Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 267–280

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA DE CHURCH Y ROSSER

E. G. K. LÓPEZ-ESCOBAR

Universidad de Maryland

RESUMEN. Usando una notación en el estilo del *Begriffsschrift* de G. Frege [3] damos una prueba muy transparente del teorema de Church y Rosser para un gran conjunto de sistemas combinatorios.

§1. SISTEMAS COMBINATORIOS

Un sistema combinatorio contiene por lo menos

(1) Una operación de *aplicación de dos argumentos*: $(-\ -)$,
(2) Un número finito de constantes, llamadas *combinadores atómicos*:
$$\mathbb{C}_1, \ldots, \mathbb{C}_k,$$
(3) Un número ilimitado de *parámetros*: $x_1, \ldots,$
(4) Una relación binaria de *reducción*: $\triangleright$,
(5) Un número finito de *reglas de reducción*.

Los combinadores atómicos y los parámetros son los *átomos* del sistema. Los *términos* son los átomos o las expresiones "(MN)" donde M y N son términos. Las reglas de reducción son expresiones del tipo:

$$M \triangleright N$$

donde M y N son términos. M es la *matriz redex* y N es la *matriz contractum*. Una *regla de reducción primitiva* para el combinador atómico $\mathbb{C}$ es una regla del tipo[1]:

$$\mathbb{C}x_1x_2\ldots x_n \ \triangleright\ M$$

donde el término M consiste solamente de parámetros del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

[1]Eso es: $(\ldots((\mathbb{C}x_1)x_2)\ldots x_n) \ \triangleright\ M$.

Definición 1.1. Un sistema combinatorio $\mathfrak{C}$ es un ***sistema primitivo*** si y solamente si a cada combinador atómico le corresponde una única regla primitiva.

La *lógica combinatoria*, esto es, el sistema combinatorio generado por los combinadores $\mathbb{K}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{I}$, es un sistema primitivo porque sus reglas de reducción son:

- $\mathbb{K}xy \ \rhd \ x$
- $\mathbb{S}xyz \ \rhd \ xz(yz)$
- $\mathbb{I}x \ \rhd x$.

Si M y N son términos de un sistema combinatorio $\mathfrak{C}$, entonces diremos que *M se reduce a N en un paso* y lo escribiremos: $M \ \Rightarrow_1 \ N$, si N se obtiene aplicando una de las reglas de reducción a un subtérmino de M. $\Rightarrow$ es la clausura transitiva y simétrica de $\Rightarrow_1$.

Definición 1.2. Un término *irreducible* es un término M tal que no existe un término N donde: $M \ \Rightarrow_1 N$.

Si M, N y P son términos, escribiremos:

$$\{M,N\} \ \Rightarrow \ P$$

solamente en el caso que $M \ \Rightarrow \ P$ y $N \ \Rightarrow \ P$. Igualmente para "$P \ \Rightarrow \{M,N\}$".

1.3. Un sistema combinatorio $\mathfrak{C}$ tiene, o satisface, ***la propiedad de Church-Rosser*** si y solamente si para todos los términos M, N y P de $\mathfrak{C}$:

- Si $P \ \Rightarrow \ \{M,N\}$, entonces existe un término R tal que $\{M,N\} \ \Rightarrow \ R$.

§2. Sistemas sin la propiedad de Church-Rosser

2.1. El sistema $\mathfrak{C}_0$. Probablemente el sistema más simple sin la propiedad de Church-Rosser es el sistema con dos combinadores atómicos $\mathbb{U}$, $\mathbb{I}$ y las siguientes reglas:

- $\mathbb{U}(xy) \ \rhd \ x$
- $\mathbb{I}x \ \rhd \ x$.

Entonces $\mathbb{U}(\mathbb{III}) \ \Rightarrow \ \{\mathbb{I}, \mathbb{UI}\}$, pero los términos $\mathbb{I}$ y $\mathbb{UI}$ son irreducibles.

2.2. El sistema $\mathfrak{C}_1$. Tal vez el más conocido es la lógica combinatoria con apareamiento sobreyectivo, eso es, la obtenida agregando a los combinadores clásicos $\mathbb{K}, \mathbb{S}, \mathbb{I}$, los combinadores: $\mathbb{P}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{L}$ con las reglas:

- $\mathbb{L}(\mathbb{P}xy) \ \rhd \ x$
- $\mathbb{R}(\mathbb{P}xy) \ \rhd \ y$
- $\mathbb{P}(\mathbb{L}x)(\mathbb{R}x) \ \rhd \ x$.

Si en lugar de los combinadores $\mathbb{P}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{L}$, tomásemos los combinadores $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ con las regla:

- $\mathbb{H}xx \ \rhd \ \mathbb{O}$,

entonces el sistema combinatorio obtenido tampoco tendría la propiedad de Church-Rosser; para una demostración véase [1]

2.3. El sistema $\mathfrak{C}_2$. El último sistema sin la propiedad de Church-Rosser que consideraremos tiene 3 combinadores atómicos $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ y $\mathbb{E}$ con las siguientes reglas:

- $\mathbb{F}(\mathbb{G}x) \ \triangleright \ x$
- $\mathbb{G}(\mathbb{E}x) \ \triangleright \ x$.

La importancia de los 3 ejemplos anteriores es que ellos caracterizan los tres tipos de reglas que resultan en la falla de la propiedad de Church-Rosser. En el primer ejemplo el problema es con el subtérmino (xy) porque hay un parámetro "x" en un lugar "funcional" -el término "(MN)" es llamado con frecuencia *la aplicación de M sobre N*, entonces diremos que M ocupa el lugar *funcional* y N el lugar de *entrada*-.

En el segundo ejemplo un parámetro tiene más de una ocurrencia en la matriz redex. Mientras que en el tercer ejemplo las matrices redex de las reglas tiene una parte en común.

§3. Ideografía para sistemas combinatorios

Usar un par de paréntesis para el operador de aplicación resulta en una notación muy eficaz mientras que la mayoría de ellos sea omitida. Por ejemplo, la manera usual de dar la regla para el combinador $\mathbb{S}$ es:

$$\mathbb{S}xyz \ \triangleright \ xz(yz) \ ;$$

pero si todos los paréntesis son incluidos entonces obtenemos:

$$(((\mathbb{S}x)y)z) \ \triangleright \ ((xz)(yz)).$$

En la notación abreviada, que es muy elegante, no es fácil distinguir cuáles ocurrencias son funcionales y cuales son de entrada. En la notación completa es fácil determinar las posiciones funcionales de un parámetro -las posiciones al lado de un parentesis "(". Pero la determinación para los subtérminos es un poco más complicada.

Si usaramos la notación introducida por A. Church [2] donde se usa "$\{M\}(N)$" en vez de "(MN)", entonces es fácil distinguir entre las ocurrencias funcionales y las de entrada. Pero la simple regla para $\mathbb{S}$ es ahora:

$$\{\{\{\mathbb{S}\}(x)\}(y)\}(z) \ \triangleright \ \{\{x\}(z)\}(\{y\}(z))$$

¡ Desafortunadamente la esencia de la regla se pierde entre todos los parentésis y corchetes! Nuestra intención es usar (una modificación de) la notación de G. Frege [3]. En lugar de "(MN)" escribiremos de acuerdo con la Figura 1.

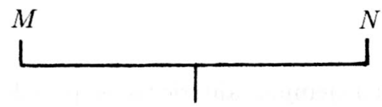


FIGURA 1. El término (MN)

Por ejemplo, el término $\mathbb{S}x(\mathbb{K}y)z$ escrito en la nueva (mejor dicho antigua) notación está dado en la Figura 2.

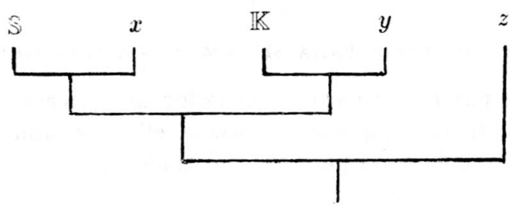


FIGURA 2 $\mathbb{S}x(\mathbb{K}y)z$

Si en cambio M, N y U son otros términos, entonces el término $\mathbb{S}M(\mathbb{K}N)U$ sería escrito como en la Figura 3.

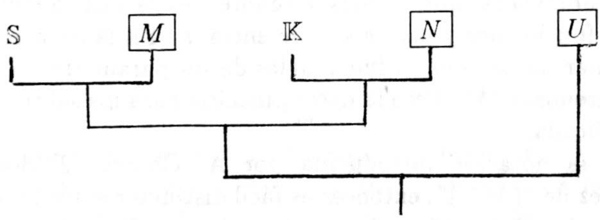


FIGURA 3. $\mathbb{S}M(\mathbb{K}N)U$

Definición 3.1. Una *plantilla* de un término N es el diagrama obtenido reemplazando todos los parámetros y algunos de los combinadores atómicos N por el símbolo "*".

Por ejemplo, una plantilla de $\mathbb{S}x(\mathbb{K}y)z$ es:

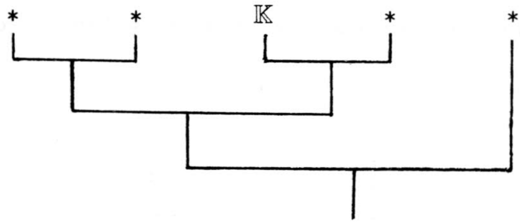
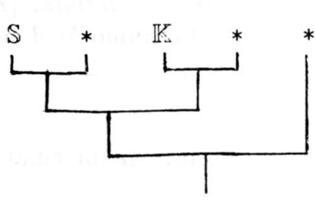


FIGURA 4. Plantilla de $\mathbb{S}x(\mathbb{K}y)z$

Definición 3.2.

(1) Una *plantilla combinadora funcional* es una plantilla en la cual todos los lugares funcionales (a decir, en la rama izquierda de una aplicación) contienen un combinador atómico. El combinador atómico en el primer lugar funcional es el *combinador principal.*
(2) Una *matriz combinadora* es una plantilla combinadora funcional en la cual todas las "*" han sido reemplazadas por parámetros.
(3) Una *matriz combinadora lineal* es una matriz combinadora donde los parámetros están arreglados de tal manera que x_1 está en el lugar de entrada más a la izquierda, x_2 en el siguiente, etc. En particular, no hay repeticiones de los parámetros en la matriz.

Ejemplos de una plantilla combinadora funcional y una matriz combinadora lineal.



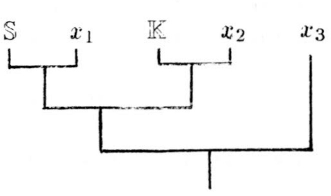


FIGURA 5. Plantillas

§4. FICHAS (ELECTRÓNICAS)

4.1. Sustitución. Sea $[x \leftarrow P]M$ el término obtenido reemplazando todas las ocurrencias del parámetro x en M por el término P. En la ideografía que hemos introducido es muy facıl visualizar como se construye el término $[x \leftarrow P]M$.

De un modo parecido se puede definir la sustitución simultánea: $[x \leftarrow P, y \leftarrow Q \ldots]M$, donde los parámetros $x, y, \ldots$ son distintos.

4.2. Fichas. Si consideramos a la operación de aplicación como si fuera una ficha electrónica:

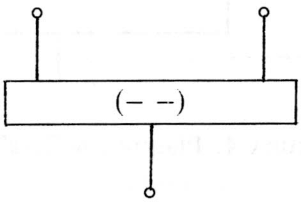


FIGURA 6. La aplicación como una ficha electrónica

entonces cada término molecular (esto es, no un átomo) puede considerarse como un tipo especial de red. En particular, cada ocurrencia de un subtérmino molecular es determinado por una única ficha; llamaremos a esa ficha *la ficha de salida* de la ocurencia del subtérmino.

4.3 Fichas activadas. Supongamos que el sistema combinatorio $\mathfrak{C}$ tiene una regla de reducción:

$$R_{x_1,\ldots,x_n} \rhd C\,, \tag{$\mathcal{R}$}$$

donde R es una matriz combinadora lineal que usa los parámetros $x_1, \ldots, x_n$. Un término N es $(\mathcal{R})$-*contractible* si existen términos $S_1, \ldots, S_n$ tales que:

$$N = [x_1 \leftarrow S_1, \ldots, x_n \leftarrow S_n]R.$$

En ese caso llamaremos al término N un *término redex* o un *término $(\mathcal{R})$-redex*; además diremos que N se contrae inmediatamente al término M donde:

$$M = [x_1 \leftarrow S_1, \ldots, x_n \leftarrow S_n]C.$$

Usaremos la notación $N \mathrel{\cdot\!\!>} M$ en el caso que N se contraiga inmediatamente a M.

Si N es un término contractible entonces diremos que la ficha de salida de N está en un estado *activo* y lo representaremos de la manera grafica mostrada en la Figura 7, donde N_f y N_e son los subtérminos inmediatos de N.

Como solamente las fichas en estado activo son las que nos interesan, simplificaremos la notación bidimensional (la ideografía) y sólo mostraremos las fichas en estado activo. Tomemos, por ejemplo, el término $\mathbb{I}(\mathbb{S}\ \boldsymbol{x}(\mathbb{K}\boldsymbol{yx}))$; su ideografía está dada por la Figura 8.

Si ahora efectuamos la contracción sobre el subtérmino $\mathbb{K}\boldsymbol{yx}$ entonces obtendremos la Figura 9.

Obsérvese que la ficha de salida de $\mathbb{I}$ no ha cambiado su estado. Pero si consideramos el sistema combinatorio $\mathfrak{C}_2$ que tiene las reglas:

- $\mathbb{F}(\mathbb{G}x) \rhd x$
- $\mathbb{G}(\mathbb{E}x) \rhd x$

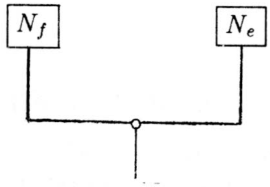


FIGURA 7. Ficha de salida activa

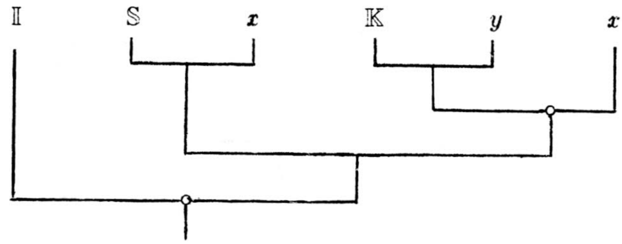


FIGURA 8.$\mathbb{I}(\mathbb{S}\ x(\mathbb{K}yx))$

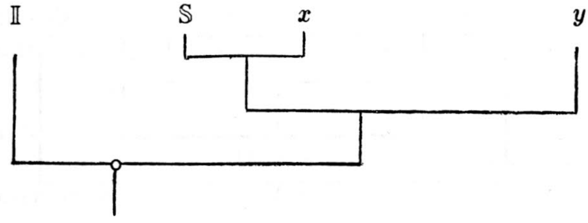


FIGURA 9. Contracción de $\mathbb{I}(\mathbb{S}\ x(\mathbb{K}yx))$

entonces el término $\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbb{E}\mathbb{E}))$, cuya ideografía es la Figura 10

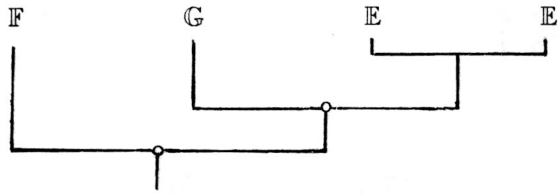


FIGURA 10. $\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbb{E}\mathbb{E}))$

no tiene la propiedad que las fichas en estado activo y que no pertenecen al subtérmino que será ccontraido queden en estado activo después de la contracción. Pues si contraemos $\mathbb{G}\ \mathbb{E}\ \mathbb{E}$ a $\mathbb{E}$, el término $\mathbb{F}\ (\mathbb{G}\ (\mathbb{E}\ \mathbb{E}\ ))$ es reducido a la ideografía de la Figura 11, y la ficha de salida de $\mathbb{F}$ ha perdido su estado activo.

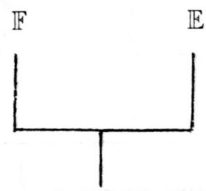


FIGURA 11. Contracción de $\mathbb{F}(\mathbb{G}(\mathbb{E}\mathbb{E}))$

4.4. Notación abstracta. Si M es una ocurrencia de un subtérmino de N entonces podemos usar la representación dada en la Figura 12.

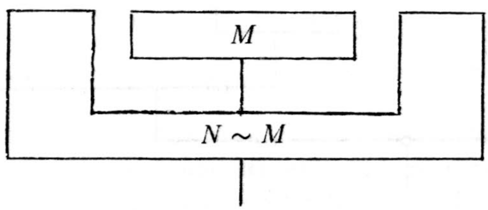


FIGURA 12. M un subtérmino de N

Si además M es un término reducible con la ficha de salida activa, entonces usaremos la representación de la Figura 13.

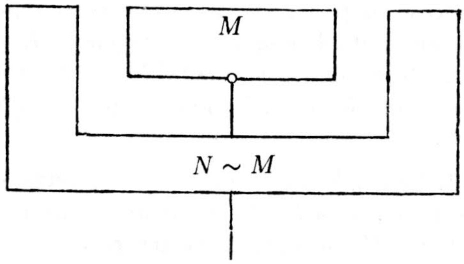


FIGURA 13. M un subtérmino reducible de N

§5. REDUCCIONES SIMULTÁNEAS CLASIFICADAS

Supongamos que M es una ocurrencia de un subtérmino reducible de N, así como en la Figura 13.

La parte de N afuera de la ocurrencia dada de M la llamaremos el ***N*-complemento de *M***, en símbolos: $N \sim M$. Obsérvese que si M se reduce a P entonces N se reduce al término Q dado por la Figura 14.

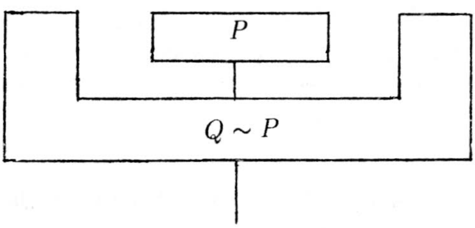


FIGURA 14. La reducción de N.

Una propiedad de todos los sistemas combinatorios es que $N \sim M$ es desde todos los puntos de vista (con una sola posible excepción) igual a $Q \sim P$. La diferencia puede estar en que algunas de las fichas activas de $N \sim M$ no esten activas en $Q \sim P$.

Definición 5.1. Una reducción de un término N a un término Q obtenida por la reducción immediata de un subtérmino M de N a un término P es una ***reducción conservativa*** si y solamente si las fichas activas de $M \sim N$ son las mismas que las de $Q \sim P$.

Definición 5.2. Un sistema $\mathfrak{C}$ es un sistema *conservativo* si todas las reducciones immediatas son conservativas.

Fichas clasificadas. Una función que asigna a (algunas de) las fichas activas de un término M un número natural α se llamará una ***classificación con la***

etiqueta α. En lenguaje más simple diremos que hemos puesto etiquetas α al término M. El proceso de poner etiquetas puede ser repetido de tal manera que si E es un conjunto finito de etiquetas, por ejemplo $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, entonces M^E significa que las etiquetas α, β y γ han sido puestas sobre M. Es claro que en M^E puede haber tanto fichas activas sin etiquetas como fichas activas con más de una etiqueta.

Definición 5.3. Sea M^E un término con etiquetas y α un etiqueta (no necesariamente perteneciente a E). La *redución simultánea de M con respecto a α*, en símbolos: $\mathrm{Red}_\alpha[M^E]$, es definida de acuerdo a (donde escribiremos "N" en lugar de "$\mathrm{Red}_\alpha[M^E]$" y "M" en lugar de "M^E"):

(1) Si M es un átomo, entonces $N = M$.
(2) Si $M = (P\ Q)$ y M es irreducible, entonces $N = (\mathrm{Red}_\alpha[P]\ \mathrm{Red}_\alpha[Q])$.
(3) Si $M = (P\ Q)$ y M es reducible pero la ficha de salida no tiene la etiqueta α, entonces $N = (\mathrm{Red}_\alpha[P]\ \mathrm{Red}_\alpha[Q])$.
(4) Si $M = (P\ Q)$, M es reducible, la ficha de salida tiene la etiqueta α, la asociada regla es $A_{x_1,\ldots,x_k} \rhd B$ y $M = [x_1 \leftarrow M_1, \ldots, x_k \leftarrow M_k]A$, entonces $N = [x_1 \leftarrow \mathrm{Red}_\alpha[M_1], \ldots, x_2 \leftarrow \mathrm{Red}_\alpha[M_k]]B$.

En la cláusula (4) se supone que la matriz B no tiene ninguna etiqueta.

Es importante observar que

(1) En el término $\mathrm{Red}_\alpha[M^E]$ no queda ninguna etiqueta α.
(2) Las etiquetas de $\mathrm{Red}_\alpha[M^E]$ pertenecen a $E \sim \{\alpha\}$.
(3) Si $\mu \in E \sim \{\alpha\}$ entonces puede haber más (o menos) etiquetas μ en $\mathrm{Red}_\alpha[M^E]$.

Definición 5.4.. Un sistema $\mathfrak{C}$ es *conmutativo* (o tiene la propiedad de *Tait*) si y solamente si para todo conjunto finito E de etiquetas, etiquetas α y β y términos M^E:

$$\mathrm{Red}_\alpha[\mathrm{Red}_\beta[M^E]] = \mathrm{Red}_\beta[\mathrm{Red}_\alpha[M^E]].$$

§6. Los sistemas conmutativos (Tait) son Church-Rosser

Sea $\mathfrak{C}$ un sistema conmutativo. Obsérvese primero que todo que si $P \Rightarrow_1 Q$, entonces se puede poner una etiqueta α (y solamente a una ficha) de tal manera que $Q = \mathrm{Red}_\alpha[M^\alpha]$.

Consecuentemente para sistemas combinatorios Tait tenemos la siguiente propiedad:

Si $P \Rightarrow_1 \{Q, R\}$, entonces existe un término Z tal que $\{Q, R\} \rhd\ Z$.

Definición 6.1. Sea α una etiqueta:

(1) $M \vdash_\alpha N$ si y solamente si existe una aplicación de etiquetas tal que $\mathrm{Red}_\alpha[M] = N$.

(2) $M \vdash N$ si y solamente si existe una etiqueta α tal que $M \vdash_\alpha N$.

Nótese que si

$$P \Rightarrow_1 Q \quad \text{y} \quad P \vdash N\ ,$$

entonces existe[2] un término Z tal que:

$$Q \vdash Z \quad \text{y} \quad N \vdash Z.$$

Consecuentemente una indución sobre $m+n$ nos da:

$$\text{Si } P \Rightarrow_m Q \quad \text{y} \quad P \Rightarrow_n N \text{ ,entonces existe un término } Z$$

$$\text{tal que } Q \vdash Z \text{ y } N \vdash Z.$$

De lo último sólo resta un pequeño paso para lograr la propiedad de Church y Rosser. Pues la demostración de que los sistemas conmutativos son Church-Rosser está completa.

§7. Los sistemas conservativos son conmutativos

Ahora sea $\mathfrak{C}$ un sistema conservativo. P un término cualquiera de $\mathfrak{C}$ con etiquetas $\{\alpha, \beta \ldots\}$. Demostraremos, por inducción sobre al complejidad de P que:

$$\text{Red}_\alpha[\text{Red}_\beta[P]] = \text{Red}_\beta[\text{Red}_\alpha[P]].$$

El resultado es inmediato si P no es un término reducible o si su ficha de salida no tiene unas de las etiquetas α o β. Entonces supongamos que P es un término reducible con ficha de salida con la etiqueta α. Como la ficha de salida de P está en estado activo, debe haber una regla

$$R_{x_1,\ldots,x_n} \rhd\ C\ ,$$

donde R es una matriz lineal en parámetros $x_1, \ldots, x_n$ y términos $N_1, \ldots, N_n$ tales que

$$P = [x_1 \leftarrow N_1, \ldots, x_n \leftarrow N_n]R.$$

Consecuentemente, como la ficha de salida de P tiene la etiqueta α:

$$\text{Red}_\alpha[P] = [x_1 \leftarrow \text{Red}_\alpha[N_1], \ldots, x_n \leftarrow \text{Red}_\alpha[N_n]]C.$$

Como el término C no tiene ninguna etiquetas deducimos que:

$$\text{Red}_\beta[\text{Red}_\alpha[P]] = \text{Red}_\beta[[x_1 \leftarrow \text{Red}_\alpha[N_1], \ldots, x_n \leftarrow \text{Red}_\alpha[N_n]]C] \tag{7.1}$$

$$= [x_1 \leftarrow \text{Red}_\beta[Red_\alpha[N_1]], \ldots, x_n \leftarrow \text{Red}_\beta[\text{Red}_\alpha[N_n]]]C]\ . \tag{7.2}$$

[2]Siempre bajo la suposición que de el sistema $\mathfrak{C}$ es conmutativo.

Y entonces, usando la hipótesis de inducción, obtenemos que:

$$\mathrm{Red}_\beta[\mathrm{Red}_\alpha[P]] = [x_1 \leftarrow \mathrm{Red}_\alpha[Red_\beta[N_1]], \ldots, x_n \leftarrow \mathrm{Red}_\alpha[\mathrm{Red}_\beta[N_n]]]C].$$

Por otra parte, como la etiqueta de la ficha de salida de P no es α obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\mathrm{Red}_\alpha[\mathrm{Red}_\beta[P]] = \mathrm{Red}_\alpha[[x_1 \leftarrow \mathrm{Red}_\beta[N_1], \ldots, x_n \leftarrow \mathrm{Red}_\beta[N_n]]R] \tag{7.3}$$

$$= [x_1 \leftarrow \mathrm{Red}_\alpha[Red_\beta[N_1]], \ldots, x_n \leftarrow \mathrm{Red}_\alpha[\mathrm{Red}_\beta[N_n]]]C] \tag{7.4}$$

Usando la sección previa, hemos demostrado que los sistemas conservativos tienen la propriedad de Church-Rosser.

§8. Sistemas conservativos

Desafortunadamente, la definición de sistema conservativo no nos permite obtener una verificación finita de esta propriedad. En esta sección daremos condiciones, sobre las reglas del sistema, que garantizarán que el sistema sea conservativo (y consecuentemente Church-Rosser).

Definición 8.1. El *esqueleto* de un término M es la plantilla obtenida reemplazando todos los parámetros de M por el símbolo "*".

Por ejemplo, el esqueleto de $\mathbb{K}(\mathbb{I}x)y$ es la ideografía de la Figura 15.

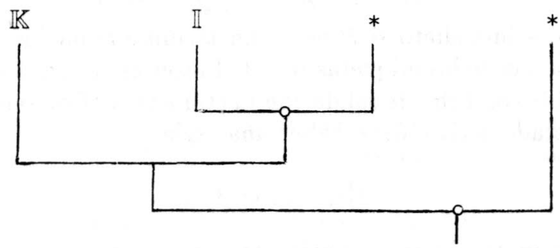


FIGURA 15. Esqueleto de $\mathbb{K}(\mathbb{I}x)y$.

Definición 8.2. Un término molecular M es *directamente dependiente* del término N si el esqueleto de M se puede obtener del esqueleto de un subtérmino N reemplazando algunas de las "*" por esqueletos.

Por ejemplo, $\mathbb{G}(\mathbb{E}x)$ es directamente dependiente de $\mathbb{G}y$ pues el esqueleto $\mathbb{G}\ (\mathbb{E}\ *)$ es obtenible de $\mathbb{G}\ *$ reemplazando "*" por $(\mathbb{E}\ *)$. Obsérvese también que $(\mathbb{G}\ \mathbb{E}\ )x$ no es directamente dependiente de $\mathbb{G}\ y$.

Definición 8.3. Dos términos M y N son independientes si y solamente si:

- Todo subtérmino molecular de M no es directamente dependiente de N.
- Todo subtérmino molecular de N no es directamente dependiente de M.

Y finalmente:

Definición 8.4. Un sistema $\mathfrak{C}$ es un *sistema estándar* si

- Todas las matrices de las reglas de $\mathfrak{C}$ son matrices combinadoras lineales.
- Todas las matrices redex de las reglas de $\mathfrak{C}$ son independientes dos a dos.

Lema 8.1. *Todo sistema standard es conservativo (y consecuentemente Church-Rosser).*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\mathfrak{C}$ es un sistema estándar que no es conservativo. Entonces $\mathfrak{C}$ tiene que contener cuatro términos: M, N, P y Q tales que:

(1) La ficha de salida de M está en estado activo,
(2) N es un subtérmino de M con ficha de salida activa.
(3) Q es un subtérmino de P,
(4) N es inmediatamente reducible a Q.
(5) La reducción de N a Q reduce M a P.
(6) La ficha de salida de P no está en estado activo.

Llamaremos a $(M, N; P, Q)$ un *contraejemplo* al conservatismo, ver Figura 16.

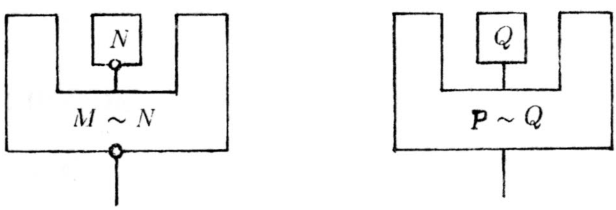


FIGURA 16. Contraejemplo al conservatismo

Sean:

(1) $A_{x_1,\ldots,x_m} \rhd B$ la regla lineal de reducción para M,
(2) $C_{x_1,\ldots,x_n} \rhd D$ la regla lineal de reducción para N.

Entonces debe haber términos $S_1, \ldots, S_m$ y $T_1, \ldots, T_n$ tales que:

(1) $M = [x_1 \leftarrow S_1, \ldots, x_m \leftarrow S_m]A$.
(2) $N = [x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n]C$ y $Q = [x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n]D$

Ahora, si el subtérmino N de M es un subtérmino de unos de los S' entonces el término P sigue teniendo la ficha de salida en estado activo, contrariamente a la suposición que $(M, N; P, Q)$ era un contraejemplo al conservatismo. La alternativa es que uno o más de los términos S sean subtérminos de N.

El esqueleto de la matriz redex A es $[x_1 \leftarrow *, \ldots, x_m \leftarrow *]A$ y el esqueleto de la matriz redex C es $[x_1 \leftarrow *, \ldots, x_n \leftarrow *]C$. Pues entonces el esqueleto de C se debe poder obtener en reemplazando algunas de las "*" en el esqueleto de A por otros esqueletos. En otras palabras, las matrices A y C no son independientes en contradicción a la suposición que el sistema $\mathfrak{C}$ era estándar.

Bibliografía

1. Hendrick Barendregt, *The lambda Calculus*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, 1980.
2. Alonzo Church, *A set of postulates for the foundation of logic*, Annals of Mathematics **33** (1932), 346–366.
3. Gottlob Frege, *Gegriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens*, Halle, 1879.

(*Recibido en diciembre de 1992*)

Departamento de Matématicas, Universidad de Maryland, College Park, MD 20742 - EE. UU. AA.

E-mail: egkle@ math.umd.edu