Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen **32** *(1998), páginas 29–43*

Sobre aplicaciones conformes hiperbólicamente convexas

DIEGO MEJÍA*
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

CHRISTIAN POMMERENKE**
Technische Universität Berlin

ABSTRACT. A conformal mapping f of the unit disc $\mathbb{D}$ into itself is called hyperbolically convex if the non-euclidean segment between any two points of $f(\mathbb{D})$ also belongs to $f(\mathbb{D})$. In this paper we study several quantities which are related to this class of functions and that do not remain invariant under the group of conformal automorphism of $\mathbb{D}$, namely, the derivative, the modulus of continuity and the coefficients of the Taylor expansion about the origin. In addition, we study domains with cusps which are probably extremal for several problems.

RESUMEN. Se dice que una transformación conforme f del disco unidad $\mathbb{D}$ del plano complejo en sí mismo es hiperbólicamente convexa si el segmento de recta hiperbólica que une cualquier par de puntos de $f(\mathbb{D})$ está a su vez contenido en $f(\mathbb{D})$. En este trabajo estudiaremos algunas cantidades relacionadas con estas funciones que no permanecen invariantes bajo los automorfismos conformes de $\mathbb{D}$, a saber, la derivada, el módulo de continuidad y los coeficientes de la expansión en serie de Taylor alrededor del origen. Estudiaremos además los dominios con cúspides, los cuales son, probablemente, extremales para varios problemas.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30C45.

Key words and phrases. Hyperbolically convex functions. Univalent functions. Modulus of continuity. Coefficient estimates. Domains with cusps.

*Parcialmente financiado por COLCIENCIAS.

**Esta investigación ha sido apoyada parcialmente por Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

1. Introducción

Sean $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Diremos que un dominio $\Omega \subset \mathbb{D}$ es *hiperbólicamente convexo*, si para cualquier par de puntos $z_1, z_2 \in \Omega$, la porción de arco entre z_1 y z_2 del círculo ortogonal a $\mathbb{T}$ que pasa por dichos puntos está también contenida en Ω. Este tipo de dominios es de gran importancia, particularmente en la teoría de los grupos fuchsianos [Be83]. Diremos que una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es *hiperbólicamente convexa*, o, simplemente, *h-convexa*, si es conforme, es decir, analítica e inyectiva, y si el dominio $f(\mathbb{D})$ es hiperbólicamente convexo.

La información disponible sobre las funciones convexas es bastante amplia. Estas son transformaciones conformes $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ para las cuales $g(\mathbb{D})$ es un dominio convexo en el sentido euclídeo. Véase por ejemplo [Du83]. Tales funciones se caracterizan mediante la desigualdad

$$\Re\left[1 + zg''(z)/g'(z)\right] > 0 \qquad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.1}$$

En cambio, las investigaciones sobre funciones h-convexas son relativamente escasas: [BF83], [FlOs86], [MeMi90], [MeMi91], [MaMi94], [MaMi95], [MePo96], [Kü70].

Ma y Minda [MaMi94, Th. 3] demostraron que una aplicación conforme $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es h-convexa si y sólo si

$$\Re\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{2zf'(z)\overline{f(z)}}{1 - |f(z)|^2}\right] > 0 \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.2}$$

En contraste con lo que sucede con (1.1) donde los términos son analíticos, la aparición de términos no analíticos en (1.2) dificulta el tratamiento de las funciones h-convexas.

La clase de las funciones h-convexas es invariante bajo las transformaciones

$$f \to \sigma \circ f \circ \tau \quad \text{con } \sigma, \tau \in \text{Möb}(\mathbb{D}), \tag{1.3}$$

donde Möb($\mathbb{D}$) es el grupo de automorfismos conformes de $\mathbb{D}$. Por esta razón, si f es h-convexa, la función normalizada

$$f^*(z) = e^{i\beta}\frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)} = \alpha^* z + \cdots, \quad 0 < \alpha^* \leq 1, \tag{1.4}$$

también lo es.

En [MePo96] estudiamos propiedades de las funciones h-convexas que permanecen invariantes bajo las transformaciones (1.3). En particular ([MePo96, Th. 3.3]), mostramos que

$$\Re\left[\frac{\zeta-s}{\zeta-z}\frac{1-\bar{s}z}{1-|s|^2}\frac{f(\zeta)-f(z)}{f(\zeta)-f(s)}\frac{1-|f(s)|^2}{1-\overline{f(s)}f(z)}\right]>\frac{1}{2} \tag{1.5}$$

para $z, \zeta, s \in \mathbb{D}$, lo cual generaliza una desigualdad importante de Ruscheweyh y Sheil-Small [RuSS74] para el caso de las funciones convexas.

En este artículo estudiaremos ciertas cantidades dependientes de f que no permanecen invariantes bajo (1.3), tales como la derivada, el módulo de continuidad y los coeficientes de la expansión alrededor del origen. Además de demostrar algunos resultados, formularemos varias conjeturas. En la sección final estudiaremos dominios con cúspides, los cuales son, probablemente, extremales para varios de los problemas considerados.

2. El módulo de continuidad

El primer resultado es análogo a la desigualdad $\Re[g(z)/z] > 1/2$, válida para las funciones convexas $g(z) = z + \cdots$ [Marx32], [St33].

Teorema 1. *Si $f(z) = \alpha z + \cdots$ es h-convexa, entonces*

$$\Re[f(z)/z] > \frac{\alpha}{2} \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

Demostración. Si $z \in \mathbb{D}, z \neq 0$, la función

$$h(\zeta) = \frac{\frac{f(z)}{z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta}}{f(z) - f(\zeta)} \quad (\zeta \in \mathbb{D}).$$

satisface $|h(\zeta)| \leq 1$ [MePo96, Cor. 3.2]. Por lo tanto,

$$\left|1 - \frac{\alpha z}{f(z)}\right| = |zh(0)| < 1.$$

Esto implica (2.1). ☑

La función h-convexa

$$k_\alpha(z) = \frac{2\alpha z}{1 - z + \sqrt{(1-z)^2 + 4\alpha^2 z}} = \alpha z + \alpha\left(1-\alpha^2\right)z^2 + \cdots \tag{2.2}$$

es extremal para muchos problemas; por ejemplo [MaMi94, Th. 7],

$$-k_\alpha(-|z|) \leq |f(z)| \leq k_\alpha(|z|) \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{2.3}$$

para toda función h-convexa f. También se tiene que [MePo96, Ex. 5.1]

$$\inf\left\{\Re[k_\alpha(z)/z] : z \in \mathbb{D}\right\} = \alpha/\left(1 + \sqrt{1-\alpha^2}\right). \tag{2.4}$$

Conjetura 1. *Si* $0 < \alpha \leq 1$ *y* $f(z) = \alpha z + \cdots$ *es h-convexa, entonces*

$$\Re \frac{f(z)}{z} \geq \Re \frac{k_\alpha(z)}{z} \geq \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.5}$$

A continuación estudiaremos algunas propiedades de la derivada de una función h-convexa.

Teorema 2. *Sea* $f(z) = \alpha z + \cdots$, $0 < \alpha \leq 1$ *una función h-convexa y sean* $c = \alpha^2/4, \zeta \in \mathbb{T}, w = f(\zeta)$. *Entonces*

$$|f(r\zeta) - w| \leq \frac{|w|\left(1-|w|^2\right)}{(1-r)^{-c\left(1-|w|^2\right)} - |w|^2} \leq \frac{|w|}{1 + c\log\frac{1}{1-r}} \tag{2.6}$$

para $0 \leq r < 1$, *siendo la desigualdad de la izquierda válida sólo si* $w \in \mathbb{D}$. *Además,*

$$\frac{\alpha}{2\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)} \leq |f'(r\zeta)| \leq \frac{1}{(1-r)\left(1+c\log\frac{1}{1-r}\right)}. \tag{2.7}$$

De (2.7) y de [MePo96, Ex. 5.1] se deduce que

$$\inf_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)| \geq \inf_{z\in\mathbb{D}} |k'_\alpha(z)| = \frac{\alpha}{2\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)}. \tag{2.8}$$

En este sentido, la cota inferior en (2.7) es la mejor posible.

De (2.6) resulta que $f(\zeta) - f(r\zeta) = O\left(1/\log\frac{1}{1-r}\right)$ cuando $r \to 1$. Esta estimativa es la mejor posible de acuerdo con el Teorema 6 que estableceremos más adelante. Sin embargo, la cota superior en (2.7) no es buena; en realidad, en una cúspide $f(\zeta)$ se tiene (Teorema 6) que

$$|f'(r\zeta)| \sim \frac{\text{constante}}{1-r}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-2}, \quad r \to 1.$$

Conjetura 2. *Si* f *es h-convexa, entonces*

$$f'(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\left(\log\frac{1}{1-|z|}\right)^{-2}\right) \tag{2.9}$$

cuando $|z| \to 1$.

Demostración del Teorema 2. Podemos suponer que $\zeta = 1$ y que $w = f(\zeta) \in \mathbb{D}$. Si $w \in \mathbb{T}$, podemos reemplazar $f(z)$ por $f(\rho z)$ y luego hacer $\rho \to 1$.

(a) Se sabe [MaMi94, Th. 4] que

$$p(z) = \frac{(1-z)^2 f'(z)}{[w - f(z)][1 - \overline{w} f(z)]}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{2.10}$$

tiene parte real positiva. Además, por el Teorema 1,

$$\Re p(0) = \Re \frac{\alpha}{w} = \left|\frac{\alpha}{w}\right|^2 \Re \frac{w}{\alpha} \geq \frac{\alpha^2}{2|w|^2} = \frac{2c}{|w|^2}.$$

Entonces,

$$\Re p(z) \geq \frac{2c}{|w|^2} \frac{1-|z|}{1+|z|} > c(1-|z|). \tag{2.11}$$

Como en virtud de (2.10)

$$\frac{d}{dr} \log \frac{1-\overline{w} f(r)}{w - f(r)} = \frac{\left(1-|w|^2\right) f'(r)}{(w - f(r))(1-\overline{w} f(r))} = \frac{1-|w|^2}{(1-r)^2} p(r),$$

(2.11) implica que

$$\frac{d}{dr} \log \left|\frac{1-\overline{w} f(r)}{w - f(r)}\right| = \frac{1-|w|^2}{(1-r)^2} \Re p(r) > \frac{c\left(1-|w|^2\right)}{1-r}.$$

Integrando la anterior desigualdad con respecto a r, entre 0 y r, obtenemos que

$$\log \left|\frac{1-\overline{w} f(r)}{w - f(r)}\right| - \log \frac{1}{|w|} > c\left(1-|w|^2\right) \log \frac{1}{1-r},$$

lo cual implica la primera desigualdad en (2.6). La segunda desigualdad resulta de observar que $(1-r)^{-x} \geq x \log 1/(1-r) + 1$.

(*b*) Como $|f(z)| \leq |z| < 1$ para $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$|f'(r)| \leq \frac{1-|f(r)|^2}{1-r^2} = \frac{1+|f(r)|}{1+r} \frac{1-|f(r)|}{1-r} \leq \frac{|1-f(r)|}{1-r},$$

lo cual, junto con (2.6), proporciona la acotación superior en (2.7). En cuanto a la inferior, ésta resulta de que

$$|f'(r)| \geq \frac{|f(r)|}{r} \Re \left[r \frac{f'(r)}{f(r)}\right] \geq \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{1}{2},$$

lo cual es consecuencia de [MaMi94, Th. 7] (véanse (2.3) y (2.4)) y de [MePo96, Th. 2.1]. ☑

El último resultado de esta sección proporciona estimativas para el módulo de continuidad de una función h-convexa y de su inversa. Recordemos que si φ es una función uniformemente continua en un subconjunto conexo A del plano complejo, entonces su módulo de continuidad está definido por

$$\omega(\delta) = \sup\left\{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| : z_1, z_2 \in A, |z_1 - z_2| \leq \delta\right\},$$

donde $\delta \geq 0$.

Teorema 3. *Si f es h-convexa entonces*

$$c_1 |z_1 - z_2| \leq |f(z_1) - f(z_2)| \leq c_2 / \log \frac{3}{|z_1 - z_2|}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D} \tag{2.12}$$

donde c_1, c_2 son constantes positivas que dependen de f.

Excepto por las constantes, estas acotaciones son las mejores posibles para los módulos de continuidad de f^{-1} y f (véase el Teorema 6 más adelante).

Demostración. Salvo por cambios en las constantes, podemos suponer, en virtud de (1.4), que $f(z) = \alpha z + \cdots$, $0 < \alpha \leq 1$.

(a) Sean $\Omega = f(\mathbb{D})$ y $\varphi = f^{-1} : \Omega \to \mathbb{D}$. Si $w_1, w_2 \in \Omega$, la porción S entre w_1 y w_2 del arco del círculo ortogonal a $\mathbb{T}$ que pasa por estos puntos está contenido en Ω. Por lo tanto, por (2.7),

$$|\varphi(w_1) - \varphi(w_2)| \leq \int_S |\varphi'(w)| \, |dw| \leq \frac{\pi}{2} |w_1 - w_2| \sup_{w \in \overline{\Omega}} |\varphi'(w)| \leq \frac{2\pi}{\alpha^2} |w_1 - w_2| .$$

Esto proporciona la cota inferior en (2.12).

(b) Para establecer la cota superior, consideremos primero $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ y definamos $\delta = |z_1 - z_2| / 3$ y $r = 1 - \delta$. Utilizando (2.6) y (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq |z_1 - z_2| \max_{|z| \leq r} |f'(z)| + \sum_{j=1}^{2} |f(z_j) - f(rz_j)| \\ &< \frac{\frac{3\delta}{\delta} + 2}{1 + c \log \frac{1}{\delta}} < \frac{5}{c \log \frac{3}{|z_1 - z_2|}} . \end{aligned}$$

El caso general $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ se deduce mediante un resultado en [RuShTa75] que establece que

$$\begin{aligned} &\sup \{ |f(z_1) - f(z_2)| : z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}, |z_1 - z_2| < \delta \} \\ &\qquad \leq 3 \sup \{ |f(z_1) - f(z_2)| : z_1, z_2 \in \mathbb{T}, |z_1 - z_2| \leq \delta \} \end{aligned}$$

para toda función f analítica en $\mathbb{D}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}$. ☑

3. Los coeficientes del desarrollo alrededor del origen

En esta sección f tendrá la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D}) . \tag{3.1}$$

Teorema 4. *Si f es h-convexa, entonces*

$$|a_2| \le \frac{14+46\sqrt{6}}{375\, q} \approx 0.4655, \quad q = \frac{\left(45+30\sqrt{6}\right)^{1/2}}{15} \approx 0.7257, \tag{3.2}$$

y esta cota es la mejor posible. Además,

$$|a_n| < \frac{\pi}{2n} \quad (n = 3, 4, \dots), \tag{3.3}$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_k |a_k| < \infty, \tag{3.4}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k|^2 \left(1 - r^{2k}\right) = O\left(\frac{1}{\log \frac{1}{1-r}}\right), \quad r \to 1. \tag{3.5}$$

Demostración. (a) Ma y Minda [MaMi94, Th. 5] demuestran que

$$\left|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''}{f'} - \overline{z} + \left(1-|z|^2\right)\frac{f'\overline{f}}{1-|f|^2}\right| \le 1 - \left(\frac{\left(1-|z|^2\right)|f'|}{1-|f|^2}\right)^2 \tag{3.6}$$

para $z \in \mathbb{D}$. Evaluando esta desigualdad en $z = 0$ obtenemos

$$\left|\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1\overline{a_0}}{1-|a_0|^2}\right| \le 1 - \left(\frac{|a_1|}{1-|a_0|^2}\right)^2.$$

Haciendo $p = |a_0|$ y $q = |a_1| / \left(1 - |a_0|^2\right)$ deducimos que

$$|a_2| \le \left(1-p^2\right) q \left(pq + 1 - q^2\right) \equiv g(p,q) \tag{3.7}$$

donde $(p,q) \in Q = [0,1] \times [0,1]$. En el interior de Q la función g tiene un único punto crítico en $\left(\left(\sqrt{6}-1\right)/5q, q\right)$, con q como en (3.2), en cuyo caso $g(p,q) = \left(14+46\sqrt{6}\right)/(375\ q)$. Además, $g(p,q) \le (2/9)\sqrt{3} < 0.3850$ para $(p,q) \in \partial Q$. Por lo tanto, (3.2) resulta de (3.7).

Sea k_q definida por (2.2). Como esta función es h-convexa y

$$\frac{p - k_q(z)}{1 - p k_q(z)} = p - \left(1-p^2\right) z - \left(1-p^2\right) q \left(pq + 1 - q^2\right) z^2 + \cdots,$$

se concluye que la cota en (3.2) es la mejor posible.

(b) Si Ω es h-convexo entonces $\partial\Omega$ tiene longitud $l < \pi^2$ [BF83, Th. 2]. Por lo tanto, f' pertenece a la clase H^1 de Hardy [Po92, p. 134] y

$$\int_0^{2\pi} \left| f'\left(e^{it}\right) \right| dt = l < \pi^2. \tag{3.8}$$

De (3.1) se deduce entonces que

$$n\left|a_n\right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'\left(e^{it}\right) e^{-i(n-1)t} dt \right| \le \frac{l}{2\pi} < \frac{\pi}{2}.$$

y las estimativas en (3.4) son entonces consecuencia de esto y del hecho de que $f' \in H^1$ [Zy68, p. 286].

(c) Si $0 < r < 1$, entonces

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k\left|a_k\right|^2\left(1 - r^{2k}\right) = \text{área}\left\{f(z) : r < |z| < 1\right\}, \tag{3.9}$$

y es un hecho bien conocido en geometría diferencial elemental que si C es una curva de Jordan de longitud l entonces

$$\text{área}\left\{w : \operatorname{dist}(w, C) \le \delta\right\} \le 2l\delta \quad (\delta > 0). \tag{3.10}$$

Por otra parte, de (2.6) obtenemos que

$$\left\{f(z) : r < |z| < 1\right\} \subset \left\{ w : \operatorname{dist}(w, f(\mathbb{T})) < \frac{1}{c \log \frac{1}{1-r}} \right\},$$

y por lo tanto, (3.5) resulta de (3.9) y (3.10). ☑

Veremos más adelante que la acotación uniforme (independiente de f) en (3.3) no puede mejorarse hasta una de la forma ε_n/n donde $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Pero es probablemente factible mejorar mucho las acotaciones en (3.4) y (3.5) para funciones particulares.

Conjetura 3. *Si f es h-convexa, entonces*

$$a_n = O\left(n^{-1}(\log n)^{-2}\right), \quad n \to \infty, \tag{3.11}$$

$$\sum_k k\left|a_k\right|^2\left(1 - r^{2k}\right) = O\left(\left(\log \frac{1}{1-r}\right)^{-3}\right), \quad r \to 1. \tag{3.12}$$

Que estas acotaciones serían las mejores posibles es una consecuencia del Teorema 6 más adelante.

4. Coeficientes de las funciones normalizadas

En esta sección consideraremos funciones h-convexas de la forma

$$f(z) = \alpha z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.1}$$

(véase (1.4)). Definimos

$$A_n(\alpha) = \{\max |a_n| : f(z) = \alpha z + \cdots \text{ es } h\text{-convexa}\} \tag{4.2}$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Ma y Minda [MaMi94, Th. 5] demostraron que

$$A_2(\alpha) = \alpha\left(1 - \alpha^2\right) \leq \frac{2}{9}\sqrt{3} \approx 0.3849. \tag{4.3}$$

Teorema 5. *En estas condiciones se tiene*

$$A_n(\alpha) < \min\left(\frac{1}{n}, \alpha\right), \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{4.4}$$

Si J_1 es la función de Bessel de orden 1, entonces

$$\liminf_{n \to \infty}\left(n \max_{0<\alpha\leq 1} A_n(\alpha)\right) \geq \max_{\beta>0} J_1(\beta) > 0.5818, \tag{4.5}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-1} A_n(\alpha) = 1, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{4.6}$$

Demostración. Para $z \in \mathbb{D}$ tenemos [MePo96,Th. 2.1]

$$\Re\left[z f'(z) / f(z)\right] > \frac{1}{2}, \quad |f(z)| < 1,$$

y estas dos desigualdades implican [Po63, Th. 8] que $|a_n| < 1/n, n = 2, 3, \ldots$. Además, el Teorema 1 asegura que la función

$$\frac{2f(z)}{\alpha z} - 1 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{\alpha} z^n \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{4.7}$$

tiene parte real positiva. Esto implica, en virtud de un teorema de Carathéodory [Po75, p. 41] que $|a_{n+1}/\alpha| \leq 1, n \geq 1$. Pero la igualdad para algún n implicaría que la función en (4.7) no es acotada.

Las demostraciones de (4.5) y (4.6) resultan del ejemplo siguiente. ☑

Ejemplo 1. Para $0 < \alpha \leq 1$, definamos

$$k_\alpha(z) = \frac{2\alpha z}{1 - z + \sqrt{(1-z)^2 + 4\alpha^2 z}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) z^n \tag{4.8}$$
$$= \alpha z + \alpha\left(1 - \alpha^2\right) z^2 + \alpha\left(1 - \alpha^2\right)\left(1 - 2\alpha^2\right) z^3 + \cdots$$

[MaMi94], [MePo96, Ex. 5.1]. Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[2\alpha k_{\alpha}(z)\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\sqrt{(1-z)^{2}+4\alpha^{2}z}-1+z\right]$$
$$=\frac{4\alpha z}{\sqrt{1-2\xi z+z^{2}}}=4\alpha\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(\xi)\,z^{n+1}$$

donde $P_n(\xi)$ es el n-ésimo polinomio de Legendre calculado en $\xi = 1-2\alpha^2$. Por tal motivo, $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha c_{n+1}(\alpha)\right] = 2\alpha\ P_n\left(1-2\alpha^2\right)$ y

$$c_{n+1}(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\int_{0}^{\alpha}sP_{n}\left(1-2s^{2}\right)ds=\frac{\xi P_{n}(\xi)-P_{n+1}(\xi)}{2\alpha n} \tag{4.9}$$

[AbSt65, p. 334]. Por otra parte, [AbSt65, p. 332]

$$P_{n}\left(1-2s^{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}s^{2k}.$$

Por lo tanto, de (4.9) obtenemos que

$$c_{n+1}(\alpha)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\frac{\alpha^{2k+1}}{k+1},\quad n=0,1,\ldots. \tag{4.10}$$

Como (4.2), (4.4) y (4.10) aseguran que

$$\alpha>A_{n+1}(\alpha)\geq c_{n+1}(\alpha)=\alpha+O\left(\alpha^{3}\right)\quad(\alpha\to0),$$

esto demuestra (4.6).

Sean $0<\beta<\infty$ y $n\geq\beta/2$. De (4.10) se deduce que

$$nc_{n+1}\left(\frac{\beta}{2n}\right)=$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}\beta^{2k+1}}{k!\,(k+1)!2^{2k+1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ahora, el valor absoluto del k-ésimo término de esta suma es menor o igual que $\beta^{2k+1}/\left[k!\,(k+1)!\right]$, y la serie de término general este último valor es convergente. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}nc_{n+1}\left(\frac{\beta}{2n}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\beta^{2k+1}}{k!\,(k+1)!2^{2k+1}}=J_{1}(\beta). \tag{4.11}$$

Pero [AbSt65, p. 411]

$$\max_{\beta\geq0}J_{1}(\beta)\approx J_{1}(1.84118)\approx0.58187. \tag{4.12}$$

Teniendo en cuenta (4.2), esto demuestra (4.5).

Finalmente, discutiremos el valor $\max_{\alpha} A_3(\alpha)$, el cual, por (4.4), es < 0.3334. Para la función $f = k_\alpha$ del Ejemplo 1, $\mathbb{D} \cap \partial f(\mathbb{D})$ consiste de un arco circular. En este caso tenemos que

$$\max_{\alpha} |c_3(\alpha)| = \alpha_0 \left(1 - \alpha_0^2\right)\left(1 - 2\alpha_0^2\right) \approx 0.2321,$$

donde $\alpha_0 \approx 0.3603$. Sin embargo la función f de [MePo96, Ex. 5.3], con $\theta_1 = 27°$ y $\alpha_1 \approx 0.7001$ satisface $|a_3| > 0.2515$. Para esta función, la cual es impar, $\mathbb{D} \cap \partial f(\mathbb{D})$ consiste de dos arcos circulares.

La función f de [Hi62, p. 382], [MePo96, Ex. 5.2], para la cual $\partial f(\mathbb{D})$ consiste de $n-1$ arcos con cúspides en $e^{2\pi i\nu/(n-1)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, tiene la forma

$$f(z) = \alpha_n z + \frac{(n-1)\,\alpha_n}{2n\,(n+2)} z^n + \cdots$$

donde $\alpha_n \to 1$ $(n \to \infty)$. El coeficiente de z^n es $\sim 1/(2n)$ cuando $n \to \infty$, el cual es más pequeño que el coeficiente correspondiente de la función $k_{\beta/(2n)}$: véanse (4.11) y (4.12).

5. Dominios con cúspides

En esta sección estudiaremos una clase de dominios h-convexos que parecen ser extremales para muchos problemas: véanse las Conjeturas 2 y 3.

Un dominio Ω tiene una ***cúspide circular*** en $w \in \partial\Omega$ si en una vecindad de w el conjunto $\partial\Omega$ consiste de dos arcos circulares que se tocan en w con un ángulo de $0°$. El conjunto de las cúspides (y esquinas) de un dominio es numerable (véase, por ejemplo, [Gn87, Th.2]).

Ejemplo 2. Sean $w^{\pm} \in \mathbb{T}$ tales que $0 < \arg w^{+} < \arg w^{-} < 2\pi$. Puede verificarse que existe un único γ con $\Re\gamma > 0$ tal que

$$w^{\pm} = (\pm i\pi/2 - \gamma) / (\pm i\pi/2 + \overline{\gamma}). \tag{5.1}$$

Sea Ω_γ el subdominio de $\mathbb{D}$ cuya frontera consiste de los arcos circulares $C^{\pm}$ en $\mathbb{D}$ entre 1 y $w^{\pm}$ que son ortogonales a $\mathbb{T}$ y del arco de $\mathbb{T}$ entre w^{+} y w^{-}. Entonces Ω_γ tiene una cúspide en 1.

Sea k_α definida por (2.2). Entonces [MePo96, Ex. 5.1]

$$g = \log\frac{1+k_\alpha}{1-k_\alpha} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \tag{5.2}$$

es una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre la semifranja $\{\Re w > 0, |\Im w| < \pi/2\}$, por lo cual

$$h = h_{\alpha,\gamma} = (g - \gamma) / (g + \overline{\gamma}) \tag{5.3}$$

es una representación conforme de $\mathbb{D}$ sobre Ω_γ. Se tiene que

$$g(z) \sim \log \frac{1}{1-z}, \quad g'(z) \sim \frac{1}{1-z}$$

cuando $z \to 1$. Por lo tanto

$$1 - h(z) = \frac{2\,\Re\gamma}{g(z) + \overline{\gamma}} \sim 2\,(\Re\gamma) \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{-1}, \tag{5.4}$$

$$h'(z) = \frac{2g'(z)\,\Re\gamma}{(g(z) + \overline{\gamma})^2} \sim \frac{2\,\Re\gamma}{1-z} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{-2}. \tag{5.5}$$

Teorema 6. *Si f es h-convexa y tiene una cúspide circular en $f(\zeta), \zeta \in \mathbb{T}$, entonces*

$$f(\zeta) - f(z) \sim b\, f(\zeta) \left(\log \frac{1}{\zeta - z}\right)^{-1}, \quad z \to 1, \tag{5.6}$$

$$f'(z) \sim \frac{b\, f(\zeta)}{\zeta - z} \left(\log \frac{1}{\zeta - z}\right)^{-2}, \quad z \to 1, \tag{5.7}$$

con $0 < b < \infty$. Los coeficientes a_n de f satisfacen

$$\limsup_{n\to\infty} n (\log n)^2 |a_n| > 0, \tag{5.8}$$

y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2 \left(1 - r^{2n}\right) > c \left(\log \frac{1}{1-r}\right)^{-3}, \quad \frac{1}{2} \le r < 1, \quad c > 0. \tag{5.9}$$

Demostración. Podemos suponer que $\zeta = f(\zeta) = 1$. Los símbolos $c_1, c_2, \ldots$ denotarán constantes positivas.

(a) Sean $C^\pm$ los arcos circulares que forman la cúspide en 1 y sea $\mathbb{T} \cap C^\pm = \{1, w^\pm\}$. Con $0 < \alpha < 1$ arbitrario, sea h la función definida en (5.3). Entonces existe una vecindad U de 1 tal que

$$f(\mathbb{D}) \subset h(\mathbb{D}), \quad f(\mathbb{D}) \cap U = h(\mathbb{D}) \cap U.$$

Por lo tanto tenemos que $f = h \circ \varphi$, donde φ es una aplicación conforme que envía $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ y una vecindad de 1 en $\mathbb{D}$ sobre una vecindad de $\varphi(1) = 1$ en $\mathbb{D}$

(pues φ es analítica en 1 y $\varphi'(1) \neq 0$). De (5.5) se deduce que

$$f'(z) = \varphi'(z)\, h'(\varphi(z)) \sim \frac{2\,\varphi'(z)\,\Re\gamma}{1-\varphi(z)} \left(\log\frac{1}{1-z} + \log\frac{1-\varphi(z)}{1-z}\right)^{-2},$$

lo cual implica (5.7). La demostración de (5.6) usa (5.4) y es similar.

(b) Sean $1/2 \leq r < 1$ y

$$\psi(s) = \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-2}\, r^n n^s \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Una comparación con la serie binomial muestra que

$$\psi''(s) = \sum_{n=2}^{\infty} r^n n^s < c_1 (1-r)^{-s-1} \quad \text{para } -\frac{1}{2} \leq s \leq 0. \tag{5.10}$$

Además

$$\psi(-1/2) \leq c_2 (1-r)^{-1/2}, \quad \psi'(-1/2) \leq c_3 (1-r)^{-1/2},$$

y al integrar (5.10) dos veces obtenemos

$$\psi(0) = \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-2}\, r^n \leq \frac{c_4}{1-r}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-2}. \tag{5.11}$$

Si (5.8) fuera falso entonces, dado $\varepsilon > 0$, $n(\log n)^2 |a_n| < \varepsilon$ para $n >$ algún m, y teniendo en cuenta (5.11) sería

$$\begin{aligned} r\,|f'(r\zeta)| &\leq \sum_{n=1}^{m} n\,|a_n|\, r^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\log n)^2} r^n \\ &< \sum_{n=1}^{m} n\,|a_n| + \frac{c_4 \varepsilon}{1-r}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

De (5.7) se deduciría entonces que $0 < b \leq c_4\varepsilon$, lo cual, dade que c_4 es independiente de ε, es una contradicción.

(c) Sea $C = \{w : |w - 1 - ia| = a\}$ uno de los círculos que forman una cúspide. De (5.6) se deduce que

$$|f(z)| < 1 - d, \quad d = \frac{c_5}{\log\frac{1}{1-r}} \tag{5.12}$$

para $|z-1| < c_6$. Sea $\theta = \arcsin(d/a)$ y sea Δ el triángulo circular con vértices en $1, 1-d$ y $1-d+i(a-a\cos\theta)$. Sus lados están contenidos en $mathbbR, C$ y $\{w : \Re w = 1-d\}$. De (5.12) se concluye además que

$$\{f(z) : r < |z| < 1\} \supset \Delta \quad \text{para } 1 - r < c_7. \tag{5.13}$$

Como $d = a \sin\theta = a\left(\theta - \theta^3/3 + O\left(\theta^5\right)\right)$ y

$$\begin{aligned}\text{área de } \Delta &= d\ a\ (1-\cos\theta) + \frac{d}{2}\, a \cos\theta - \frac{\theta}{2} a^2 \\ &= \frac{a^2\theta^3}{6} + O\left(\theta^5\right) = \frac{d^3}{6a} + O\left(d^5\right)\end{aligned}$$

cuando $\theta \to 0, d \to 0$, (5.9) resulta de (2.6), (5.12) y (5.13). ☑

Referencias

[AbSt65] M. ABRAMOWITZ & I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1965.

[BF83] B. BROWN FLINN, *Hyperbolic convexity and level sets of analytic functions*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 831–841.

[Be83] A. BEARDON, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer, 1983.

[Du83] P. DUREN, *Univalent Functions*, Springer, 1983.

[FlOs86] B. FLINN & B. OSGOOD, *Hyperbolic curvature and conformal mapping*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 272–276.

[Gn87] D. GNUSCHKE-HAUSCHILD, *On the angular derivative of analytic functions*, Math. Z. **196** (1987), 591–601.

[Hi62] E. HILLE, *Analytic Function Theory*, vol. II, Chelsea, 1962.

[Kü70] R. KÜHNAU, *Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen*, Ebene. Math. Nachr. **43** (1970), 239–280.

[MaMi94] W. MA & D. MINDA, *Hyperbolically convex functions*, Ann. Math. Polon. **60** (1994), 81–100.

[MaMi95] W. MA & D. MINDA, *Hyperbolic linear invariance and hyperbolic k-convexity*, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) **58** (1995), 73–93.

[Marx32] A. MARX, *Untersuchungen über schlichte Abbildungen*, Math. Ann. **107** (1932/33), 40–67.

[MeMi90] D. MEJÍA & D. MINDA, *Hyperbolic geometry in k-convex regions*, Pacific J. Math. **141** (1990), 333–354.

[MeMi91] D. MEJÍA & D. MINDA, *Hyperbolic geometry in hyperbolically k-convex regions*, Rev. Colombiana Mat. **25** (1991), 123–142.

[MePo96] D. MEJÍA & CH. POMMERENKE, *On hyperbolically convex functions*, to appear in Journal of Geom. Analysis.

[Po63] CH. POMMERENKE, *On meromorphic starlike functions*, Pacific J. Math. **13** (1963), 221–235.

[Po75] CH. POMMERENKE, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[Po92] CH. POMMERENKE, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer, 1992.

[RuSS74] S. RUSCHEWEYH & T. SHEIL-SMALL, *Hadamard products of schlicht functions and the Pólya-Schoenberg conjecture*, Comment. Math. Helv. **48** (1974), 119–135.

[RuShTa75] L. A. RUBEL, A.L. SHIELDS & B.A. TAYLOR, *Mergelyan sets and the modulus of continuity of analytic functions*, J. Approx. Theory **15** (1975), 23–40.

[St33] E. STROHHÄCKER, *Beiträge zur Theorie schlichter Funktionen*, Math. Z. **37** (1933), 356–380.

[Zy68] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series, vol. I*, Cambridge Univ. Press, 1968.

(Recibido en mayo de 1997, revisado en diciembre de 1997)

DIEGO MEJÍA
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Apartado Aéreo 3840, Medellín, COLOMBIA
e-mail: dmejia@perseus.unalmed.edu.co

CHRISTIAN POMMERENKE
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135, D-10623
Berlin, Alemania (Deutschland)
e-mail: pommeren@math.tu-berlin.de