Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 32 (1998), páginas 101–122

Sobre una estructura diferencial cuántica

BERENICE GUERRERO

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. We obtain a non-conmutative differential structure associated with the Lie bialgebra of the Lie group $G = ST(2)$. We construct this structure by means a quantum matrix generated by a classic r-matrix on $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. We prove that this space is generated by the differential form of the Lie group G and we also prove that this space is a graded Hopf –Poisson algebra with a suitable bracket.

Key words and phrases. Lie-Poisson groups, Hopf-Poisson algebra, r-matrix, Yang-Baxter equation, Poisson braket, quantum group, non-commutative calculus.

1991 Mathematics Subject Classification (1994 Revision). Primary 17 B 37. Secondary 16 W 30, 17 B 66.

RESUMEN. Se construye una estructura diferencial no conmutativa, asociada a la bialgebra de Lie del grupo triangular $G = ST(2)$, a partir de una R-matriz cuántica inducida por una r-matriz clásica del espacio $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Se prueba que este espacio puede definirse en términos de las formas diferenciales del grupo de Lie G y es un álgebra de Hopf-Poisson graduada con un corchete apropiado.

0. Introducción

De la misma forma como se acostumbra a definir la estructura diferencial de un grupo de Lie en términos de las funciones coordenadas del grupo, (ver [11]), construimos aquí una estructura diferencial no conmutativa sobre el grupo

Trabajo parcialmente financiado por el CINDEC y COLCIENCIAS .

cuántico $ST_q(2)$ en términos de las funciones coordenas del grupo de Lie $ST(2)$ y de sus diferenciales.

A partir de un r–tensor antisimétrico del espacio $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ es el álgebra de Lie de $ST(2)$), que satisface la ecuación de Yang–Baxter clásica (ver [23]),

$$[r_{12}, r_{23}] + [r_{12}, r_{13}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \tag{0.1}$$

encontramos una solución R, (R-matriz cuántica), de la ecuación de Yang-Baxter cuántica QYBE, (ver [20]),

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{0.2}$$

La matriz cuántica R induce una estructura de biálgebra no conmutativa $\mathcal{A}_R$ sobre el espacio de las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$, (ver [19]), y nos permite definir el grupo cuántico $ST_q(2)$ del grupo de Lie $ST(2)$ como el álgebra cociente de $\mathcal{A}_R$ sobre un cierto ideal bilátero con estructura de Algebra de Hopf no conmutativa, (ver [6]).

Con el propósito de determinar una estructura diferencial sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$, (ver [1], [2], [27] y [29]), construimos el espacio $\mathcal{M}_h$ generado por las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$ y sus diferenciales, con ciertas relaciones entre sus elementos determinadas por la matriz cuántica R, y probamos que ese espacio tiene estructura de álgebra de Hopf graduada no conmutativa, y que la aplicación diferencial d definida sobre él satisface la regla de Leibniz y la relación de nilpotencia. El espacio $(\mathcal{M}_h, d)$ con esas propiedades determina un cálculo diferencial no conmutativo sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$ (ver [4] y [27]).

Asi como la generalización de la geometría diferencial clásica, (ver [9] y [26]), se define en términos de las formas diferenciales sobre el grupo de Lie expresamos, en este caso también, el cálculo diferencial sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$ en términos de las formas diferenciales sobre el grupo $ST(2)$, con ciertas relaciones determinadas por la R-matriz cuántica, y determinamos la estructura del espacio de formas. Probamos que el espacio de formas diferenciales sobre el grupo cuántico $ST_q(2)$ tiene estructura de álgebra de Hopf-Poisson.

1. El grupo cuántico $ST_q(2)$

Definición 1.1. $ST(2)$ es el grupo de matrices g de orden 2 con determinante uno y entradas g^i_j tales que $g^i_j = 0$ $(1 \leq j < i \leq 2)$, $g^i_i > 0$ $(1 \leq i \leq 2)$ llamado el grupo triangular especial de orden dos.

Definición 1.2. El álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$ del grupo $ST(2)$ es el álgebra de matrices triangulares de orden dos con traza nula generada por

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con estructura dada por el conmutador de matrices,

$$[X_1, X_2] = 2X_2, \qquad [X_i, X_i] = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1.1}$$

Definición 1.3. El álgebra de funciones diferenciables $C^\infty(ST(2))$ sobre el grupo $ST(2)$ con valores en un campo de característica cero, ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), es el álgebra asociativa, conmutativa, con unidad, definida por el producto común entre funciones.

Definición 1.4. Las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$ son las funciones t^i_j definidas por $t^i_j(g) = g^i_j$ para toda matriz $g \in ST(2)$.

Llamamos $\mathcal{A}$ el álgebra conmutativa con unidad de las funciones coordenas del grupo $ST(2)$, es decir, $\mathcal{A}$ es el álgebra generada por las entradas de la matriz T

$$T = (t^i_j) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

módulo la relación $t^1_1(g)t^2_2(g) = g^1_1 g^2_2 = ac = \det T = 1$, $t^1_2 = b$. $\mathcal{A}$ tiene estructura de álgebra de Hopf conmutativa, (ver [16]) con las operaciones, producto m, coproducto Δ, counidad ε y antípoda S, definidas como sigue,

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad m(t^i_j \otimes t^k_l) = t^i_j t^k_l, \qquad m(t^1_1 \otimes t^2_2) = 1,$$

$$\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad \Delta(t^i_j)(g_1, g_2) = t^i_j(\mu(g_1, g_2)) = t^i_j(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^i_j, \tag{1.3}$$

donde μ es el producto del grupo de Lie,

$$\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad \varepsilon(t^i_j) = t^i_j(e) = (e)^i_j, \tag{1.4}$$

$$S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad S(t^i_j)(g) = t^i_j(g^{-1}) = (g^{-1})^i_j$$

para todo $g \in ST(2)$ y g^{-1} el inverso de g.

Un grupo cuántico del grupo de Lie $ST(2)$ es un álgebra de Hopf no conmutativa obtenida por deformación del álgebra $\mathcal{A}$, (ver [3] y [19]). Una cuantización de $\mathcal{A}$ puede definirse a partir de una matriz R que sea solución de la ecuación de Yang Baxter cuántica (0.2), (también puede obtenerse por deformación directa del producto entre las funciones (ver [6]), [8] o [19]). La R - matriz cuántica induce la biálgebra $\mathcal{A}_R$ asociada a R, la cual determina a su vez, por paso al cociente, el grupo cuántico $ST_R(2)$. Por otra parte, la R-matriz cuántica es definida por un r-tensor del espacio $\mathcal{ST}(2)$.

Dada la base $\{X_1, X_2\}$ del espacio $\mathcal{ST}(2)$ tomamos el r-tensor

$$r = X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1 \tag{1.5}$$

antisimétrico, el cual es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica (ver [10]). Entonces r (r-matriz clásica) determina una solución R de la ecuación de Yang Baxter cuántica, como veremos en la proposición (1.2).

Proposición 1.1. *El tensor* $r = X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1$ *satisface la ecuación* $r^3 = 0$.

Prueba. La proposición se obtiene de las siguientes igualdades que satisfacen los elementos X_1, X_2 con estructura (1.1) del álgebra de Lie $\mathcal{ST}(2)$.

$$X_1X_2 = X_2, \qquad X_2X_1 = -X_2, \qquad X_2^2 = 0$$

En efecto, r^3 es igual a

$$\begin{aligned}(X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1)^3 =&(-X_1X_2 \otimes X_2X_1 - X_2X_1 \otimes X_1X_2)\\ &\cdot(X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1)\\ =& - X_1X_2X_1 \otimes X_2X_1X_2 + X_2X_1X_2 \otimes X_1X_2X_1\\ =&X_2X_1 \otimes X_2^2 - X_2^2 \otimes X_2X_1 = 0.\end{aligned}$$

Proposición 1.2. *La matriz* R *definida por* $R = \mathrm{Exp}(hr)$ *donde* r *es el* r*-tensor (1.5) y* h *es un parámetro real, es una solución de la ecuación de Yang Baxter cuántica*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

con $R_{12} = R \otimes I$, $R_{23} = I \otimes R$ *(*R_{13} *es análogo, como se verá mas adelante).*

Prueba. Sabemos que r satisface las siguientes igualdades:

$$r = X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1, \qquad r^2 = 2(X_2 \otimes X_2), \qquad r^3 = 0$$

entonces la matriz R la podemos expresar como

$$R = \mathrm{Exp}(hr) = I \otimes I + hr + h^2(X_2 \otimes X_2) \tag{1.6}$$

donde I es la matriz idéntica, y las matrices R_{ij} están definidas por:

$$\begin{aligned}R_{12} &= I^{\otimes^3} + hr_{12} + h^2(X_2 \otimes X_2 \otimes I),\\ R_{23} &= I^{\otimes^3} + hr_{23} + h^2(I \otimes X_2 \otimes X_2),\\ R_{13} &= I^{\otimes^3} + hr_{13} + h^2(X_2 \otimes I \otimes X_2),\end{aligned}$$

con r_{ij} los tensores (ver [10]):

$$\begin{aligned}r_{12} &= r \otimes I = X_1 \otimes X_2 \otimes I - X_2 \otimes X_1 \otimes I,\\ r_{23} &= I \otimes r = I \otimes X_1 \otimes X_2 - I \otimes X_2 \otimes X_1,\\ r_{13} &= X_1 \otimes I \otimes X_2 - X_2 \otimes I \otimes X_1.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Desarrollando los productos (i) $R_{12}R_{13}R_{23}$ y (ii) $R_{23}R_{13}R_{12}$ obtenemos

$$\begin{aligned} R_{12}R_{13}R_{23} = I^{\otimes^3} &+ h(r_{12}+r_{13}+r_{23}) \\ &+ h^2(r_{12}r_{13}+r_{12}r_{23}+r_{13}r_{23}+B+C+D) \qquad (1.8) \\ &+ h^3((r_{13}+r_{12})D+Cr_{23}+r_{12}C+B(r_{23}+r_{13})+r_{12}r_{13}r_{23}), \qquad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{23}R_{13}R_{12} = I^{\otimes^3} &+ h(r_{12}+r_{13}+r_{23}) \\ &+ h^2(r_{13}r_{12}+r_{23}r_{12}+r_{23}r_{13}+B+C+D) \qquad (1.10) \\ &+ h^3((r_{13}+r_{23})B+Cr_{12}+r_{23}C+D(r_{12}+r_{13})+r_{23}r_{13}r_{12}) \qquad (1.11) \end{aligned}$$

para B, C y D definidos por los productos tensoriales,

$$B = X_2 \otimes X_2 \otimes I, \qquad C = X_2 \otimes I \otimes X_2, \qquad D = I \otimes X_2 \otimes X_2. \qquad (1.12)$$

Por ser r solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica se tiene que (1.8) es igual a (1.10). Para probar que (1.9) es igual a (1.11) operamos por separado las expresiones siguientes,

$$\begin{aligned} M &= (r_{13}+r_{12})D+Cr_{23}+r_{12}C+B(r_{23}+r_{13}) \\ O &= r_{12}r_{13}r_{23} \\ L &= (r_{13}+r_{23})B+Cr_{12}+r_{23}C+D(r_{12}+r_{13}) \\ P &= r_{23}r_{13}r_{12} \end{aligned} \qquad (1.13)$$

y los productos tensoriales (1.7) y (1.12) en forma matricial,

$$r_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad r_{13} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$r_{23} = \begin{pmatrix} 0&1&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Con esas matrices las expresiones M y L en (1.13) son iguales a la matriz 8×8,

$$M=L=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

y los productos O y P de (1.13) son iguales a la matriz,

$$O=P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

De donde $M+O=L+P=0$ y con esto (1.9) es igual a (1.11), luego los productos (i) y (ii) son iguales y con ello completamos la demostración de que la matriz R en (1.6) es una solución de la QYBE (0.2).

Definición 1.5. Se denomina álgebra de matrices cuántica $\mathcal{A}_R$ del grupo $ST(2)$, asociada a la matriz cuántica R, el álgebra no conmutativa generada por las entradas t^i_j de la matriz T (1.2) módulo la relación

$$RT_1T_2 = T_2T_1R$$

donde $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes R$ con I la matriz idéntica de orden dos y R la matriz $R = \mathrm{Exp}(hr)$ cuyas entradas son los elementos

$$R = \begin{pmatrix} 1 & h & -h & h^2 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Proposición 1.3. *El álgebra $\mathcal{A}_R$ determinada por la R-matriz cuántica (1.14) es una biálgebra con el co-producto Δ y la co-unidad ε definidos sobre las funciones coordenadas por*

$$\Delta(a) = a \otimes a, \qquad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes c, \qquad \Delta(c) = c \otimes c,$$

$$\varepsilon(1) = \varepsilon(a) = \varepsilon(c) = 1, \qquad \varepsilon(b) = 0.$$

Prueba. Sea $\mathcal{A}_R$ el álgebra generada por las funciones coordenadas t^i_j del grupo $ST(2)$ módulo la relación $R(T_1 * T_2) = (T_2 * T_1)R$. Entonces, en términos de R, de las matrices T, $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$ y de los productos:

$$T_1 * T_2 = \begin{pmatrix} a*a & a*b & b*a & b*b \\ 0 & a*c & 0 & b*c \\ 0 & 0 & c*a & c*b \\ 0 & 0 & 0 & c*c \end{pmatrix}$$

$$T_2 * T_1 = \begin{pmatrix} a*a & b*a & a*b & b*b \\ 0 & c*a & 0 & c*b \\ 0 & 0 & a*c & b*c \\ 0 & 0 & 0 & c*c \end{pmatrix}$$

los generadores del álgebra $\mathcal{A}_R$ satisfacen las relaciones

$$\begin{gathered} a*b - b*a = h(a*a - a*c) \\ a*c = c*a \\ b*c - c*b = h(c*a - c*c). \end{gathered} \tag{1.15}$$

Esas relaciones muestran la no conmutatividad entre los elementos de $\mathcal{A}_R$ respecto del producto $*$. Observamos además que en el límite clásico, cuando $h \to 0$, el producto $*$ coincide con m, por lo tanto, también coinciden las estructuras de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_R$.

Los morfismos Δ y ε definidos sobre $\mathcal{A}$ inducen una estructura de co-álgebra sobre $\mathcal{A}_R$. En efecto,

$$\Delta : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_R \otimes \mathcal{A}_R, \qquad \Delta(T) = T \otimes T$$

definido por

$$\Delta(T) = \begin{pmatrix} \Delta(a) & \Delta(b) \\ 0 & \Delta(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes a & a \otimes b + b \otimes c \\ 0 & c \otimes c \end{pmatrix}$$

satisface las tres igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta(a) * \Delta(b) - \Delta(b) * \Delta(a) &= h(\Delta(a) * \Delta(a) - \Delta(a) * \Delta(b)) \\ \Delta(b) * \Delta(c) - \Delta(c) * \Delta(b) &= h(\Delta(c) * \Delta(a) - \Delta(c) * \Delta(c)) \\ \Delta(a) * \Delta(c) &= \Delta(c) * \Delta(a) \end{aligned} \tag{1.16}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta(a) * \Delta(b) - \Delta(b) * \Delta(a) &= \\ &= (a \otimes a) * (a \otimes b + b \otimes c) - (a \otimes b + b \otimes c) * (a \otimes a) \\ &= (a * a) \otimes (a * b - b * a) + (a * b - b * a) \otimes (c * a) \\ &= (a * a) \otimes (h(a * a - a * c)) + h(a * a - a * c) \otimes (c * a) \\ &= h((a * a) \otimes (a * a) - (a * c) \otimes (a * c)) \\ &= h(\Delta(a) * \Delta(a) - \Delta(a) * \Delta(c)). \end{aligned}$$

De la misma forma se verifican fácilmente las otras igualdades en (1.16). Esas propiedades nos afirman que $\Delta(a), \Delta(b), \Delta(c)$ son elementos de $\mathcal{A}_R$ y por lo tanto Δ es un morfismo de álgebras. También ε definido por $\varepsilon : \mathcal{A}_R \to k$ con $\varepsilon(a) = \varepsilon(c) = 1$, $\varepsilon(b) = 0$ es un morfismo de álgebras. Por ser el co-producto Δ no co-conmutativo se tiene que el espacio $\mathcal{A}_R$ es una biálgebra no conmutativa y no co-conmutativa.

Puesto que $a * c$ es un elemento como grupo (ver [5]) de $\mathcal{A}_R$, es decir, $a * c$ satisface la igualdad

$$\Delta(a * c) = (a * c) \otimes (a * c)$$

podemos definir el determinante cuántico asociado a la matriz R como, (ver [13]) $\det_R T = a * c$.

Proposición 1.4. *El* $\det_R T = a * c$ *está en el centro del álgebra* $\mathcal{A}_R$.

Prueba. En efecto, $\det_R T$ conmuta con todos los elementos del álgebra $\mathcal{A}_R$. Basta probar esta propiedad sobre los generadores así:

$$\begin{aligned} (\det_R T) * a &= (a * c) * a = a * (c * a) = a * (a * c) = a * (\det_R T) \\ (\det_R T) * b &= (a * c) * b = (c * a) * b = c * (a * b) = c * (b * a + h(a * a - a * c)) \\ &= (c * b + h(c * a - c * c)) * a = (b * c) * a = b * (c * a) \\ &= b * (\det_R T) \\ (\det_R T) * c &= (a * c) * c = a * (c * c) = (a * c) * c = (c * a) * c = c * (\det_R T). \end{aligned}$$

Proposición 1.5. *El álgebra cociente*

$$ST_R(2) = \mathcal{A}_R / \det_R T - 1$$

es un álgebra de Hopf, (ver [16] o [17]), con el co-producto Δ, *la co-unidad* ε *y la aplicación antípoda* S *definidas sobre los generadores por*

$$\begin{gathered}\Delta(a) = a \otimes a, \qquad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes c, \qquad \Delta(c) = c \otimes c \\ \varepsilon(a) = \varepsilon(c) = 1, \qquad \varepsilon(b) = 0, \\ S(a) = c, \qquad S(b) = -b - h(a-c), \qquad S(c) = a.\end{gathered}$$

Prueba. Por la proposición (1.3) sabemos que $\mathcal{A}_R$ es una biálgebra con el co-producto Δ y la co-unidad ε, luego el álgebra cociente $ST_R(2)$ es una biálgebra si se satisface que Δ y ε están bien definidas sobre el cociente. Pero esta propiedad se tiene por la definición del determinante cuántico y por la linealidad de las operaciones. En efecto,

$$\begin{gathered}\Delta(\det_R T - 1) = (\det_R T) \otimes (\det_R T) - 1 \otimes 1 = 0, \\ \varepsilon(\det_R T - 1) = \varepsilon(\det_R T) - \varepsilon(1) = 0.\end{gathered}$$

Para completar la demostración de la proposición basta ver que S es la aplicación antípoda, es decir, probar que S satisface las siguientes propiedades:

(1) $T * S(T) = S(T) * T = I$,
(2) $S(t^i_j * t^k_l) = S(t^k_l) * S(t^i_j)$,
(3) $*(\Delta S) = *(\sigma(S \otimes S)\Delta)$
(4) $S(\det_R T - 1) = 0$,

con $*$ el producto no conmutativo definido sobre $ST_R(2)$.

Puesto que podemos expresar a S como la matriz,

$$S(T) = \begin{pmatrix} c & -b - h(a-c) \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

(1) se obtiene directamente de (1.15). Para ver (2) primero probamos que los elementos $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ pertenecen al álgebra $ST_R(2)$, es decir debemos probar que esos elementos satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{gathered}S(a) * S(b) - S(b) * S(a) = h(S(a) * S(a) - S(a) * S(c)), \\ S(a) * S(c) = S(c) * S(a), \qquad (1.17) \\ S(b) * S(c) - S(c) * S(b) = h(S(c) * S(a) - S(c) * S(c)).\end{gathered}$$

En efecto, desarrollando los dos términos de la primera igualdad en (1.17) resulta:

$$\begin{aligned} S(a)*S(b)-S(b)*S(a) &= c*(-b-h(a-c))-(-b-h(a-c))*c \\ &= b*c-c*b, \\ h(S(a)*S(a)-S(a)*S(c)) &= h(c*c-c*a)=b*c-c*b \end{aligned}$$

y la igualdad se satisface. Las otras relaciones en (1.17) para $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ se verifican de la misma forma. Por ser S un antimorfismo sobre $\mathcal{A}$ y por las igualdades (1.17) resulta fácil probar que S es un anti-morfismo sobre $ST_R(2)$. En efecto, S satisface las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S(a*c) &= 1 = S(c)*S(a) = a*c = 1, \\ S(a*b) &= S(b*a+h(a*a-a*c)) = S(b*a)+h(S(a*a)-S(a*c)) \\ &= S(a)*S(b)+h(S(a)*S(a)-S(c)*S(a)), \\ S(b)*S(a) &= S(a)*S(b)+h(S(a)*S(a)-S(c)*S(a)), \\ S(b*c) &= S(c*b+h(c*a-c*c)) = S(c*b)+hS(c*a-c*c) \\ &= S(b)*S(c)+h(S(a)*S(c)-S(c)*S(c)), \\ S(c)*S(b) &= S(b)*S(c)+h(S(a)*S(c)-S(c)*S(c)). \end{aligned}$$

La propiedad (3) se satisface directamente sobre a y c por la definición de S. Para b la igualdad (3) se obtiene de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta(S(b)) &= \Delta(-b-h(a-c)) = -[\Delta(b)+h(\Delta(a)-\Delta(c)] \\ &= -(a\otimes b+b\otimes c+h(a\otimes a-c\otimes c), \\ \sigma(S\otimes S)\Delta(b) &= \sigma(S\otimes S)(a\otimes b+b\otimes c) \\ &= \sigma(S(a)\otimes S(b)+S(b)\otimes S(c)) \\ &= \sigma(c\otimes(-b-h(a-c))+(-b-h(a-c))\otimes a) \\ &= -(b\otimes c+a\otimes b+h(a\otimes a-c\otimes c). \end{aligned}$$

y por último (4) se obtiene directamente. Luego S es la aplicación antípoda sobre $ST_R(2)$ y S, Δ y ε determinan la estructura de álgebra de Hopf sobre la biálgebra $ST_R(2)$.

Definición 1.6. El álgebra de Hopf $ST_R(2)$ se llama el grupo cuántico del grupo triangular $ST(2)$

Puesto que la matriz R depende del parámetro h (constante de Plank en física) con $q=e^h$, las condiciones y propiedades sobre $ST_R(2)$ las podemos expresar en términos del parámetro q y en ese caso el grupo cuántico $ST_R(2)$ lo notamos $ST_q(2)$.

2. Estructura diferencial sobre el grupo $ST_q(2)$

Sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$ definido en (1.6) construimos un cálculo diferencial no conmutativo, (ver [12] y [18]). Es decir, construimos un álgebra de Hopf graduada no conmutativa $(\mathcal{M}_h, d)$ con d una aplicación diferencial que satisface la regla de Leibniz y la relación de nilpotencia.

En primera instancia consideramos el álgebra graduada $(\mathcal{M}_h, d)$ generada por las funciones coordenadas del grupo $ST(2)$ y sus diferenciales. En seguida determinamos un cálculo diferencial no conmutativo de primer orden $(\mathcal{M}_h, d)$ en términos de las 1-formas invariantes a izquierda del grupo $ST(2)$. En ambos casos definimos la estructura de Lie-Poisson, (ver [6], [14] o [15]) sobre el álgebra graduada $(\mathcal{M}_h, d)$.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{A}_q$ el álgebra de funciones sobre un grupo cuántico G_q. Un cálculo diferencial de primer orden sobre G_q es un álgebra de Hopf graduada $(\mathcal{M}, d)$ con d una transformación diferencial que satisface:

$$d^2 = 0, \qquad d(ab) = da \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot db, \qquad M^0 = \mathcal{A}_q, \qquad |a| = \mathrm{grad}(a)$$

En (1.6) definimos el grupo cuántico $ST_R(2)$ como el álgebra de Hopf no conmutativa generada por las funciones coordenadas (t^i_j) del grupo $ST(2)$ sujetas a la condición

$$RT_1T_2 = T_2T_1R$$

donde R es la matriz (1.14), T es la matriz de las funciones coordenadas, $T_1 = T \otimes I$ y $T_2 = I \otimes T$. Entonces para definir un cálculo diferencial de primer orden sobre $ST_R(2)$ construimos el espacio $\mathcal{M}_h$ generado por las funciones coordenadas t^i_j y sus diferenciales $d(t^i_j)$, y encontramos lo siguiente.

Proposición 2.1. *El espacio $\mathcal{M}_h$ generado por las entradas de las matrices T y dT módulo las relaciones:*

$$RT_1T_2 = T_2T_1R \tag{2.1}$$
$$RT_2(dT)_1 = \pm(dT)_1T_2R \tag{2.2}$$
$$RT_1(dT)_2 = \pm(dT)_2T_1R^{-1} \tag{2.3}$$
$$R(dT)_1(dT)_2 = \mp(dT)_2(dT)_1R^{-1} \tag{2.4}$$

es un álgebra de Hopf graduada, (ver [21] y [22]).

Prueba. Los elementos de la matriz $T = ((t^i_j))$ módulo la relación (2.1) generan el álgebra de Hopf $ST_R(2)$. Las diferenciales de (2.1) satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a \cdot da &= da \cdot a \qquad c \cdot da = da \cdot c \\ a \cdot dc &= dc \cdot a \qquad c \cdot dc = dc \cdot c \\ b \cdot da - da \cdot b &= \pm h(da \cdot a - c \cdot da) \\ a \cdot db - db \cdot a &= \pm h(a.dc - da \cdot a) \\ c \cdot db - db \cdot c &= \pm h(da \cdot c - c \cdot dc) \\ b \cdot dc - dc \cdot b &= \pm h(c \cdot dc - dc \cdot a) \end{aligned} \tag{2.5}$$

En términos de las matrices:

$$T_1 = T \otimes I, \qquad T_2 = I \otimes T, \qquad (dT)_1 = dT \otimes I, \qquad (dT)_2 = I \otimes dT,$$

las igualdades (2.5) se pueden expresar en forma matricial por (2.2) y (2.3), y viceversa, al desarrollar las matrices (2.2) a (2.3) encontramos las expresiones (2.5). Además, las diferenciales de (2.2) y de (2.3) se pueden escribir en forma matricial por (2.4).

Entonces definimos el álgebra $\mathcal{M}_h$ como el espacio generado por las entradas de las matrices T y dT módulo las relaciones (2.1) a (2.4). El álgebra $\mathcal{M}_h$ así construida tiene una graduación natural definida por

$$\operatorname{grad}(t^i_j) = |t^i_j| = 0, \qquad \operatorname{grad}(dt^i_j) = |dt^i_j| = 1 \tag{2.6}$$

e induce la estructura de álgebra graduada sobre el espacio $\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$ con el producto tensorial

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

y la diferencial

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db. \tag{2.7}$$

El álgebra graduada $\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$ nos permite construir la estructura de álgebra de Hopf sobre el espacio $\mathcal{M}_h$. Para ello definimos las aplicaciones Δ, ε y S sobre los generadores

$$a = t_{11}, \quad b = t_{12}, \quad c = t_{22}, \quad da = dt_{11}, \quad db = dt_{12}, \quad dc = dt_{22}$$

del álgebra $\mathcal{M}_h$, por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes c \\ \Delta(c) &= c \otimes c \\ \Delta(da) &= da \otimes a + a \otimes da \\ \Delta(db) &= da \otimes b + db \otimes c + a \otimes db + b \otimes dc \\ \Delta(dc) &= dc \otimes c + c \otimes dc \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon(a) = 1, \quad &\varepsilon(b) = 0, \quad &\varepsilon(c) = 1, \\ &\varepsilon(da) = 0, \quad &\varepsilon(db) = 0, \quad &\varepsilon(dc) = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} S(a) &= c & S(da) &= d(S(a)) = dc \\ S(b) &= -b - h(a-c) & S(db) &= d(S(b)) = -db - h(da - dc) \\ S(c) &= a & S(dc) &= d(S(c)) = da \end{aligned} \tag{2.10}$$

que en forma matricial podemos expresar por las igualdades:

$$\begin{aligned} \Delta(T) &= T \otimes T & \Delta(dT) &= dT \otimes T + T \otimes dT \\ \varepsilon(T) &= I & \varepsilon(dT) &= 0 \\ S(T) &= T^{-1} & S(dT) &= d(S(T)) \end{aligned}$$

Δ, ε y S definen respectivamente el co-producto, la co-unidad y la antípoda sobre $\mathcal{M}_h$ y determinan la estructura de álgebra de Hopf graduada sobre este espacio, (ver [24] y [25]). Para probar esta afirmación basta ver que Δ y ε son morfismos de álgebras graduadas y que S es un anti-morfismo y satisface las propiedades de antípoda.

Sea Δ el co-producto del álgebra de Hopf $ST_R(2)$ (proposición 1.4). Veamos que la aplicación Δ definida en (2.8) es una extensión del co-producto (1.3) sobre el espacio $\mathcal{M}_h$

$$\Delta : \mathcal{M}_h \to \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h.$$

En efecto, dadas las aplicaciones lineales

$$\Delta_L : \mathcal{M}_h \to \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$$

$$\Delta_R : \mathcal{M}_h \to \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$$

(co-producto a izquierda y co-producto a derecha respectivamente), definidas por las igualdades

$$\begin{aligned} \Delta_L(TdT) &= \Delta(T)(id \otimes d)(\Delta(T)), \\ \Delta_R(TdT) &= \Delta(T)(d \otimes id)(\Delta(T)), \end{aligned}$$

definimos

$$\Delta(TdT) = \Delta_L(TdT) + \Delta_R(TdT)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta(TdT) &= \Delta_L(TdT) + \Delta_R(TdT) \\ &= (T \otimes T)(id \otimes d)(T \otimes T) + (T \otimes T)(d \otimes id)(T \otimes T) \\ &= (T \otimes T)(dT \otimes T + T \otimes dT) \\ &= \Delta(T)\Delta(dT), \end{aligned}$$

y

$$d(\Delta(T)) = d(T \otimes T) = dT \otimes T + T \otimes dT = \Delta(dT).$$

Luego Δ es un morfismo de álgebras graduadas. Por la definición (2.9) y por ser ε una extensión de la co-unidad (1.4) es inmediato que ε es la co-unidad sobre el álgebra graduada $(\mathcal{M}_h, d)$.

Queda por demostrar que la aplicación S definida en (2.10) es la antípoda del álgebra graduada $(\mathcal{M}_h, d)$. Por la proposición (1.4) sabemos que los elementos $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ satisfacen (2.1), luego sus diferenciales

$$d(S(a)) = dc, \qquad d(S(b)) = -db - h(da - dc), \qquad d(S(c)) = da$$

satisfacen las relaciones (2.2) y (2.3), es decir, los elementos

$$S(a), \qquad S(b), \qquad S(c), \qquad d(S(a)), \qquad d(S(b)), \qquad d(S(c))$$

son elementos del álgebra graduada $\mathcal{M}_h$ y por lo tanto S es un antimorfismo sobre el álgebra graduada $\mathcal{M}_h$. Además, S satisface las siguientes identidades:

(i) $\mu(S \otimes id)\Delta = \mu(id \otimes S)\Delta = \eta\varepsilon$.

(ii) $\Delta S = \sigma(S \otimes S)\Delta$.

(iii) $\varepsilon S = \varepsilon$.

En efecto, (i) se deduce de los siguientes resultados:

$$\mu(S \otimes id)\Delta(T) = \mu(S \otimes id)(T \otimes T) = \mu(T^{-1} \otimes T) = I.$$

$$\mu(id \otimes S)\Delta(T) = \mu(id \otimes S)(T \otimes T) = \mu(T \otimes T^{-1}) = I.$$

$$\begin{aligned}
\mu(S \otimes id)\Delta(dT) &= \mu(S \otimes id)(dT \otimes T + T \otimes dT) \\
&= \mu(dT^{-1} \otimes T + T^{-1} \otimes dT) \\
&= \mu(-T^{-1}dTT^{-1} \otimes T + T^{-1} \otimes dT) \\
&= -T^{-1}dT + T^{-1}dT = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(id \otimes S)\Delta(dT) &= \mu(id \otimes S)(dT \otimes T + T \otimes dT) \\
&= \mu(dT \otimes T^{-1} + T \otimes dT^{-1}) \\
&= \mu(dT \otimes T^{-1} - T \otimes T^{-1}dTT^{-1}) \\
&= -dTT^{-1} + dTT^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Por la proposición (1.4), la propiedad (ii) se satisface sobre T. Para los elementos de dT, (ii) se obtiene de las dos expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\Delta S(dT) &= \Delta(dT^{-1}) = \Delta(-T^{-1}dTT^{-1})\\ &= -\Delta(T^{-1})\Delta(dT)\Delta(T^{-1})\\ &= -(T^{-1}\otimes T^{-1})(dT\otimes T + T\otimes dT)(T^{-1}\otimes T^{-1})\\ &= -T^{-1}dTT^{-1}\otimes T^{-1}TT^{-1} - T^{-1}TT^{-1}\otimes T^{-1}dTT^{-1}\\ &= -dT^{-1}\otimes T^{-1} - T^{-1}\otimes dT^{-1}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma(S\otimes S)\Delta(dT) &= \sigma(S\otimes S)(dT\otimes T + T\otimes dT)\\ &= \sigma(dT^{-1}\otimes T^{-1} + T^{-1}\otimes dT^{-1})\\ &= T^{-1}\otimes dT^{-1} + dT^{-1}\otimes T^{-1}\\ &= -T^{-1}\otimes T^{-1}dTT^{-1} - T^{-1}dTT^{-1}\otimes T^{-1}\\ &= -T^{-1}\otimes dT^{-1} - dT^{-1}\otimes T^{-1}.\end{aligned}$$

Por último, la propiedad (iii) se satisface directamente de las definiciones (2.9) y (2.10). Además, las propiedades (i) a (iii) se satisfacen para el co-producto a izquierda Δ_L y el co-producto a derecha Δ_R, luego se satisfacen también para elementos de la forma TdT.

Con estas propiedades S es una aplicación antípoda sobre $\mathcal{M}_h$ y así completamos la prueba de la proposición (2.1).

Definición 2.2. El álgebra de Hopf graduada $(\mathcal{M}_h,\ d,\ \Delta,\ \varepsilon,\ S)$ de la proposición anterior es el cálculo diferencial bicovariante sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$.

La bicovariancia del cálculo está dada por los signos $(\pm)$ de las relaciones (2.2) a (2.4) que satisfacen los generadores del álgebra graduada $\mathcal{M}_h$.

El cáculo diferencial de primer orden sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$ también lo podemos definir como el álgebra generada por las uno formas diferenciales sobre el grupo.

Dado el grupo de Lie $ST(2)$ generado por las entradas t^i_j de la matriz T las 1-formas de Maurer Cartan (ver [30]), invariantes a izquierda están definidas por, (ver [30]),

$$\omega^i_j = (T^{-1})^i_k(dT)^j_k.$$

Los elementos de la matriz de traza nula $\Omega = (\omega^i_j)$ generan el espacio Ω de las 1-formas invariantes a izquierda y son una base del espacio de formas diferenciales de primer orden sobre el grupo $ST(2)$. Entonces Ω es un bimódulo de formas diferenciales de primer orden sobre $\mathcal{A}$.

Si Ω es una representación del espacio de 1-formas diferenciales sobre el grupo $ST(2)$ que satisfacen

$$dT = T\Omega, \qquad d\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

por ser Ω un bimódulo bicovariante sobre el espacio de funciones $C^\infty(ST(2))$, podemos definir el álgebra graduada diferencial $\mathcal{M}_h$ como el álgebra generada por los elementos t^i_j de T y por las 1-formas invariantes a izquierda w^i_j de Ω, con ciertas relaciones entre ellos, con las cuales $\mathcal{M}_h$ tiene estructura de álgebra de Hopf graduada.

Proposición 2.2. *En términos de las 1-formas invariantes a izquierda $\Omega = (\omega^i_j)$ las relaciones (2.2), (2.3) y (2.4) de la proposición (2.1) toman la forma*

$$T_1 R \Omega_2 = \Omega_2 T_1 R^{-1} \tag{2.11}$$
$$T_2 R \Omega_1 = \pm \Omega_1 T_2 R \tag{2.12}$$
$$R\Omega_1 R^{-1} \Omega_2 = \mp \Omega_2 R \Omega_1 R^{-1} \tag{2.13}$$

respectivamente, donde

$$\Omega = T^{-1} dT, \qquad \operatorname{trz}(\Omega) = 0,$$
$$\Omega_1 = \Omega \otimes I, \qquad \Omega_2 = I \otimes \Omega.$$

Prueba. En efecto, puesto que $T\Omega = dT$

$$T_1\Omega_1 = dT_1 = (dT)_1, \qquad T_2\Omega_2 = dT_2 = (dT)_2$$

con

$$\Omega_1 = \Omega \otimes I, \qquad \Omega_2 = I \otimes \Omega.$$

Entonces partiendo de (2.1) obtemos:

$$\begin{aligned} RT_1T_2 &= T_2T_1R \\ RT_1T_2\Omega_2 &= T_2T_1R\Omega_2 \\ RT_1dT_2 &= T_2T_1R\Omega_2 \\ dT_2T_1R^{-1} &= T_2T_1R\Omega_2 \\ T_2\Omega_2T_1R^{-1} &= T_2T_1R\Omega_2 \\ \Omega_2T_1R^{-1} &= T_1R\Omega_2. \end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene (2.12) partiendo de (2.2). Para probar (2.13) tomamos la igualdad (2.4) y usando las igualdades anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} RdT_1dT_2 &= \mp dT_2dT_1R^{-1} \\ RdT_1T_2\Omega_2 &= \mp dT_2T_1\Omega_1R^{-1} \\ R^2T_2dT_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp RT_1dT_2R\Omega_1R^{-1} \\ RT_2T_1\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp T_1T_2\Omega_2R\Omega_1R^{-1} \\ T_1T_2R\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp T_1T_2\Omega_2T_1\Omega_1R \\ R\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp\Omega_2R\Omega_1R^{-1} \\ R\Omega_1R^{-1}\Omega_2 &= \mp\Omega_2R\Omega_1R^{-1}. \end{aligned}$$

Proposición 2.3. *El álgebra $\mathcal{M}_h$ generada por los elementos T (con $\det(T) = 1$) y Ω (con $\operatorname{trz}(\Omega) = 0$) que satisfacen las relaciones (2.1), (2.11), (2.12) y (2.13) es un álgebra de Hopf graduada diferencial con el co-producto Δ, la co-unidad ε y la aplicación antípoda siguientes:*

$$\begin{aligned} \Delta(T) &= T\otimes T, & \Delta(\Omega) &= \Omega\otimes I + (T\otimes\Omega)(S(T)\otimes I), \\ \varepsilon(T) &= I, & \varepsilon(\Omega) &= 0, \\ S(T) &= T^{-1}, & S(\Omega) &= -S(T)\Omega T. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Prueba. Puesto que las 1-formas de Maurer-Cartan invariantes a izquierda ω^i_j se pueden expresar en terminos de los generadores $a = t_{11}, b = t_{12}, c = t_{22}$ y sus diferenciales por

$$w_0 = c\,da, \qquad w_1 = c\,db - b\,dc, \qquad w_2 = a\,dc,$$

o también por

$$da = aw_0, \qquad db = aw_1 + bw_2, \qquad dc = cw_2,$$

entonces los elementos de las igualdades (2.11) a (2.13) pueden expresarse como suma de productos $t^i_jdt^k_l$, y con ellos el co-producto Δ, la co-unidad ε y la aplicación antípoda en (2.14) satisfacen (2.8) a (2.10) y por lo tanto, la validez de esta proposición se obtiene de la validez de las proposiciones (2.1) y (2.2).

Dada el álgebra de Hopf graduada $\mathcal{M}_h$ generada por los elementos de las matrices T y dT módulo las relaciones (2.11) a (2.13), queremos definir un corchete de Lie sobre $\mathcal{M}_h$ de tal forma que con ese corchete $\mathcal{M}_h$ tenga estructura de Lie-Poisson. Esto es, (ver [24]) definir un corchete:

$$\{\,\}: \mathcal{M}_h\otimes\mathcal{M}_h\to\mathcal{M}_h$$

que satisfaga las siguientes propiedades:

(1) Simetría graduada:

$$\{a, b\} = (-1)^{|a||b|+1}\{b, a\} \tag{2.15}$$

(2) Regla de Leibniz graduada:

$$\{ab, c\} = a\{b, c\} + (-1)^{|b||c|}\{a, b\}b \tag{2.16}$$

(3) Identidad de Jacobi graduada:

$$(-1)^{|a||c|}\{\{a, b\}, c\} + (-1)^{|b||c|}\{\{c, a\}, b\} + (-1)^{|a||b|}\{\{b, c\}, a\} = 0 \tag{2.17}$$

y que sea compatible con el producto en $\mathcal{M}_h$, es decir que satisfaga

$$\Delta(\{a, b\}) = \{\Delta(a), \Delta(b)\}_{\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h}$$

donde $\{,\}_{\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h}$ es el corchete inducido por el corchete de Lie de $\mathcal{M}_h$ sobre $\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$ y definido por

$$\{a \otimes b, c \otimes d\} = (-1)^{|b||c|}\{a, c\} \otimes bd + (-1)^{|b||c|}ac \otimes \{b, d\}$$

donde a, b, c, d son elementos de $\mathcal{M}_h$.

Nota 1. En la definición del corchete sobre $\mathcal{M}_h$ debemos tener presente que en el límite clásico $(h \to 0)$, el corchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ de $\mathcal{M}_h$ debe coincidir con el corchete definido sobre el álgebra graduada generada por los elementos conmutativos de T y sus diferenciales dT dado por:

$$\begin{gathered}\{T \otimes T\} = [r, T \otimes T],\\ \{T_1, dT_2\} + \{dT_1, T_2\} = [r, d(T_1T_2)] = d[r, T_1T_2]\end{gathered}$$

donde $T \otimes T = (T \otimes I)(I \otimes T) = T_1T_2$ y $\{T \otimes T\}$ es el corchete de Sklyanin (61) (ver [7]), generado por la r-matriz (55) y d es el operador diferencial graduado definido por:

$$d(T) = T\Omega, \qquad d(\Omega) = \Omega \wedge \Omega.$$

Definición 2.3. Una estructura de Poisson graduada se dice que es diferencial si el operador d satisface la regla de Leibniz para el corchete:

$$d\{a, b\} = \{da, b\} + (-1)^{|a|}\{a, db\}.$$

Nota 2. Si la estructura Lie-Poisson graduada definida sobre $\mathcal{M}_h$ es diferencial, el álgebra no conmutativa de formas diferenciales $\mathcal{M}_h$ admite una derivada exterior, (ver [29]).

Sabemos que el álgebra de funciones $C^\infty(ST(2))$ tiene estructura de Poisson, (ver [10]), con el corchete $\{T \otimes T\} = [r, T \otimes T]$ definido por la r-matriz (1.5). Este corchete induce el corchete de Lie sobre el álgebra graduada $\mathcal{M}_h$ como sigue:

$$\begin{aligned} \{T_1, T_2\} &= [r, T_1T_2] = r(T_1T_2) - (T_1T_2)r \\ \{T_1, dT_2\} &= [r, T_1dT_2] = r(T_1dT_2) - (T_1dT_2)r \\ \{dT_1, T_2\} &= [r, dT_1T_2] = r(dT_1T_2) - (dT_1T_2)r \\ \{T_1, dT_2\} + \{dT_1, T_2\} &= [r, d(T_1T_2)] = d[r, T_1T_2] \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde T_1, T_2, dT_1 y dT_2 son las matrices definidas en la proposición (2.1).

Proposición 2.4. *El cálculo diferencial de primer orden* $(\mathcal{M}_h, d, \Delta, \varepsilon, S)$ *tiene estructura de Hopf-Poisson graduada diferencial con el corchete (2.18).*

Prueba. Debemos ver que el corchete (2.18) es un corchete de Poisson y que el álgebra de Poisson $(\mathcal{M}_h, \{,\})$ es una estructura diferencial, es decir, el espacio $(\mathcal{M}_h, \{,\})$ satisface la definición (2.3).

Dadas las matrices T en (1.2), r en (1.5) y los corchetes

$$\{T_1, dT_2\} = \begin{pmatrix} \{a, da\} & \{a, db\} & \{b, da\} & \{b, db\} \\ 0 & \{a, dc\} & 0 & \{b, dc\} \\ 0 & 0 & \{c, da\} & \{c, db\} \\ 0 & 0 & 0 & \{c, dc\} \end{pmatrix},$$

$$\{dT_1, T_2\} = \begin{pmatrix} \{da, a\} & \{da, b\} & \{db, a\} & \{db, b\} \\ 0 & \{da, c\} & \{0, 0\} & \{db, c\} \\ 0 & 0 & \{dc, a\} & \{dc, b\} \\ 0 & 0 & 0 & \{dc, c\} \end{pmatrix}$$

y los productos

$$T_1dT_2 = \begin{pmatrix} a\,da & a\,db & b\,da & b\,db \\ 0 & adc & 0 & bdc \\ 0 & 0 & c\,da & c\,db \\ 0 & 0 & 0 & cdc \end{pmatrix}, \qquad dT_1T_2 = \begin{pmatrix} da\,a & da\,b & db\,a & db\,b \\ 0 & da\,c & 0 & db\,c \\ 0 & 0 & dc\,a & dc\,b \\ 0 & 0 & 0 & dc\,c \end{pmatrix}$$

se tiene que los corchetes (2.18) se pueden expresar por las igualdades siguientes, definidas sobre los generadores del álgebra graduada $\mathcal{M}_h$:

$$\begin{array}{ll}
\{a,a\} = \{b,b\} = \{c,c\} = 0, & \\
\{a,b\} = -\{b,a\} = a^2 - ac, & \\
\{a,c\} = \{c,a\} = 0, & \\
\{b,c\} = -\{c,b\} = ac - c^2, & \\
\{a,da\} = 0, & \{a,dc\} = 0, \\
\{c,da\} = 0, & \{c,dc\} = 0, \\
\{a,db\} = a(dc - da), & \{b,da\} = (a-c)\,da, \\
\{b,db\} = b\,dc - c\,db + b\,da - a\,db, & \\
\{b,dc\} = (c-a)dc, & \{c,db\} = -c(dc - da), \\
\{da,a\} = 0, & \{da,c\} = 0, \\
\{dc,a\} = 0, & \{dc,c\} = 0, \\
\{da,b\} = da(c-a), & \{db,a\} = (da - dc)a, \\
\{db,b\} = db\,c - dc\,b + db\,a - da\,b, & \\
\{db,c\} = (dc - da)c, & \{dc,b\} = -dc(c-a)
\end{array} \tag{2.19}$$

donde los generadores del álgebra $\{a, b, c, da, db, dc\}$ satisfacen las relaciones (2.11) a (2.13) de la proposición (2.1).

El corchete (2.19) satisface las propiedades del corchete de Lie graduado (2.15) a (2.17). En efecto, la antisimetría graduada (2.15) se satisface directamente. Veamos el caso

$$\{a, db\} = a(dc - da) = (-1)^{|a||b|+1}\{db, a\} = (da - dc)a;$$

los otros casos se verifican de la misma forma. La regla de Leibniz (2.16) se obtiene también en forma directa hallando las diferenciales de los corchetes y comparando en las igualdades (2.19).

Como ejemplo veamos un caso.

$$\begin{aligned}
\{da,b\} + \{a,db\} &= da(c-a) + a(dc - da) \\
d\{a,b\} &= -d(a^2 - ac) = -d(a^2) - d(ac) \\
&= -da\cdot a - (-1)^{|a|}a\cdot da + da\cdot c + (-1)^{|a|}a\cdot dc \\
&= da\cdot(c-a) + a\cdot(dc - da)
\end{aligned}$$

luego,

$$d\{a,b\} = \{da,b\} + (-1)^{|a|}\{a,db\}$$

y esta propiedad se satisface para todo elemento del álgebra graduada $\mathcal{M}_h$. Entonces el corchete definido en (2.19) es un corchete de Lie graduado sobre el álgebra de Hopf $\mathcal{M}_h$.

Para probar que el corchete (2.19) es de Poisson basta verificar que el coproducto

$$\Delta : \mathcal{M}_h \to \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h$$
$$\Delta = \Delta_L + \Delta_R$$

es una aplicación de Poisson. Sabemos que Δ es una aplicación de Poisson sobre los elementos de T, (ver [10]). Por lo tanto, Δ_L y Δ_R son aplicaciones de Poisson sobre el álgebra graduada generada por T y dT. Luego $\Delta = \Delta_L + \Delta_R$ es una aplicación de Poisson sobre el álgebra graduada $\mathcal{M}_h$; es decir, el corchete

$$\{\, , \,\} : \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{M}_h \to \mathcal{M}_h$$

definido en (2.18) es compatible con el producto en $\mathcal{M}_h$.

Con esta afirmación queda demostrado que el álgebra $(\mathcal{M}_h, d, \Delta, \varepsilon, S, \{,\})$ es un álgebra de Hopf-Poisson graduada. Es decir, el cálculo diferencial de primer orden del grupo cuántico $ST_R(2)$ es un álgebra de Hopf-Poisson graduada con el corchete (2.18) y tiene estructura de Poisson diferencial.

Por la proposición (2.4) y la nota [2] existe una única diferencial

$$d : \mathcal{M}_h^k \to \mathcal{M}_h^{k+1}$$

tal que

$$d^2 = 0, \quad d(w_j^i) = dw_j^i, \quad d(t_j^i) = dt_j^i, \quad d(w \cdot \eta) = dw \cdot \eta + (-1)^{|w|} w \cdot d\eta$$

para w, η elementos homogéneos y $|w|$ el grado de w.

Completamos así la construcción de un cálculo diferencial sobre el grupo cuántico $ST_R(2)$ con una estructura Lie-Poisson diferencial y una derivada exterior.

Bibliografía

[1] P. Aschieri and L. Castellani, *An introduction to non-commutative differential geometry on Quantum Groups*, CERN TH 6565/92, Torino 1992, pp. 1-44.

[2] G. E. Arutyunov and P.B. Medvedev, *Quantization of the external algebra on a Poisson-Lie Group*, hep-th/9311096, Nov. 1993, pp. 1–20.

[3] I. Ya Aref'eva, G.E. Arutyunov and P.B. Medvedev, *Poisson-Lie structures on the external algebra of $SL(2)$ and their quantization*, help-th/9401127, 1994, pp. 2–18.

[4] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Institut des Hautes Studes Scientifiques, Grenoble. Extrait des Publications Mathematiques **62** (1986), 257–358.

[5] V. Chari and A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University, Cambridge University Press, 1994.

[6] V. Drinfeld, *Quantum Groups*, ICM-86, 1 (1986), 798–820, Academic Press.

[7] H. D. Doebner, J. D. Hennig and W. Lücke, *Quantum Groups, Proceeding*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics 370, 1990.

[8] P. Etingof and David Kazhdan, *Quantization of Poisson Algebraic groups and Poisson Homogeneous spaces*, q-alg 9510020 (1995), 1–9.

[9] L. D. Faddeev and P. N Pyatov, *The differential calculus on Quantum Linear Groups*, hep-th/9402070=20 (1994), 0–14.

[10] B. Guerrero, *Una cuantización del grupo triangular* $ST(2)$, preprint, Universidad Nacional de Colombia.

[11] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symetric spaces*, Academic Press, Inc, San Diego California, 1978.

[12] B. Jurčo, *Differential Calculus on Quantum Groups: Contructive procedure*, CERN - TH - 7417 / 94 (1994), 1–10, CERN, theory division, CH-1211 Geneve 23.

[13] C. Kassel, *Groupes Quantiques*, Math IRMA, Strasbourg, 1992.

[14] J. H Lu and A. Weinstein, *Poisson Lie Groups, Dressing Transformations, and Bruhat descompositions*, J. Differential Geometry **31** (1990), 501–526.

[15] L. A. Takhtajan, *Quantum Groups and Integrable Models*, Advaced Studies in Pure Mathematics **19** (1990), 435–457.

[16] L. A. Takhtajan, *Introduction to Quantum Groups*, Lecture Notes in Physics **370** (1990), 3–28, Springer-Verlag.

[17] L. A. Takhtajan, *Lectures on Integrable Systems. Elementary course on Quantum Groups*, World Scientific Proceedings of the CIMPA School, 1991, pp. 319–348.

[18] Boris Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, Pennsylvania State University USA (1993), 1–37.

[19] N. Yu Reshetikhin, L. Takthajan and Faddeev, *Quantization of Lie Groups and Lie Algebras*, Algebra and Analysis (1989), 178–206.

[20] M. A. Semenov-Tian-Shnsky, *Lectures on R-matrices, Poisson-Lie Groups and Integrable Systems*, Lectures on Integrable Systems World Scientific Proceedings of the CIMPA School 1991 Nice-France (1994), 269–318.

[21] B. Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, preprint, The Pennsylvania State University, 1994, pp. 1–37.

[22] S. L. Woronowicz, *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups) de Yang-Baxter quantique constante*, Commun. Math Phys., Springer-Verlag (1989), 125–170.

[23] S.L. Woronowicz, *Twisted* $SU(2)$ *group. An example of noncommutative differential calculus*, RIMS Instituto Mathathematics Science Kyoto University **23** (1987), 117–181.

[24] B. Zumino, *Differential Geometry of Quantum Groups*, X^{th} IAMP. Conf. Peipzig, 1991 ed. Schmudgen, Spring-Verlag, 1992, pp. 117–181.

[25] B. Zumino, P. Watts, *Cartan Calculus on Quantum Lie Algebras*, LBL-34833 UCB - PTH - 93/32, 1993, pp. 1–14.

(Recibido en mayo de 1997; revisado por el autor en noviembre de 1998)

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia