat{A}_m(x)}{m!} \phi_m(P(x)))^{(k)}\|$$

$$\leq \frac{\epsilon s^m}{2m!} + \frac{1}{m!} \sum_{p,q=0}^{k} h_{pq}(s) \|\hat{A}_m^{(p)}(x)\| \ |\varphi^{(q)}(P(x))|$$

$$\leq \frac{\epsilon s^m}{2m!} + \frac{1}{m!} \sum_{p,q=0}^{k} h_{pq}(s) \|A_m^{(p)})\| \ . \ \|x\|^{m-p} \epsilon_m^{-q} |\varphi^{(q)}(\epsilon_m^{-1}(P(x))|$$

$$\leq \frac{\epsilon s^m}{2m!} + \frac{1}{m!} \sum_{p,\ q=0}^{k} h_{pq}(s) \|A_m^{(p)})\| \ \epsilon_m |\varphi^{(q)}(\epsilon_m^{-1} P(x))| \leq \frac{\epsilon s^m}{m!} \ .$$

Entonces, para dichos valores de m, x y k,

$$\sum \|(\frac{\widehat{A}_m(x)}{m!} \psi_m(P(x)))^k\| \leq \epsilon \ \mathrm{e}^s \ .$$

y, por tanto, la serie

$$A_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{\widehat{A}_m}{m!} \psi_m(P(x)))^{(k)}$$

converge uniformemente para $\|x\| < s$. Se deduce de lo anterior que, si

$$f(x) = \psi(x) \ , \quad x \in X \backslash \{0\} \ , \quad f(0) = A_0 \ ,$$

se tiene que $f \in C^\infty(X)$, $f^{(m)}(0) = A_m$ y $f^{(m)}$ está acotada en los acotados de X, $m = 0, 1, \cdots$.

BIBLIOGRAFÍA

1. Borel, E., *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. **IV Ser. 12** (1895), 9–55.
2. Colombeau, J. F., *Infinite dimensional C^∞-mappings with a given sequence of derivatives at a given point*, J. Math. Anal. Appl. **71** (1979), 95–104.
3. Kurzweil, J., *On approximation in real Banach spaces*, Studia Math. **14** (1954), 214–231.
4. Narashiman, R., *Analysis on Real and Complex Functions (A. Grothendieck and N. H. Kuiper, Eds.), Advanced Studies in Pure Mathematics*, Masson, Paris, 1973.
5. Whitney, H., *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

(*Recibido en abril de 1993*)

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, DR. MOLINER, 50. 46100-BURSAJOT (VALENCIA), ESPAÑA