

Construcción de soluciones radialmente simétricas para un problema elíptico semilineal

HORACIO ARANGO
 JORGE COSSIO*

Universidad Nacional de Colombia, Medellín

ABSTRACT. In this paper we present a method for constructing explicit radially symmetric solutions to the semilinear elliptic problem $\Delta v + f(v) = 0$ in B , where B is a ball in \mathbb{R}^N , and f is a continuous piecewise linear function. A result of E. Deumens and H. Warchall (see [4]) has inspired our construction of solutions. Our method relies on the construction of a spline of Bessel's functions and the shooting method.

Key words and phrases. Semilinear elliptic equations, radially symmetric solutions, shooting method.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 35B30. Secondary 35A40, 65D07.

RESUMEN. En este artículo se presenta un método que permite construir soluciones radialmente simétricas de ecuaciones elípticas semilineales del tipo $\Delta v + f(v) = 0$ en B , donde B es una bola en \mathbb{R}^N y f es una función continua lineal por tramos. Un resultado de E. Deumens y H. Warchall (ver [4]) ha inspirado nuestra construcción. El método que se describe está basado en la construcción de un spline de funciones de Bessel y en el "shooting method".

1. Introducción

El propósito de este artículo es estudiar la construcción de soluciones radialmente simétricas $v: B \rightarrow \mathbb{R}$, donde B es la bola en \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) con centro en el origen y radio π , al problema elíptico semilineal

$$\begin{cases} \Delta v + f(v) = 0 & \text{en } B \\ v = 0 & \text{en } \partial B, \end{cases} \quad (1.1)$$

* Parcialmente apoyado por COLCIENCIAS.

siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y lineal por tramos tal que $f(0) = 0$. Debido a la forma del término no lineal f es posible construir las soluciones explícitamente.

La utilidad de estos cálculos es doble: primero, como los teoremas de existencia de soluciones radialmente simétricas de problemas elípticos no lineales no son constructivos, ejemplos explícitos que apoyen o nieguen conjeturas y que sugieran direcciones para estudios futuros son siempre bienvenidos. Segundo, el estudio de ecuaciones elípticas con parte no lineal continua y lineal por tramos tiene la posibilidad de ser empleado como una herramienta para obtener resultados generales para ecuaciones semilineales a través de aproximaciones polinomiales a las gráficas de funciones Lipschitz arbitrarias.

La construcción explícita de soluciones al problema (1.1) que se hace en el presente artículo ha sido inspirada por un trabajo de E. Deumens y H. Warchall (ver [4]).

Consideremos ahora la siguiente función no lineal $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} \Lambda^2 t - (\Lambda^2 - \beta^2) & \text{si } t > 1 \\ \beta^2 t & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ \Lambda^2 t + (\Lambda^2 - \beta^2) & \text{si } t < -1, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde Λ y β son constantes.

Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ la sucesión de valores propios $-\Delta$ en el caso radialmente simétrico.

En este artículo se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1. *Si $\beta^2 \leq \lambda_k$ y $\Lambda^2 > \lambda_p$ ($k \leq p$) entonces existen $(p-k+1)$ pares de soluciones de (1.1), u_i y v_i ($k \leq i \leq p$) tales que para cada i , $u_i(0) < 0 < v_i(0)$ y u_i, v_i tienen exactamente $(i-1)$ nodos en $(0, \pi)$.*

La conclusión del Teorema 1 ha sido obtenida independientemente por M. Esteban (ver [5]) utilizando técnicas de teoría de bifurcación, pero en dicho trabajo no se hace una construcción explícita de las soluciones. Deseamos precisar, además, que en el artículo de Deumens y Warchall mencionado anteriormente (ver [4]) se estudia una ecuación de onda no lineal en el espacio \mathbb{R}^{N+1} mientras que en el presente trabajo la construcción se hace en una región acotada de \mathbb{R}^N .

En la Sección 2 iniciamos el estudio de las ecuaciones que nos permiten construir las soluciones radialmente simétricas. En la Sección 3 demostramos el Teorema 1 y en la Sección 4 presentamos un procedimiento para calcular el dato inicial correspondiente a una solución radialmente simétrica y algunas gráficas de las soluciones generadas en *Mathematica* siguiendo el método de construcción descrito en las Secciones 2 y 3.

2. Soluciones radialmente simétricas

Construiremos a continuación una familia de soluciones radialmente simétricas a la ecuación (1.1) con no linealidad (1.2).

Si v es una solución radialmente simétrica de (1.1) entonces v satisface la ecuación

$$v'' + \frac{N-1}{r} v' + f(v) = 0 \quad (2.1)$$

y las condiciones de frontera $v'(0) = 0$, $v(\pi) = 0$.

Si $v(r)$ está entre $-\infty$ y -1 ó -1 y $+1$ ó $+1$ y $+\infty$ la ecuación (2.1) tiene la forma

$$v'' + \frac{N-1}{r} v' + Mv + C = 0, \quad (2.2)$$

donde M y C son constantes. Esta ecuación puede resolverse explícitamente. Sea

$$v(r) = r^{-\nu} y(r) - \frac{C}{M} \quad \text{con} \quad \nu = \frac{N-2}{2}.$$

Entonces $y(r)$ satisface la ecuación

$$r^2 y'' + (N-1-2\nu) r y' + (Mr^2 - \nu(N-2-\nu)) y = 0.$$

Esta es la ecuación de Bessel

$$y'' + r^{-1} y' + (M - \nu^2 r^{-2}) y = 0.$$

Luego la solución de (2.2) puede expresarse explícitamente así:

$$N = 2 : \quad v(r) = A J_0(kr) + B N_0(kr) - \frac{C}{M},$$

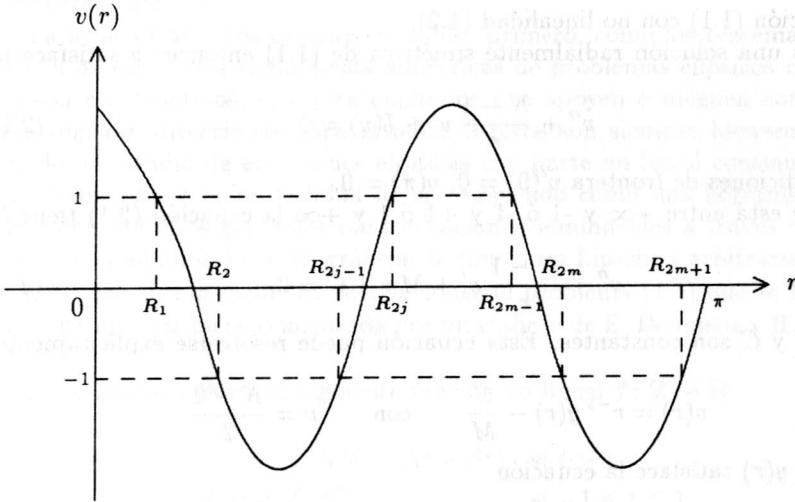
$$N \geq 2 : \quad v(r) = A r^{-\nu} J_\nu(kr) + B r^{-\nu} N_\nu(kr) - \frac{C}{M}$$

donde $k^2 = M$ y J_ν y N_ν son las funciones de Bessel y Neumann. Observamos que para N impar las expresiones anteriores involucran funciones de Bessel y de Neumann con índice la mitad de un entero y estas son expresables en términos de funciones trigonométricas (ver [1]).

Para construir soluciones al problema (1.1) podemos “pegar” las soluciones anteriores sujetas a condiciones de continuidad para v y sus dos primeras derivadas en los puntos de ligadura, junto con las condiciones de frontera $v'(0) = 0$ y $v(\pi) = 0$.

Sin pérdida de generalidad construiremos soluciones v que satisfagan la condición $v(0) > 0$ (si $v(0) < 0$ la construcción es similar).

Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo tal que $k \leq m+1 \leq p$. Construyamos una solución con m nodos en $(0, \pi)$ y $(2m+1)$ puntos de ligadura R_j ($1 \leq j \leq 2m+1$) (ver Figura 1). Por simplicidad asumiremos $N = 3$.

FIGURA 1. SOLUCIÓN CON m NODOS.

Para $0 \leq r \leq R_1$, $v(r) \geq 1$ y la solución es

$$v(r) = \frac{\Lambda^2 - \beta^2}{\Lambda^2} + p_1 r^{-1} \text{Sen } \Lambda(r - P_1).$$

Para $R_{2j-1} \leq r \leq R_{2j}$ ($1 \leq j \leq m$), $|v(r)| \leq 1$ y la solución es

$$v(r) = q_j r^{-1} \text{Sen } \beta(r - Q_j).$$

Similarmente para $R_{2j} \leq r \leq R_{2j+1}$, ($1 \leq j \leq m$) la solución es

$$v(r) = (-1)^j \frac{\Lambda^2 - \beta^2}{\Lambda^2} + p_{j+1} r^{-1} \text{Sen } \Lambda(r - P_{j+1}).$$

Finalmente para $R_{2m+1} \leq r \leq \pi$ la solución es

$$v(r) = q_{m+1} r^{-1} \text{Sen } \beta(r - Q_{m+1}).$$

Tenemos entonces la solución v en términos de $2(m+1)$ coeficientes p_1, p_2, \dots, p_{m+1} , q_1, q_2, \dots, q_{m+1} , $(2m+1)$ puntos de ligadura $R_1, R_2, \dots, R_{2m+1}$ y $2(m+1)$ incógnitas $P_1, P_2, \dots, P_{m+1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{m+1}$. Estas $(6m+5)$ incógnitas es posible encontrarlas de las $2(2m+1)$ ecuaciones que establecen que v y v' son continuas en los $(2m+1)$ puntos de ligadura, de $2(m+1)$

ecuaciones que establecen que $|v(R_j)| = 1$ para $1 \leq j \leq 2m + 1$ y de las dos condiciones de frontera. De la ecuación (2.2) se observa que si v y v' son continuas en $(0, \pi)$ entonces v'' resulta también continua en $(0, \pi)$.

Determinaremos inicialmente los $(2m + 2)$ coeficientes p_j y q_j en términos de las otras incógnitas utilizando la condición $|v(R_j)| = 1$ ($1 \leq j \leq 2m + 1$). Encontramos así:

$$p_1 = \frac{\beta^2 R_1}{\Lambda^2 \text{Sen } \Lambda (R_1 - P_1)},$$

$$q_j = \frac{(-1)^{j+1} R_{2j-1}}{\text{Sen } \beta (R_{2j-1} - Q_j)}, \quad (1 \leq j \leq m)$$

$$p_{j+1} = \frac{(-1)^j \beta^2 R_{2j+1}}{\Lambda^2 \text{Sen } \Lambda (R_{2j+1} - P_{j+1})}, \quad (1 \leq j \leq m)$$

$$q_{m+1} = \frac{(-1)^m R_{2m+1}}{\text{Sen } \beta (R_{2m+1} - Q_{m+1})}.$$

Para garantizar que $v'(0) = 0$ basta tomar $P_1 = 0$.

Las otras condiciones de continuidad nos generan las siguientes ecuaciones:

$$\text{Cot } \beta (Q_1 - R_1) = \frac{\beta}{\Lambda^2 R_1} - \frac{1}{\beta R_1} - \frac{\beta}{\Lambda} \text{Cot } (\Lambda R_1), \quad (A_0)$$

$$R_{2j-1} \text{Sen } \beta (R_{2j} - Q_j) = R_{2j} \text{Sen } \beta (Q_j - R_{2j-1})$$

$$(1 \leq j \leq m), \quad (B_j)$$

$$\text{Cot } \Lambda (P_{j+1} - R_{2j}) = \frac{\Lambda}{\beta^2 R_{2j}} - \frac{1}{\Lambda R_{2j}} - \frac{\Lambda}{\beta} \text{Cot } \beta (R_{2j} - Q_j)$$

$$(1 \leq j \leq m), \quad (C_j)$$

$$R_{2j} \text{Sen } \Lambda (R_{2j+1} - P_{j+1}) = R_{2j+1} \text{Sen } \Lambda (R_{2j} - P_{j+1})$$

$$(1 \leq j \leq m), \quad (D_j)$$

$$\text{Cot } \beta (Q_{j+1} - R_{2j+1}) = \frac{\beta}{\Lambda^2 R_{2j+1}} - \frac{1}{\beta R_{2j+1}} - \frac{\beta}{\Lambda} \text{Cot } \Lambda (R_{2j+1} - P_{j+1})$$

$$(1 \leq j \leq m). \quad (A_j)$$

En la sección siguiente demostraremos que el sistema de ecuaciones trascendentes acopladas $(A_0) - (B_j) - (C_j) - (D_j) - (A_j)$ ($1 \leq j \leq m$) tiene solución $\{R_{2j-1}, Q_j, R_{2j}, P_{j+1}, R_{2j+1}, Q_{m+1}, 1 \leq j \leq m\}$ y daremos una técnica constructiva para resolverlo.

3. Demostración del Teorema 1

En esta sección demostraremos que existen soluciones del tipo de las mencionadas anteriormente. El siguiente lema implica la existencia de una solución de clase C^2 al problema (1.1) con $(2m + 1)$ puntos de ligadura.

Lema 2. Si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $k \leq m + 1 \leq p$ entonces el sistema de las $(4m + 1)$ ecuaciones $(A_0) - (B_j) - (C_j) - (D_j) - (A_j)$ ($1 \leq j \leq m$) en las variables $\{R_{2j-1}, Q_j, R_{2j}, P_{j+1}, R_{2j+1}, Q_{m+1}, 1 \leq j \leq m\}$ tiene solución.

Demostración. Procederemos en dos etapas. Primero, para $d > 1$ arbitrario, consideramos el problema

$$v'' + \frac{2}{r} v' + \Lambda^2 v - (\Lambda^2 - \beta^2) = 0, \quad v(0) = d, \quad v'(\pi) = 0.$$

Esta ecuación tiene una solución $v(r)$ que se puede hallar explícitamente. Calculamos entonces R_1 tal que $v(R_1) = 1$, luego usamos (A_0) para hallar Q_1 , posteriormente (B_1) para calcular R_2 , a continuación (C_1) para encontrar P_2 , luego (D_1) para hallar R_3 , posteriormente (A_1) para calcular Q_2 , etc., hasta hallar Q_{m+1} , todas las variables se encuentran en términos de d . En el segundo paso demostraremos que existe un valor de $d > 1$ tal que $v(\pi) = 0$.

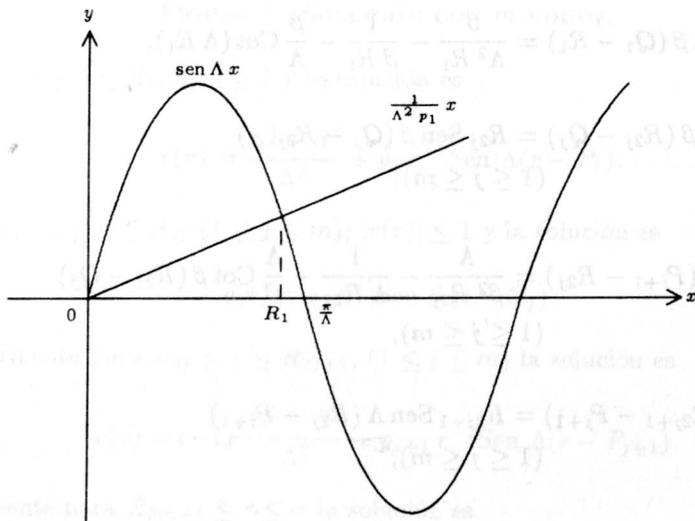


FIGURA 2. ENCONTRANDO R_1 .

Para $d > 1$ dado, el problema

$$\begin{aligned} v'' + \frac{2}{r} v' + \Lambda^2 v - (\Lambda^2 - \beta^2) &= 0, \\ v(0) &= d, \\ v'(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

tiene como solución

$$v(r) = \frac{\Lambda^2 - \beta^2}{\Lambda^2} + \frac{p_1}{r} \text{Sen}(\Lambda r),$$

donde $p_1 = \frac{1}{\Lambda} \left((d-1) + \frac{\beta^2}{\Lambda^2} \right) > 0$. Podemos entonces encontrar $R_1 := R_1(d)$ tal que $v(R_1) = 1$, lo cual equivale a resolver la ecuación

$$\text{Sen}(\Lambda x) = \frac{1}{\Lambda^2 p_1} x,$$

que tiene una única solución R_1 que satisface $0 < R_1 < \frac{\pi}{\Lambda}$, como puede verse en la Figura 2.

Analizamos a continuación cada ecuación separadamente.

Ecuación (A_0) . Para $0 < R_1 < \frac{\pi}{\Lambda}$ dado, existe un único $Q_1 \in (R_1, R_1 + \frac{\pi}{\beta})$ que cumple (A_0) . Explícitamente

$$Q_1 = R_1 + \frac{1}{\beta} \text{ArcCot} \rho,$$

donde $\rho = \frac{\beta}{\Lambda^2 R_1} - \frac{1}{\beta R_1} - \frac{\beta}{\Lambda} \text{Cot}(\Lambda R_1)$

Ecuación (B_j) ($1 \leq j \leq m$). Para R_{2j-1} y Q_j dados, la ecuación (B_j) posee una única solución $R_{2j} \in (Q_j, Q_j + \frac{\pi}{2\beta})$, como puede verse en la Figura 3.

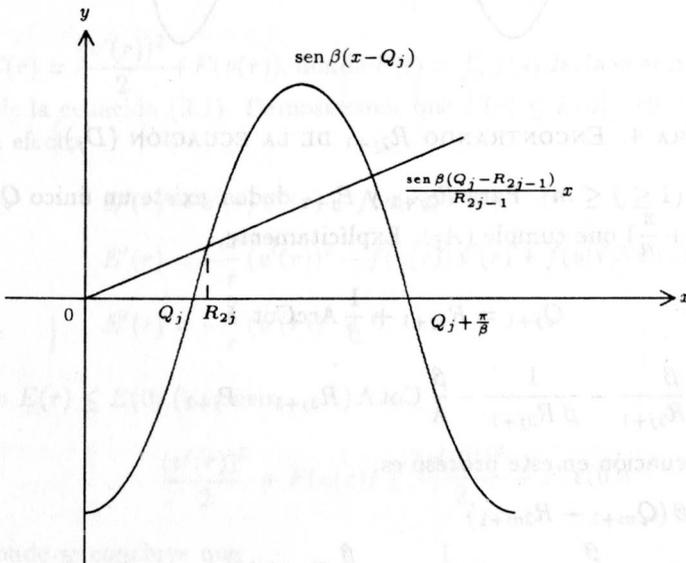


FIGURA 3. ENCONTRANDO R_{2j} DE LA ECUACIÓN (B_j) .

Ecuación (C_j) ($1 \leq j \leq m$). Para R_{2j} y Q_j dados, existe una única solución $P_{j+1} \in (R_{2j}, R_{2j} + \frac{\pi}{\Lambda})$ de la ecuación (C_j) . Explícitamente,

$$P_{j+1} = R_{2j} + \frac{1}{\Lambda} \text{ArcCot } \gamma$$

$$\text{donde } \gamma = \frac{\Lambda}{\beta^2 R_{2j}} - \frac{1}{\Lambda R_{2j}} - \frac{\Lambda}{\beta} \text{Cot } \beta (R_{2j} - Q_j).$$

Ecuación (D_j) ($1 \leq j \leq m$). Para R_{2j} y P_{j+1} dados, la ecuación (D_j) posee una solución R_{2j+1} tal que $R_{2j+1} > R_{2j}$, como puede verse en la Figura 4.

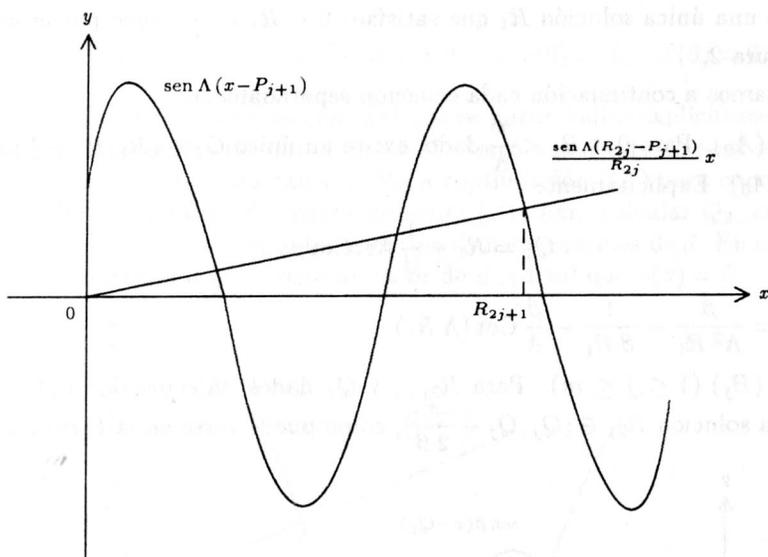


FIGURA 4. ENCONTRANDO R_{2j+1} DE LA ECUACIÓN (D_j) .

Ecuación (A_j) ($1 \leq j \leq m$). Para R_{2j+1} y P_{j+1} dados, existe un único $Q_{j+1} \in (R_{2j+1}, R_{2j+1} + \frac{\pi}{\beta})$ que cumple (A_j) . Explícitamente,

$$Q_{j+1} = R_{2j+1} + \frac{1}{\beta} \text{ArcCot } \delta$$

$$\text{donde } \delta = \frac{\beta}{\Lambda^2 R_{2j+1}} - \frac{1}{\beta R_{2j+1}} - \frac{\beta}{\Lambda} \text{Cot } \Lambda (R_{2j+1} - P_{j+1})$$

La última ecuación en este proceso es:

$$\begin{aligned} & \text{Cot } \beta (Q_{m+1} - R_{2m+1}) \\ &= \frac{\beta}{\Lambda^2 R_{2m+1}} - \frac{1}{\beta R_{2m+1}} - \frac{\beta}{\Lambda} \text{Cot } \Lambda (R_{2m+1} - P_{m+1}). \end{aligned} \quad (A_m)$$

Para R_{2m+1} y P_{m+1} conocidos, existe una única solución $Q_{m+1} \in (R_{2m+1}, R_{2m+1} + \frac{\pi}{\beta})$ de la ecuación (A_m) .

Explícitamente,

$$Q_{m+1} = R_{2m+1} + \frac{1}{\beta} \text{ArcCot } \eta.$$

donde

$$\eta = \frac{\beta}{\Lambda^2 R_{2m+1}} - \frac{1}{\beta R_{2m+1}} - \frac{\beta}{\Lambda} \text{Cot } \Lambda (R_{2m+1} - P_{m+1}).$$

Observamos que por construcción cada una de las variables $R_{2j-1}, Q_j, R_{2j}, P_{j+1}, R_{2j+1}, Q_{m+1}, (1 \leq j \leq m)$ depende continuamente de d .

El método descrito anteriormente para construir la solución radialmente simétrica al problema (1.1) es un spline de funciones de Bessel con soportes no determinados $R_i (1 \leq i \leq 2m + 1)$, que se obtienen en el proceso de construcción.

Veamos ahora, para completar la prueba, que existe $d > 1$ tal que $v(\pi) = 0$.

Lema 3. Existe $d > 1$ tal que $v(\pi) = 0$.

Demostración. Estudiemos inicialmente el problema de valor inicial

$$\begin{cases} v'' + \frac{2}{r} v' + f(v) = 0 & (0 < r \leq \pi) \\ v(0) = 1 \\ v'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Sea $E(r) = \frac{(v'(r))^2}{2} + F(v(r))$, donde $F(t) = \int_0^t f(s) ds$, la energía de la solución $v(r)$ de la ecuación (3.1). Demostremos que $E(r) \leq E(0) \quad (0 < r \leq \pi)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} E'(r) &= v'(r) v''(r) + f(v(r)) v'(r), \\ E'(r) &= -\frac{2}{r} (v'(r))^2 - f(v(r)) v'(r) + f(v(r)) v'(r), \\ E'(r) &= -\frac{2}{r} (v'(r))^2 < 0. \end{aligned}$$

Luego $E(r) \leq E(0)$. Es decir,

$$\frac{(v'(r))^2}{2} + F(v(r)) \leq \frac{(v'(0))^2}{2} + F(v(0)).$$

De donde se concluye que

$$F(v(r)) \leq \frac{\beta^2}{2}.$$

Lo cual implica que $|v(r)| \leq 1$ y así

$$f(v) = \beta^2 v.$$

Hemos probado que si v es solución del problema (3.1) entonces v es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} v'' + \frac{2}{r} v' + \beta^2 v = 0 & (0 < r \leq \pi) \\ v(0) = 1 \\ v'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Por hipótesis $\beta^2 \leq \lambda_k$, luego utilizando el teorema de comparación de Sturm (ver Teorema 2 p.104 de [6]) y teniendo en cuenta φ_k tiene $(k-1)$ ceros en $(0, \pi)$ se deduce que v tiene a lo sumo k ceros en $(0, \pi)$.

Hemos demostrado que si v es solución de (3.1) entonces v tiene a lo sumo k ceros en $(0, \pi)$.

Consideremos ahora la solución $v(r)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} v'' + \frac{2}{r} v' + f(v) = 0 & (0 < r \leq \pi) \\ v(0) = d \\ v'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

con dato inicial d suficientemente grande ($d \gg 1$).

Sea $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua y acotada definida por la ecuación

$$f(t) = \Lambda^2 t - h(t).$$

La ecuación (3.3) puede escribirse como

$$\begin{cases} v'' + \frac{2}{r} v' + \Lambda^2 v = h(v) & (0 < r \leq \pi) \\ v(0) = d \\ v'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Sea w la función definida por $v(r) = \frac{w(r)}{r}$ ($r \neq 0$), $w(0) = 0$, $w'(0) = d$. Luego w satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} w'' + \Lambda^2 w = r g(r) & (0 < r \leq \pi) \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = d, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $g(r) = h\left(\frac{w(r)}{r}\right)$.

Utilizando la fórmula de variación de parámetros vemos que la solución del problema (3.5) viene dada por la expresión

$$w(r) = \frac{d}{\Lambda} \text{Sen}(\Lambda r) + \int_0^r \frac{\text{Sen}\Lambda(r-s)}{\Lambda} s g(s) ds. \quad (3.6)$$

Como h es una función acotada, la integral que aparece en el lado derecho de (3.6) es una función acotada.

De la ecuación (3.6) se concluye que, para un dato inicial d suficientemente grande, el número de ceros de la solución w de la ecuación (3.5), que es igual al número de ceros de la solución v de la ecuación (3.3), viene dado por el número de ceros de la función $\frac{d}{\Lambda} \text{Sen}(\Lambda r)$, la cual es una solución de la ecuación

$$z'' + \Lambda^2 z = 0 \quad (0 < r \leq \pi). \quad (3.7)$$

Sea y la función definida por $y(r) = \frac{z(r)}{r}$ ($r \neq 0$). Luego y satisface la ecuación

$$y'' + \frac{2}{r} y' + \Lambda^2 y = 0 \quad (0 < r \leq \pi).$$

Por hipótesis $\Lambda^2 > \lambda_p$, luego utilizando el teorema de comparación de Sturm (ver [6]) se deduce que y , y por lo tanto z , tiene por lo menos p ceros en $(0, \pi)$. Luego w tiene por lo menos p ceros en $(0, \pi)$ y por lo tanto v tiene por lo menos p ceros en $(0, \pi)$.

Hemos demostrado que si v es solución del problema (3.3), con dato inicial d suficientemente grande, entonces v tiene por lo menos p ceros en el intervalo $(0, \pi)$.

Observamos que las soluciones radialmente simétricas de la ecuación (1.1) son las soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} v'' + \frac{2}{r} v' + f(v) = 0 & (0 < r \leq \pi) \\ v(0) = d \\ v'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

que satisfacen la condición

$$v(\pi) = 0.$$

Denotemos por $v(r, d)$, para indicar la dependencia del valor inicial d , las soluciones radialmente simétricas del problema (1.1).

Utilizaremos ahora el análisis del plano de fase para concluir la prueba del lema. Como $(v(r, d), v'(r, d)) \neq (0, 0)$ para todo $r \in [0, \pi]$, definiendo

$$s^2(r, d) = v^2(r, d) + (v'(r, d))^2$$

vemos (ver [3]) que existe una única función continua $\theta(r, d)$ tal que

$$v(r, d) = s(r, d) \cos \theta(r, d)$$

$$v'(r, d) = -s(r, d) \operatorname{Sen} \theta(r, d)$$

$$\theta(0, d) = 0.$$

Como $\theta = \operatorname{ArcTan} \left(-\frac{v'}{v} \right)$ entonces

$$\theta' = \frac{(v')^2 - v v''}{(v')^2 + v^2}.$$

De esta fórmula se deduce que si $v(r_0, d) = 0$, o equivalentemente $\theta(r_0, d) = \frac{\pi}{2} + q\pi$ ($q \in \mathbb{N}$), entonces $\theta'(r_0, d) = 1 > 0$. Lo cual implica que si $r > r_0$ entonces $\theta(r, d) > \theta(r_0, d)$.

Como $v(r, 1)$ tiene a lo sumo k ceros en $(0, \pi)$ entonces

$$\theta(\pi, 1) \leq \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi.$$

Y como para d suficientemente grande $v(r, d)$ tiene por lo menos p ceros en $(0, \pi)$ entonces

$$\theta(\pi, d) > \frac{\pi}{2} + (p-1)\pi.$$

Por hipótesis $k \leq m+1 \leq p$, luego

$$\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi \leq \frac{\pi}{2} + m\pi < \frac{\pi}{2} + (p-1)\pi.$$

Por la dependencia continua de $\theta(\pi, d)$ de d (ver [3]) concluimos por el teorema del valor intermedio que existe $d > 1$ tal que

$$\theta(\pi, d) = \frac{\pi}{2} + m\pi.$$

Luego $v(\pi, d) = 0$, lo cual demuestra el lema. ✓

Como una consecuencia inmediata del Lema 2 tenemos que la solución $\{R_{2j-1}, Q_j, R_{2j}, P_{j+1}, R_{2j+1}, Q_{m+1}, 1 \leq j \leq m\}$ a las ecuaciones $(A_0) - (B_j) - (C_j) - (D_j) - (A_j)$ ($1 \leq j \leq m$) construida en dicho lema proporciona una solución de clase C^2 al problema (1.1), lo cual demuestra el Teorema 1.

4. Procedimiento para calcular el dato inicial d . Gráficas de algunas soluciones radialmente simétricas

En esta sección presentamos inicialmente un procedimiento para calcular el dato inicial d correspondiente a una solución radialmente simétrica v de la ecuación (1.1) con m nodos en $(0, \pi)$, cuando Λ y β son constantes dadas que satisfacen $\beta^2 \leq \lambda_k$ y $\Lambda^2 > \lambda_p$.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} v'' + \frac{N-1}{r} v' + f(v) = 0 & (0 < r \leq \pi) \\ v(0) = d \\ v'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por la ecuación (1.2).

Para un dato inicial $d > 1$ podemos resolver numéricamente, utilizando, por ejemplo, un método de Runge-Kutta, el sistema de primer orden no autónomo asociado con el problema (4.1) y obtener así el espacio de fase $(v(r, d), v'(r, d))$.

En el espacio de fase, la condición $(d, 0)$ determina una trayectoria $T(d)$, cuya forma es la de una espiral deformada, puesto que $(0, 0)$ es el único atractor y la energía de la solución $E(v(r, d))$ es decreciente.

Para el caso $m = 0$, como $E(v(r, d))$ es decreciente, tenemos que

$$E(v(0, d)) \geq E(v(\pi, d)) > 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Lambda^2 d^2}{2} - (\Lambda^2 - \beta^2) d \geq \frac{(v'(\pi, d))^2}{2} \geq 0.$$

Luego

$$d \geq d_{\min} := \frac{2(\Lambda^2 - \beta^2)}{\Lambda^2}.$$

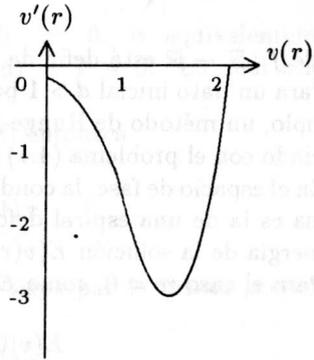
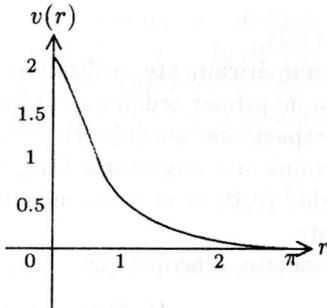
Como la condición $v(r_0, d) = 0$ implica que $\theta(r_0, d) = \frac{\pi}{2} + q\pi$ ($q \in \mathbb{N}$), tenemos que el extremo final de la trayectoria $T(d)$ está en el eje vertical positivo del espacio de fase si y sólo si el número de nodos en $(0, \pi)$ de la solución $v(r, d)$ es impar y está en el eje vertical negativo si y sólo si el número de nodos en $(0, \pi)$ es par.

Cuando el extremo final de la trayectoria $T(d)$ no está en el eje vertical, el procedimiento siguiente nos permitirá determinar una aproximación del valor del dato inicial d . Si el punto final de la trayectoria $T(d)$, para un valor inicial de $d \geq d_{\min}$, está en el primer cuadrante, el número de nodos será impar y debemos disminuir d para que el punto final alcance el eje vertical; si el punto final de la trayectoria está en el segundo cuadrante, el número de nodos será impar y debemos aumentar d ; si el punto final de la trayectoria está en el tercer

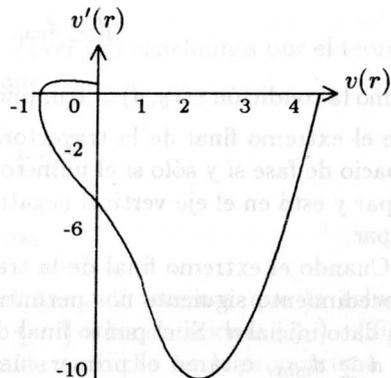
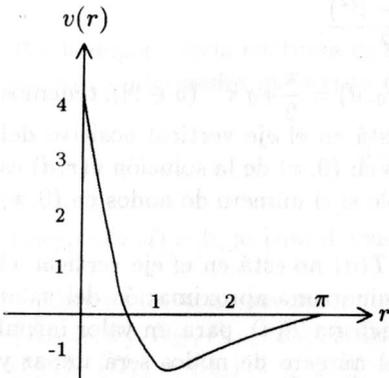
o en el cuarto cuadrante el número de nodos será par y se debe disminuir d si estamos en el tercer cuadrante y aumentar d si estamos en el cuarto cuadrante.

Con este procedimiento sencillo, se ha escrito un programa en el software *Mathematica* que permite calcular el dato inicial d de la solución v con m nodos en $(0, \pi)$. Inicialmente con Λ y β dados y con $d \simeq d_{\min}$ se encuentra el d_0 para la solución de $m = 0$ nodos. Luego basta aumentar d , aplicar el procedimiento descrito y se obtiene el d_1 para la solución de $m = 1$ nodo; y así sucesivamente.

Las gráficas que se presentan a continuación, generadas en *Mathematica* siguiendo el método de construcción descrito en las secciones 2 y 3 y el procedimiento indicado anteriormente para calcular d , muestran los perfiles radiales y el espacio de fase para las soluciones radialmente simétricas $v(r)$ del problema (1.1) con $m = 0, 1, 2, 3$ nodos y con $\Lambda = 7.0$ y $\beta = 0.5$ en dimensión $N = 3$.

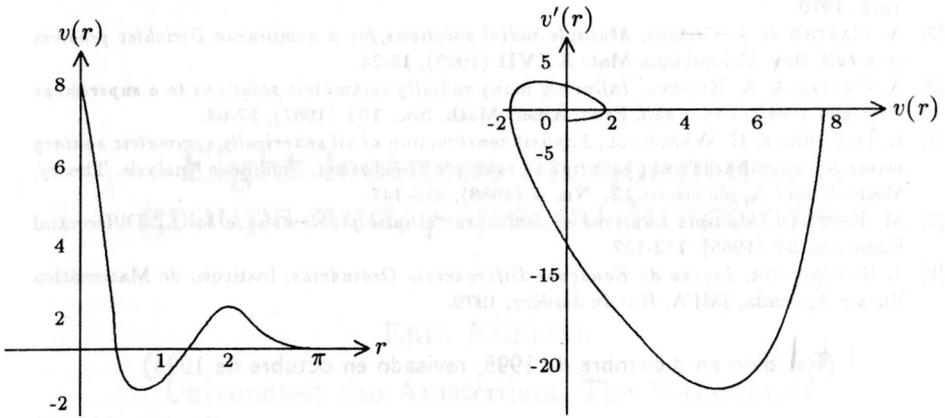


PERFIL DE LA SOLUCIÓN RADIAL Y ESPACIO DE FASE CON $m = 0$ NODOS.

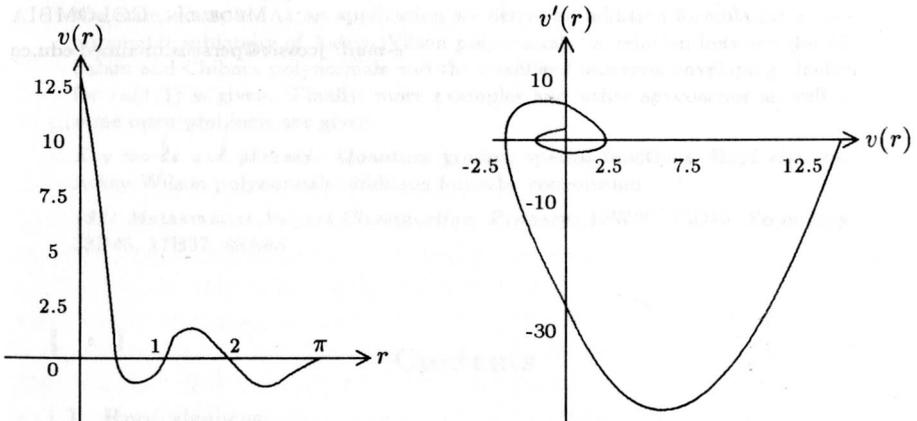


PERFIL DE LA SOLUCIÓN Y ESPACIO DE FASE CON $m = 1$ NODO.

Bibliografía



PERFIL DE LA SOLUCIÓN Y ESPACIO DE FASE CON $m = 2$ NODOS.



PERFIL DE LA SOLUCIÓN Y ESPACIO DE FASE CON $m = 3$ NODOS.

Bibliografía

- [1] M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1970.
- [2] A. CASTRO & J. COSSIO, *Multiple radial solutions for a semilinear Dirichlet problem in a ball*, *Rev. Colombiana Mat.* **XXVII** (1993), 15-24.
- [3] A. CASTRO & A. KUREPA, *Infinitely many radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 57-64.
- [4] E. DEUMENS & H. WARCHALL, *Explicit construction of all spherically symmetric solitary waves for a nonlinear wave equation in multiple dimensions*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **12**, No. 4 (1988), 419-447.
- [5] M. ESTEBAN, *Multiple solutions of semilinear elliptic problems in a ball*, *J. Differential Equations* **57** (1985), 112-137.
- [6] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

(Recibido en diciembre de 1995; revisado en octubre de 1996)

HORACIO ARANGO
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
 APARTADO AÉREO 3840
 MEDELLÍN, COLOMBIA
 e-mail: harango@perseus.unalmed.edu.co

JORGE COSSIO
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
 APARTADO AÉREO 3840
 MEDELLÍN, COLOMBIA
 e-mail: jcossio@perseus.unalmed.edu.co