Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXVII (1993), págs. 281 – 292

SOLUCIONES POSITIVAS DE UN MODELO DE COMPETENCIA DE ESPECIES.

VICTOR MANUEL ARDILA DE LA PEÑA

ABSTRACT. Positive solutions are given for an elliptic system which models a predator-prey situation, utilizing The methods of super and subsolutions, and global bifurcation.

§ 1. INTRODUCCION.

Consideremos el sistema elíptico con condiciones de frontera dado por :

$$\text{(I)}\qquad \begin{gathered} -\Delta u = u\,[\,a - a_1u - a_2v\,] \text{ en } \Omega, \\ -\Delta v = v\,[\,b - b_1v + b_2u\,] \text{ en } \Omega, \\ u\,|_{\delta\Omega} \equiv 0,\ v\,|_{\delta\Omega} \equiv 0. \end{gathered}$$

con a_1, a_2, b_1, b_2, a, y b, constantes positivas; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, Ω un conjunto abierto conexo (dominio) acotado, con frontera $\delta\Omega \in C^{2+\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$ y $u,v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Este es un problema de competencia de especies, del tipo Volterra-Lotka, donde u y v representan respectivamente las concentraciones en Ω de la presa y del depredador; a es la rata de crecimiento de la presa, b la del depredador y a_1, a_2, b_1 y b_2 son coeficientes de interacción entre dichas especies.

El problema (I) ha sido tratado por Leung [6], donde se ha demostrado la existencia de soluciones en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, positivas en Ω, bajo

las hipótesis siguientes:
i) $a > \lambda_1$; ii) $b > \lambda_1$; iii) $a_2 b_2 < b_1 a_1$, y

iv) $a > \dfrac{b_1 a_1}{a_1 b_1 - a_2 b_2}\left(\lambda_1 + \dfrac{a_2 b}{b_1}\right)$.

En lo anterior λ_1 es el autovalor principal del problema siguiente:

$$-\Delta u = \lambda u \text{ en } \Omega, \quad u\,|_{\partial\Omega} \equiv 0,$$

con autofunción φ_0 tal que $\| \varphi_0 \|_\infty = 1$ y $\varphi_0 > 0$ en Ω.

Leung utiliza el método de las sub y supersoluciones. (Ver referencias para éstas al final de la sección 2).

Blat y Brown [3], trabajan un problema similar y usan la Teoría de bifurcación global. (Ver una referencia para ésta al final de la sección 2).

En este trabajo, demostraremos que el problema (I) tiene soluciones positivas en Ω, bajo las hipótesis siguientes:

(1) $a > \lambda_1$.

(2) $1 - \frac{\lambda_1}{a} > r_0 > \tau$, con $\tau =: \left(\dfrac{a_1 a_2 + a_2 b_2}{a_1 b_1}\right) m^*$, y $m^* =: \text{máx}\left\{2, \frac{b}{a}\right\}$

(3) Para $\bar{b} = b + b_2 u_0$, $0 < \hat{\hat{\lambda}} < 1$, donde $\hat{\hat{\lambda}}$ es el autovalor principal del problema dado por

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} -\Delta u &= \lambda\, \bar{b}\,(x)\, u \quad \text{en } \Omega \\ u\,|_{\partial\Omega} &\equiv 0 \\ u &> 0 \qquad \text{en } \Omega \end{aligned}$$

siendo u_0, la única solución positiva en Ω, del problema:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} -\Delta u &= u\,[\,\bar{a} - a_1 u\,] \quad \text{en } \Omega, \ \bar{a} =: a - a r_0, \\ u\,|_{\partial\Omega} &\equiv 0. \end{aligned}$$

La existencia de un autovalor para (II) es consecuencia de un conocido teorema acerca de operadores positivos (Ref. [5], teorema 2-5) y de un Principio del Máximo. (Ver referencias para éste al final de la sección 2). La hipótesis (2) es similar a la iv) de Leung. Además, si $\lambda_1 < b$, obviamente se tiene que $0 < \hat{\lambda} < 1$. Por esto, nuestras hipótesis son un poco más suaves que las de Leung en [6].

Aquí. usaremos el método de las sub y supersoluciones para determinar supersoluciones de (I) y el de bifurcación global para la determinación de subsoluciones de(I). (Algunas pruebas más detalladas de varios lemas pueden consultarse en la Ref.[2]).

§ 2. NOTACIONES Y RESULTADOS.

Usaremos los espacios usuales de funciones Hölder-continuas $C^\alpha(\bar\Omega)$, $C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$ y $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ con $0 < \alpha < 1$. También usaremos el cono dado por $\mathbb{P} = \{u \in C^\alpha(\bar\Omega) \mid u \geq 0 \text{ en } \Omega\}$ y la definición usual de punto de bifurcación global por soluciones positivas respecto a $\mathbb{P}$ (Ver referencia para esto al final de esta sección). Notaremos con j al operador dado por $j = i_0 \circ (-\Delta)^{-1}$, donde i_0 es la inyección canónica de $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ en $C^\alpha(\bar\Omega)$ y $(-\Delta)^{-1}: C^\alpha(\bar\Omega) \to C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$.

Utilizaremos los siguientes dos truncamientos: σ^* y σ^{**}, dados para $v \in \mathbb{P}$ y $x \in \bar\Omega$, mediante:

$$\sigma^*(v)\,(x) = \begin{cases} v(x) \text{ si } v(x) \leq \gamma, \\ \gamma \text{ si } v(x) > \gamma, \end{cases}$$

donde

$$\gamma = \frac{(\bar a - \lambda_1) - a_1\epsilon_1}{a_2},\ \bar a = a - ar_0 \text{ y } 0 < \epsilon_1 < \frac{\bar a - \lambda_1}{a_1}.$$

$$\sigma^{**}(v)\,(x) = \begin{cases} v(x) \text{ si } v(x) \leq \dfrac{b}{b_1}, \\ \dfrac{b}{b_1} \text{ si } v(x) > \dfrac{b}{b_1}. \end{cases}$$

El resultado central del artículo será el siguiente:

[2.1]. TEOREMA: *Bajo las hipótesis (1), (2) y (3) dadas en la Introducción, el problema (I) tiene al menos una solución (u, v) con* $u,v \in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$, y $u,v > 0$ *en* Ω.

Para la demostración de este teorema requeriremos de varios lemas, los cuales enunciaremos y probaremos en la siguiente sección. Con alguna frecuencia utilizaremos los siguientes tres resultados:

[2.2]. Existe $C > 0$, tal que para toda

$$f \in C^{2+\alpha}(\bar\Omega),\ \| f \|_\alpha \leq C \, \| Lf \|_\infty,$$

donde L es un operador uniformemente elíptico de la forma Lf =

$(-\Delta f) + rf$, con $r \geq 0$. (Esto es consecuencia del Teorema de Inmersión de Sobolev (Ref. [1], teorema 5.4) y del estimativo de Agmon-Douglis-Niremberg (Ref. [6], teorema A3-3)).

[2.3]. Si L es un operador como en [2.2], entonces para cada función $g \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, el problema dado por:

$$\begin{cases} Lu = g(x) \text{ en } \Omega, \\ u\,|_{\partial\Omega} \equiv 0, \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ y existe una constante $K_0 > 0$, independiente de g, tal que: $\| u \|_{2+\alpha} \leq K_0 \| g \|_{\alpha}$. (Ref. [6], teorema 1.3-3).

[2.4]. Si $0 < \alpha < \beta < 1$, entonces el operador de inclusión i_1: $C^{1+\beta}(\Omega) \longrightarrow C^{1+\alpha}(\Omega)$ es completamente continuo. (Ref. [1], teorema 1-31).

También haremos uso de las siguientes definiciones y propiedades, las cuales referenciamos a continuación:

Supersoluciones y subsoluciones (Ref. [6], pag. 45).

Punto de bifurcación global (Ref. [4], sección 29.2, pag. 402).

Un Principio del Máximo (Ref. [7], teorema 6, pag. 64).

Un teorema de comparación (Ref. [2], teorema 0-25, pags. 10 y 48).

§ 3. LEMAS PRELIMINARES.

3.1. LEMA: *Si $\underline{u}$, $\bar{u}$, $\underline{v}$, $\bar{v} \in C^2(\bar{\Omega})$, satisfacen las desigualdades siguientes:*

a) $-\Delta\underline{u} \leq \underline{u}\,(a - a_1\underline{u} - a_2\bar{v})$ *en* Ω,

b) $-\Delta\bar{u} \geq \bar{u}\,(a - a_1\bar{u} - a_2\underline{v})$ *en* Ω,

c) $-\Delta\underline{v} \leq \underline{v}\,(b - b_1\underline{v} + b_2\underline{u})$ *en* Ω,

d) $-\Delta\bar{v} \geq \bar{v}\,(b - b_1\bar{v} + b_2\bar{u})$ *en* Ω, *y*

e) $0 \leq \underline{u} \leq \bar{u}$; $0 \leq \underline{v} \leq \bar{v}$ *en* $\bar{\Omega}$,

entonces existe una solución (u, v) *de (I) tal que* $u,v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, *y* :

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u}\,,\ y\,,\ \underline{v} \leq v \leq \bar{v} \text{ en } \Omega.$$

Demostración: Sean ρ y σ los truncamientos definidos para $u,v \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ y $x \in \bar{\Omega}$ por:

$$(\rho u)(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) \text{ si } u(x) > \bar{u}(x), \\ u(x) \text{ si } \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), \\ \underline{u}(x) \text{ si } u(x) < \underline{u}(x) \end{cases}$$

$$(\sigma v)(x) = \begin{cases} \overline{v}(x) \text{ si } v(x) > \overline{v}(x), \\ v(x) \text{ si } \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x), \\ \underline{v}(x) \text{ si } v(x) < \underline{v}(x) \end{cases}$$

Para u,v $\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, definamos también el operador T así :

$$T(u,v) =: (j \circ \{(\rho u)[a-a_1(\rho u)-a_2(\sigma v)]\}, j \circ \{(\sigma v)\,[b - b_1(\sigma v) + b_2(\rho u)]\}).$$

Consideremos ahora el problema siguiente:

$$\textbf{[3.2]} \quad \begin{aligned} -\Delta u &= (\rho u)\,[a - a_1(\rho u) - a_2(\sigma v)] \text{ en } \Omega \\ -\Delta v &= (\sigma v)\,[b - b_1(\sigma v) + b_2(\rho u)] \text{ en } \Omega \\ u\,|_{\partial\Omega} &\equiv 0 \\ v\,|_{\partial\Omega} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Definamos ahora el espacio $\bar{\mathbb{E}} = \Big\{ (u,v) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})\times C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \mid \forall x \in \partial\Omega,\ u(x)=0,\ v(x)=0 \Big\}$.

Para $(u,v) \in \bar{\mathbb{E}}$, consideremos la norma dada por

$$\|\,(u,v)\,\|_{\bar{\mathbb{E}}} =: \text{máx}\Big\{\|u\|_{\alpha}\,,\,\|v\|_{\alpha}\Big\}.$$

Es fácil ver que $\bar{\mathbb{E}}$ es un espacio de Banach con esta norma, que T aplica $\bar{\mathbb{E}}$ en $\bar{\mathbb{E}}$, y que T es completamente continuo. Por [2.2] y el Teorema del Punto Fijo de Schauder podemos encontrar u,v $\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, tales que (u,v) es solución de **[3.2]**. Por el Principio del Máximo (referenciado en la sección 2), las hipótesis acerca de $\underline{u}$, $\bar{u}$, $\underline{v}$ y $\bar{v}$, y por reducción al absurdo, se prueba que $\rho u = u$ y $\sigma v = v$ en $\bar{\Omega}$, lo que termina de probar el lema. □

Consideremos el problema:

$$\textbf{[3.3]} \quad \begin{aligned} -\Delta u &= u\,[\,m^{*}a - a_1\,u\,] \text{ en } \Omega,\ m^{*} = \max\,\{\,2, \tfrac{b}{a}\,\}, \\ u\,|_{\partial\Omega} &\equiv 0. \end{aligned}$$

3.4. LEMA: *Existe una única solución* $\theta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, *del problema* [3.3], *tal que* $\theta > 0$ *en* Ω.

Demostración: Si v es una supersolución y w es una subsolución del problema **[3.3]** en $C^2(\bar{\Omega})$, con $w \leq v$ en $\bar{\Omega}$, entonces por el Principio del Máximo (ya referenciado en la sección 2) y [2.3], existen sucesiones $\{\underline{u}_n\}$ y $\{\bar{u}_n\}$ en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ tales que:

$$\begin{Bmatrix} L_2\bar{u}_1 = g(v) \text{ en } \Omega;\ \bar{u}_1\,|_{\partial\Omega} \equiv 0 \\ L_2\underline{u}_1 = g(w) \text{ en } \Omega;\ \underline{u}_1\,|_{\partial\Omega} \equiv 0 \end{Bmatrix}.$$

y para cada $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{Bmatrix} L_2\bar{u}_{n+1} = g(\bar{u}_n) \text{ en } \Omega; \ \bar{u}_{n+1}\,|_{\partial\Omega} \equiv 0 \\ L_2\underline{u}_{n+1} = g(\underline{u}_n) \text{ en } \Omega; \ \underline{u}_{n+1}\,|_{\partial\Omega} \equiv 0 \end{Bmatrix}.$$

$$w \le \underline{u}_n \le v \text{ en } \bar{\Omega}; \ w \le \bar{u}_n \le v \text{ en } \bar{\Omega},$$
$$\bar{u}_n \ge \bar{u}_{n+1} \text{ en } \bar{\Omega},$$
$$\underline{u}_n \le \underline{u}_{n+1} \text{ en } \bar{\Omega},$$
$$\underline{u}_n \le \bar{u}_n \text{ en } \bar{\Omega},$$

donde $L_2u = -\Delta u + ru$, $g(u) = u(m^*a + r - a_1u)$ y $r > 0$ suficientemente grande tal que g resulte creciente en el intervalo $[\operatorname*{Inf}_{\bar{\Omega}} w \, , \operatorname*{Sup}_{\bar{\Omega}} v]$.

Por [2.2], [2.3] y [2.4], obtenemos que dichas sucesiones son de Cauchy en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, luego existen funciones $\hat{u}$, $\hat{\hat{u}} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, soluciones de **[3.3]**, tales que $w \le \hat{u} \le \hat{\hat{u}} \le v$ en $\bar{\Omega}$. Por inducción y usando la monotonía de g y otra vez el Principio del Máximo, se demuestra que cualquier solución $z \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ de **[3.3]** que satisfaga $w \le z \le v$ en $\bar{\Omega}$, también satisface $\hat{u} \le z \le \hat{\hat{u}}$ en $\bar{\Omega}$.

Como $\bar{\bar{u}} = \frac{m^*a}{a_1}$ y $\underline{\underline{u}} = \delta_0 \varphi_0$ con $0 < \delta_0 < \frac{m^*a - \lambda_1}{a_1}$, son respectivamente super y subsolución en $C^2(\bar{\Omega})$ de **[3.3]**, entonces existen $\hat{\theta}$, $\hat{\hat{\theta}} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, soluciones de **[3.3]**, tales que $\underline{\underline{u}} \le \hat{\theta} \le \hat{\hat{\theta}} \le \bar{\bar{u}}$ en $\bar{\Omega}$.

Del Teorema de Comparación (referenciado en la sección 2), existe una única solución de **[3.3]**, positiva en Ω. □

Consideremos el siguiente problema:

[3.5]
$$\begin{aligned} -\Delta u &= u\,(\, m^*a - a_1u - a_2v \,) \text{ en } \Omega, \\ -\Delta v &= v\,(\, m^*a - b_1v + b_2u \,) \text{ en } \Omega, \\ u\,|_{\partial\Omega} &\equiv 0; \ v\,|_{\partial\Omega} \equiv 0. \end{aligned}$$

[3.6]. LEMA: *Sea θ la solución de* **[3.3]**, *con $\theta > 0$ en Ω, dada por el lema 3.4, entonces el problema* **[3.5]**, *tiene al menos una solución (u,v), con $u > 0$, $v > 0$ en Ω.*

Demostración : Supongamos que $u = \alpha_1\theta$, y, $v = \beta_1\theta$, con α_1 y β_1 a determinar, tales que (u,v) es solución de **[3.5]**. Entonces tenemos que :

$$\alpha_1(-\Delta\theta) = \alpha_1\theta\,(m^*a - a_1\alpha_1\theta - a_2\beta_1\theta) \text{ en } \Omega,$$
$$\beta_1(-\Delta\theta) = \beta_1\theta\,(m^*a - b_1\beta_1\theta + b_2\alpha_1\theta) \text{ en } \Omega.$$

Además, $u\,|_{\partial\Omega} \equiv 0$ y $v\,|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Tenemos que :

$$\alpha_1(\ \theta[\mathrm{am}^* - \mathrm{a}_1\theta]\ ) = \alpha_1\theta\ (\mathrm{m}^*\mathrm{a} - \mathrm{a}_1\alpha_1\theta - \mathrm{a}_2\beta_1\theta) \text{ en } \Omega,$$
$$\beta_1(\ \theta[\mathrm{am}^* - \mathrm{a}_1\theta]\ ) = \beta_1\theta\ (\mathrm{m}^*\mathrm{a} - \mathrm{b}_1\beta_1\theta + \mathrm{b}_2\alpha_1\theta) \text{ en } \Omega.$$

Luego si α_1, $\beta_1 \neq 0$, obtenemos de las dos ecuaciones anteriores, que

$$\begin{cases} -\mathrm{a}_1 = -\mathrm{a}_1\alpha_1 - \mathrm{a}_2\beta_1, \\ -\mathrm{a}_1 = -\mathrm{b}_1\beta_1 + \mathrm{b}_2\alpha_1. \end{cases}$$

Este sistema tiene como solución :

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{b}_2},\ \beta_1 = \frac{\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_1\mathrm{b}_2}{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{b}_2}$$

Además, es claro que si $\mathrm{u} = \alpha_1\theta$, y $\mathrm{v} = \beta_1\theta$, con α_1 y β_1 dados antes, (u,v) es solución de **[3.5]**, y también tenemos que $\mathrm{u} > 0$ y $\mathrm{v} > 0$ en Ω, ya que $\beta_1 > 0$ es obvio, y $\alpha_1 > 0$, ya que por la Hipótesis General (2),

$$\mathrm{b}_1 > \frac{(1 + \frac{\mathrm{b}_2}{\mathrm{a}_1})\ \mathrm{a}_2\mathrm{m}^*\mathrm{a}}{\mathrm{a} - \lambda_1} > \frac{(1 + \frac{\mathrm{b}_2}{\mathrm{a}_1})\ \mathrm{a}_2\mathrm{m}^*\mathrm{a}}{\mathrm{a}} > \mathrm{a}_2\mathrm{m}^* > \mathrm{a}_2;\ \text{luego } \mathrm{b}_1 > \mathrm{a}_2.$$

Esto termina de demostrar el Lema. □

Usando la función σ^* definida en la sección 2, enunciamos el siguiente problema para cada $\mathrm{v} \in \mathbb{P}$:

$$\textbf{[3.7]}\qquad \begin{aligned} -\Delta\mathrm{u} &= \mathrm{u}\ [\ \bar{\mathrm{a}} - \mathrm{a}_1\mathrm{u} - \mathrm{a}_2\ \sigma^*(\mathrm{v})\ ] \text{ en } \Omega,\ \bar{\mathrm{a}} = \mathrm{a} - \mathrm{ar}_0, \\ \mathrm{u}\,|_{\partial\Omega} &\equiv 0. \end{aligned}$$

[3.8]. LEMA: *Para cada* $v \in \mathbb{P}$, *existe una única función* $\mathrm{u} = \mathrm{U}(\mathrm{v}) \in \mathbb{P} \cap C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, *tal que u es solución de* **[3.7]** *y* $\mathrm{u} > 0$ *en* Ω.

Demostración : Se efectúa un procedimiento similar al del Lema 3.4. □

[3.9]. LEMA: *Existe una única solución en* $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, *del problema (III), la cual es positiva en* Ω.*(La llamaremos* u_0*).*

Demostración : Es una consecuencia inmediata del lema 3.8. □

[3.10]. LEMA: *Si* v_1, $v_2 \in \mathbb{P}$ *y* $v_1 \leq v_2$ *en* $\bar{\Omega}$ *y para cada* $v \in \mathbb{P}$, *U(v) es la función definida por el lema 3.8, entonces* $U(v_1) \geq U(v_2)$ *en* $\bar{\Omega}$.

Demostración : Supongamos que v_1, $\mathrm{v}_2 \in \mathbb{P}$, y que $\mathrm{v}_1 \leq \mathrm{v}_2$; entonces es sencillo ver primero que $\sigma^*(\mathrm{v}_1) \leq \sigma^*(\mathrm{v}_2)$. Denotemos con $\mathrm{w}_1 = \mathrm{U}(\mathrm{v}_1)$ y $\mathrm{w}_2 = \mathrm{U}(\mathrm{v}_2)$, entonces:

$$-\Delta\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1[\mathrm{a} - \mathrm{a}_1\mathrm{w}_1 - \mathrm{a}_2\sigma^*(\mathrm{v}_1)] \geq \mathrm{w}_1[\mathrm{a} - \mathrm{a}_1\mathrm{w}_1 - \mathrm{a}_2\sigma^*(\mathrm{v}_2)],$$

entonces w_1 es una supersolución de **[3.7]**, para $\mathrm{v} = \mathrm{v}_2$; se toma $\bar{\mathrm{y}} = \delta\varphi_0 \leq \mathrm{w}_1$, subsolución de **[3.7]** para $\mathrm{v} = \mathrm{v}_2$, entonces, $\delta\varphi_0 \leq \mathrm{w}_2 \leq \mathrm{w}_1$. □

[3-11]. LEMA: *Si $0 < \alpha < \beta < 1 - \frac{N}{p}$, existe un operador lineal T_1:*

$C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, continuo, tal que $T_1 \mid_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \equiv (-\Delta)^{-1}$, y existe $C \in \mathbb{R}^+$ independiente de u tal que $\|T_1(u)\|_{1+\beta} \leq C\ \|u\|_\infty$, para cada $u \in C^0(\bar{\Omega})$.

Demostración: Para $u \in C^0(\bar{\Omega})$, existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathbb{A} = C^\alpha(\bar{\Omega})$, tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - u\|_\infty = 0$. Por [2.2], existe una constante positiva C, tal que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\|(-\Delta)^{-1}(f_n)\|_{1+\beta} \leq C\ \|f_n\|_\infty$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $v_n = (-\Delta)^{-1}(f_n)$. Por lo anterior, tenemos que $\|v_n - v_m\|_{1+\beta} \leq C\ \|f_n - f_m\|_\infty$, luego la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy en el espacio $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, de donde existe $\bar{v} \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$ tal que: $\lim_{n\to\infty} \|v_n - \bar{v}\|_{1+\beta} = 0$. Definamos el operador T_1, mediante la igualdad siguiente: $T_1(u) = \bar{v}$. Entonces es claro que T_1: $C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$. Con un procedimiento de rutina, podemos comprobar que T_1 está bien definido, es lineal continuo, que la restricción de T_1 a $\mathbb{A}$ es precisamente $(-\Delta)^{-1}$ y que para todo $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $\|T_1(u)\|_{1+\beta} \leq C\ \|u\|_\infty$. □

[3.12]. LEMA: *Con la notación del lema 3.8, si $v_0 \in \mathbb{P}$, entonces:*

$$\lim_{\|v-v_0\|_\infty \to 0} \|U(v) - U(v_0)\|_\infty = 0$$

Demostración. Sea $\{s_n\}$ una sucesión en $\mathbb{P}$, tal que :

$$\lim_{n\to\infty} \|\ s_n - v_0\ \|_\infty = 0.$$

Sea $\{U(s_{n_k})\}$ una subsucesión arbitraria de $\{\ U(s_n)\ \}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, sea $w_k = s_{n_k}$.

Por [2.4] obtenemos que existe $\{U(w_{k_i})\}$, subsucesión de $\{U(w_k)\}$, convergente a una función $t \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$; si llamamos $z_i = w_{k_i} = s_{n_{k_i}}$, entonces :

$$\lim_{i\to\infty} \|\ U(z_i) - t\ \|_{1+\alpha} = 0.$$

Consideremos ahora el operador $T_1 : C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, dado en el lema anterior.

Entonces, para cada $i \in \mathbb{Z}^+$:

$$U(z_i) = T_1\ (U(z_i)\ [\ \bar{a} - a_1\ U(z_i) - a_2\sigma^*(z_i)\ ])\ \text{en}\ \Omega,$$
$$U(z_i) \mid_{\partial\Omega} \equiv 0.$$

Tomando límite cuando i tiende a $+\infty$ en las igualdades anteriores, tenemos que:

$$t = T_1(\ t\ [\ \bar{a} - a_1\ t - a_2\ \sigma^*(v_0)\ ]\ )\ \text{en}\ \Omega,\ \text{y}\ t \mid_{\partial\Omega} \equiv 0.$$

Como $t\,[\bar{a} - a_1 t - a_2\,\sigma^*(v_0)] \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, entonces obtenemos que

$$t \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}),\ \text{y: } -\Delta t = t[\,\bar{a} - a_1 t - a_2\sigma^*(v_0)\,] \text{ en } \Omega,$$

Por el lema 3.10, es fácil ver que: $t > 0$ en Ω.

Por la unicidad de $U(v_0)$ dada por el lema 3.8, concluimos que $t = U(v_0)$ en $\bar{\Omega}$.

De esto, y como $\{\,U(s_{n_k})\,\}$ es cualquier subsucesión de $\{U(s_n)\}$, entonces tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\,U(s_n) - U(v_0)\,\|_{1+\alpha} = 0$, lo cual implica que

$$\lim_{\|v - v_0\|_\infty \to 0} \|\,U(v) - U(v_0)\,\|_\infty = 0. \qquad \square$$

[3.13]. LEMA: *Con las notaciones del lema 3.8, se cumple que :* $\lim\limits_{\|v\|_\alpha \to 0} \|\,U(v) - u_0\,\|_\alpha = 0$, *donde* u_0 *es dada en el lema 3.9.*

Demostración: Sea $\{v_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{P}$, con $\lim\limits_{n\to\infty} \|\,v_n\,\|_\alpha = 0$, entonces, es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\,\sigma^*(\,v_n\,)\,\|_\alpha = 0$. Sea $\{U(v_{n_k})\}$ cualquier subsucesión de $\{U(v_n)\}$.

Por [2.4] tenemos que existen $\{U(v_{n_{k_i}})\}$ subsucesión de $\{U(v_{n_k})\}$, y $w \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, tales que $\lim\limits_{i\to\infty} \|\,U(v_{n_{k_i}}) - w\,\|_{1+\alpha} = 0$.

Denotando $w_i \equiv U(v_{n_{k_i}})$, entonces $\lim\limits_{i\to\infty} \|\,w_i - w\,\|_\alpha = 0$.

Usando el lema 3.10, podemos demostrar que $w > 0$ en Ω. Es fácil ver que la sucesión $\{w_i\}$ es de Cauchy en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, luego existe $\bar{w} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, tal que :

$$\lim_{i\to\infty} \|\,w_i - \bar{w}\,\|_{2+\alpha} = 0. \text{ Por lo tanto } w \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Como para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, w_i satisface : $-\Delta w_i = w_i\,[\,\bar{a} - a_1 w_i - a_2\sigma^*(v_{n_k})\,]$ en Ω, entonces tomando límite cuando $i \longrightarrow \infty$, obtenemos : $-\Delta w = w\,[\,\bar{a} - a_1 w\,]$ en Ω.

De esto y la unicidad de u_0 dada por el Lema 3.9, entonces : $w = u_0$ en $\bar{\Omega}$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \|\,U(v_n) - u_0\,\|_\alpha = 0. \square$$

[3.14]. LEMA: *Si* $\hat{\lambda}$ *es el autovalor mencionado en la hipótesis general (3), y* F_0 *se define para* $x \in \bar{\Omega}$, $v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ y $\lambda \geq 0$ *como* $F_0(\lambda, v) = \lambda R(v) + G_1(\lambda, v)$, *donde* $R(v) = j[\bar{b}v]$, $\bar{b}(x) = b + b_2 u_0(x)$, $G_1(\lambda, v) = \lambda\, G(v)$, $G(v) = j\,[(-b_1\sigma^{**}(v) + b_2(U(v) - u_0))\,v\,]$, y $U(v)$ *y* u_0 *son las* *dadas por los lemas en* [3.8] y [3.9], *respectivamente, entonces tenemos que* $(\hat{\lambda}, 0)$ *es un punto de bifurcación global por soluciones positivas respecto al cono* $\mathbb{P}$, *del problema dado por :*

$$v = F_0(\lambda, v)$$

Demostración : Es claro que R: $C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ es un operador lineal completamente continuo, donde R está dado en el enunciado. Además por el Principio del Máximo (ya mencionado antes), R es un operador positivo respecto al cono $\mathbb{P}$.

Ahora, para $v \in \mathbb{P}$, $\dfrac{\| b_2(U(v) - u_0)\, v \|_\alpha}{\|v\|_\alpha} \leq 3b_2\| U(v) - u_0 \|_\alpha$,

entonces usando el Lema 3.13, tenemos que :

$$\lim_{\|v\|_\alpha \to 0} \frac{\| b_2(U(v) - u_0)\, v \|_\alpha}{\|v\|_\alpha} = 0.$$

Por lo tanto, con λ en subconjuntos compactos de $[0, +\infty)$, $G_1(\lambda, v) = o(\|v\|_\alpha)$ cuando $\|v\|_\alpha \longrightarrow 0$, uniformemente en λ, donde G_1 está definido en el enunciado del lema.

Por [2.2], [2.3] y el lema 3.12, podemos demostrar que el operador G_1 es continuo, considerado de $[0, +\infty) \times \mathbb{P}$ en $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. También es fácil ver que G_1, considerado de $[0, +\infty) \times \mathbb{P}$ en $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, es completamente continuo.

Además, el único punto fijo en $\mathbb{P}$ del operador $G_1(0, v)$ es $v \equiv 0$.

Tomemos ahora $(\lambda, v) \in [0, +\infty) \times \mathbb{P}$, entonces :

$$\begin{aligned}(-\Delta)(F_0(\lambda, v)) &= \lambda\, [\, \bar{b}v - b_1 v\, \sigma^{**}(v) + b_2 v\, (\, U(v) - u_0\,)\,] \\ &= \lambda v\, [\, b - b_1\, \sigma^{**}(v) + b_2\, U(v)\,] \geq 0.\end{aligned}$$

Además, es claro que $F_0(\lambda, v)\,|_{\partial\Omega} \equiv 0$; por lo tanto, tenemos que $F_0(\lambda, v) \geq 0$ en $\bar{\Omega}$.

Como además $F_0(\lambda, v) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, entonces $F_0(\lambda, v) \in \mathbb{P}$, si $(\lambda, v) \in [0, +\infty) \times \mathbb{P}$.

Por resultados conocidos acerca de operadores positivos (Ref. [5], teoremas 2-10 y 2-11), podemos probar que $\frac{1}{\hat{\lambda}}$ es un autovalor simple del operador $R\,|_{\mathbb{P}}$.

Por un resultado básico sobre bifurcación global por soluciones positivas (Ref. [4], teorema 29.2), podemos concluir que $(\hat{\lambda}, 0)$ es un punto de bifurcación global por soluciones positivas (respecto al cono $\mathbb{P}$), para el problema dado por: $v = F_0(\lambda, v)$. □

§ 4. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DADO EN [2-1].

Por el lema 3.1, es suficiente demostrar que existen funciones $\underline{u}$, $\bar{u}$, $\underline{v}$, $\bar{v} \in C^2(\bar{\Omega})$, que satisfagan las desigualdades que aparecen en el enunciado de dicho lema, con $\underline{u}$, $\underline{v} > 0$ en Ω.

Definamos $\bar{u}$ y $\bar{v}$ así : $\bar{u} = \alpha_1\, \theta$; $\bar{v} = \beta_1\, \theta$ en $\bar{\Omega}$, según fueron dadas en el lema 3.6. Resta definir $\underline{u}$, y $\underline{v}$. Para ello, partiremos del resultado del lema 3-14, según el cual existe una sucesión $\{\ \sigma_n\ \}$ en $[0, +\infty)$, y existe una sucesión $\{\ t_n\ \}$ en $\mathbb{P} - \{\ 0\ \}$, de tal forma que: $\lim_{n\to\infty} |\ \sigma_n - \lambda\ | = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|\ t_n\ \|_\alpha = 0$, y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $t_n = F_0(\sigma_n, t_n)$, ó sea: $-\Delta t_n = \sigma_n t_n$ $[\ \bar{b}(x) - b_1\sigma^{**}(t_n) + b_2\ (\ U(t_n) - u_0\ )\ ]$ en Ω y $t_n\,|_{\partial\Omega} \equiv 0$.
Pero esto equivale a: $-\Delta t_n = \sigma_n t_n\ [\ b - b_1\sigma^{**}(t_n) + b_2\ U(t_n)\ ]$ en Ω; $t_n\,|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Sean $\underline{v} = t_{n_0}$, y $\underline{u} = U(t_{n_0})$, donde $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, se escoge de tal forma que: $0 < \sigma_{n_0} < 1$, (aquí se usa la hipótesis general (3)), $\underline{v} \le \frac{b}{b_1}$, $\underline{v} \le \gamma$ y $\underline{v} \le \bar{v}$ en $\bar{\Omega}$.

Del lema 3.6, es claro que: $-\Delta\bar{v} \ge \bar{v}\ [\ b - b_1\bar{v} + b_2\bar{u}\ ]$ en Ω.

Como $a - a_2\bar{v} \ge \bar{a} - a_2\underline{v}$ en Ω, entonces $-\Delta\bar{u} \ge \bar{u}\ [\ a - a_1\bar{u} - a_2\underline{v}\ ]$ en Ω y también $-\Delta\underline{u} \le \underline{u}\ [\ a - a_2\bar{v} - a_1\underline{u}\ ]$ en Ω.

Por la definición de $\underline{v}$, tenemos también que:

$$-\Delta\underline{v} \le \underline{v}\ [\ b - b_1\underline{v} + b_2\underline{u}\ ] \text{ en } \Omega.$$

Por lo tanto por el lema 3.1, existe (u,v) solución de (I), tal que $u,v \in \mathbb{H}$, $\underline{u} \le u \le \bar{u}$, y $\underline{v} \le v \le \bar{v}$ en Ω; de estas desigualdades y como $\underline{u}$, $\underline{v} > 0$ en Ω, tenemos que también $u,v > 0$ en Ω.□

BIBLIOGRAFIA

[1] Adams R. A., *Sobolev Spaces,* Academic Press Inc., Orlando, 1975.

[2] Ardila V. M., *Soluciones Positivas de un Modelo de Competencia de Especies (Ecologia),* Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1991.

[3] Blat J. and Brown K. J., *Global Bifurcation of Positive Solutions in some systems of Elliptic Equations,* SIAM J. Math. Anal., vol. 17, #6 Nov. 1986.

[4] Deimling K., *Nonlinear Functional Analysis,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.

[5] Krasnosel'skii M. A., *Positive Solutions of Operator Equations,* P. Noordhoff Ltd., Groningen, (Translated from the russian by Richard E. Flaherty), 1964.

[6] Leung A. W., *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations. Applications to Biology and Engineering,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[7] Protter M. H. and Weinberger H. F., *Maximum Principles in Differential Equations,* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SANTAFÉ DE BOGOTÁ - COLOMBIA