Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 33 (1999), páginas 15–25

Cuasivariedades de retículos distributivos simétricos

HERNANDO GAITÁN
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. By applying a technique of Adams and Dziobiak it is proved that the lattice of quasivarieties of the symmetric distributive lattices has the cardinality of the continuum.

Keywords and phrases. Quasivarieties, symmetric distributive lattices.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 08C15. Secondary 06D99.

RESUMEN. Aplicando una técnica desarrollada por Adams y Dziobiak se demuestra que el retículo de las cuasivariedades de los retículos distributivos simétricos tiene la cardinalidad del continuo.

1. Introducción

Una variedad es una clase de álgebras del mismo tipo cerrada para la formación de subálgebras, productos directos e imágenes homomorfas, mientras que una cuasivariedad es una clase de álgebras del mismo tipo cerrada para la formación de subálgebras, productos directos (incluyendo productos de familias vacías) y ultraproductos. Nótese que toda variedad es en particular una cuasivariedad. El conjunto de todas las subvariedades (respectivamente, subcuasivariedades) contenidas en una variedad (respectivamente, cuasivariedad) dada $\mathcal{V}$ forma, con respecto a la inclusión, un retículo que se denota $L_v(\mathcal{V})$ (respectivamente, $L_q(\mathcal{V})$).

Este trabajo se ocupa de la estructura de $L_q(\mathcal{S})$ donde $\mathcal{S}$ es la variedad de los retículos distributivos simétricos. Esta variedad fue recientemente introducida en [4]. Un miembro de $\mathcal{S}$ es un álgebra $\langle L; \vee, \wedge, T, 0, 1\rangle$ del tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$

donde $\langle L; \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo con 0 y 1 y $T : L \to L$ preserva $\wedge, \vee, 0, 1$ y además $T^2(x) = x$; en otras palabras, T es un $\mathcal{D}_{01}$-automorfismo involutivo de L. $\mathcal{D}_{01}$ denota aquí la variedad de los retículos distributivos con 0 y 1.

La estructura de $L_v(\mathcal{S})$ es bastante simple; una cadena de tres elementos a saber: la subvariedad trivial, la subvariedad generada por la cadena de dos elementos donde T es la identidad y finalmente, la variedad $\mathcal{S}$ misma. $L_q(\mathcal{S})$ es bastante más compleja como se verá en este trabajo. Si en lugar de un $\mathcal{D}_{01}$-automorfismo involutivo L estuviera dotada de un automorfismo involutivo dual (es decir, una aplicación involutiva que invierte el orden del retículo), se estaría en presencia de una álgebra de Morgan. La variedad de dichas álgebras se denotará por $\mathcal{M}$. Es bien sabido que $L_v(\mathcal{M}) = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{M}\}$ donde $\mathcal{T}$ es la variedad trivial, $\mathcal{B}$ es la variedad de las álgebras booleanas y $\mathcal{K}$ es la variedad de las álgebras de Kleene. En [3], Adams y Priestley muestran que $\mathcal{M}$ es universal. De esto se sigue que $|L_q(\mathcal{M})| = 2^{\aleph_0}$. Adams y Dziobiak en [2] prueban, usando un método desarrollado en [1], que $L_q(\mathcal{K})$ contiene una copia isomorfa del retículo libre en ω generadores como subretículo. En esta nota, usando el mismo método, se probará un resultado igual para $\mathcal{S}$. Concretamente, se probará el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *$L_q(\mathcal{S})$ contiene una copia isomorfa del retículo libre en ω generadores como subretículo y su cardinalidad es $2^{\aleph_0}$. En particular, $L_q(\mathcal{S})$ no satisface identidad no trivial alguna de retículo.*

Nótese que no hay subcuasivariedades estrictas (es decir, subcuasivariedades que no son subvariedades) contenidas en la subvariedad de $\mathcal{S}$ generada por la cadena de dos elementos (ella es esencialmente $\mathcal{D}_{01}$), de manera que toda subcuasivariedad estricta contienen a dicha subvariedad.

En realidad, el aporte nuevo de esta nota es la construcción de una familia infinita de retículos distributivos simétricos finitos que satisface ciertas condiciones las cuales permitirán aplicar el método mencionado anteriormente (ver la Sección 3). Para la presentación de estos retículos finitos, se desarrollará en la Sección 2 una representación de los miembros finitos de $\mathcal{S}$ por medio de conjuntos parcialmente ordenados (la llamada dualidad de Priestley para retículos distributivos simétricos).

2. Dualidad

Un espacio de Priestley es una tripla $(P, \leq, \tau)$ donde $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, τ es una topología compacta sobre P y para cada $x \not\geq y$ en P, existe un subconjunto cerrado-abierto decreciente U de P tal que $x \in U$

y $y \notin U$. En [7] Priestley prueba que la categoría $\mathcal{D}_{01}$ de los retículos distributivos con 0 y 1 con morfismos los homomorfismos de retículos con 0 y 1 es dualmente equivalente a la categoría $\mathcal{P}$ de los espacios de Priestley con morfismos las funciones continuas que preservan el orden. La categoría de los espacios de Priestley $(P, \leq \tau, \varphi)$ dotados con un endomorfismo involutivo continuo φ tal que $x \leq y$ si y solo si $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ y con las funciones monótonas continuas que conmutan con φ como morfismos es dualmente equivalente a la categoría $\mathcal{M}$ de las álgebras de Morgan con homomorfismos de álgebras de Morgan como morfismos (ver [5]). Se podría probar que la categoría de los espacios de Priestley $(P, \leq \tau, \varphi)$, como arriba, con la diferencia de que $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ es dualmente equivalente a la categoría $\mathcal{S}$ de los retículos distributivos simétricos. Sin embargo, como este trabajo se refiere solo a retículos distributivos simétricos finitos, no se considera aspecto topológico alguno. Así, en lugar de tratar con espacios de Priestley en general, se considera aquí solamente conjuntos finitos parcialmente ordenados ya que para estructuras finitas, la topología es siempre discreta. A continuación se describe brevemente la dualidad de Priestley para elementos finitos de $\mathcal{D}_{01}$.

Un subconjunto U de un conjunto parcialmente ordenado (conjunto p.o. para abreviar) P se dice creciente si para $p, q \in P$, $p \in U$ y $p \leq q$ implican $q \in U$. La dualidad mencionada anteriormente permite identificar cada retículo distributivo finito L con el retículo de los conjuntos crecientes del conjunto p.o. constituido por los filtros primos de L. El orden en dicho conjunto p.o., que se suele llamar el *dual* de L, es por supuesto la inclusión. Recuérdese que un filtro primo x en un retículo es un subconjunto del retículo, creciente y no vacío, cerrado para la operación $\wedge$ y tal que si $a \vee b \in x$ entonces $a \in x$ ó $b \in x$. Un ideal primo es un filtro primo para el orden dual. Dado un conjunto p.o. P, el retículo constituido por los subconjuntos crecientes de P con operaciones de retículo unión e intersección de conjuntos y $\varnothing$ y P como 0 y 1 respectivamente, se denomina el *dual* de P. El dual del dual de un retículo (conjunto p.o) es isomorfo al retículo (conjunto p.o) mismo. Si L_1 y L_2 son retículos distributivos finitos con conjuntos p.o.'s duales P_1 y P_2 respectivamente, hay una correspondencia biunívoca entre los homomorfismos $f: L_1 \to L_2$ (en $\mathcal{D}_{01}$) y las funciones monótonas $\phi: P_2 \to P_1$ dada por

$$\phi^{-1}(a) = f(a) \quad \text{para todo} \quad a \in L_1.$$

Las aplicaciones ϕ y f se llaman duales la una de la otra. Además, f es uno a uno si y solo si ϕ es sobre mientras que f es sobre si y solo si ϕ es un isomorfismo de orden.

Definición 2.1. Un conjunto p.o. P se dirá simétrico si esta dotado con un automorfismo de orden involutivo $\zeta: P \to P$, es decir, $x \leq y \Leftrightarrow \zeta(x) \leq \zeta(y)$ y

ζ^2 es la identidad de P. Una aplicación monótona $\phi : (P_1, \zeta_1) \to (P_2, \zeta_2)$ entre conjuntos p.o. simétricos se dice simétrica si $\phi \circ \zeta_1 = \zeta_2 \circ \phi$.

El siguiente teorema, cuya prueba se omite por ser directa, establece una equivalencia dual entre la categoría de los retículos distributivos simétricos finitos con homomorfismos algebraicos como morfismos y la categoría de los conjuntos finitos p.o. simétricos (P, ζ) con morfismos las funciones monótonas simétricas.

Teorema 2.2. *Sea $L \in \mathcal{S}$ con dual P. Entonces (P, ζ) con ζ dado por $\zeta(x) = \{T(a) : a \in x\}$ es un conjunto p.o. simétrico. Recíprocamente, dado (P, ζ), conjunto p.o. simétrico tal que L es el retículo dual de P, entonces L, con T dado por $T(a) = \{\zeta(x) : x \in a\}$ es un miembro de $\mathcal{S}$. Si $f : (L_1, T_1) \to (L_2, T_2)$ es un homomorfismo en $\mathcal{S}$ entonces su aplicación dual $\phi : (P_2, \zeta_2) \to (P_1, \zeta_1)$ es tal que $\phi(\zeta_2(x)) = \zeta_1(\phi(x))$. Recíprocamente, si $\phi : (P_2, \zeta_2) \to (P_1, \zeta_1)$ es una aplicación monótona simétrica, su aplicación dual $f : (L_1, T_1) \to (L_2, T_2)$ es tal que $f(T_1(a)) = T_2(f(a))$.*

Como los productos finitos de retículos distributivos simétricos finitos corresponden a uniones disjuntas de conjuntos p.o. simétricos finitos, para el propósito de esta nota es más fácil trabajar con estos últimos y así se hará.

3. Las herramientas

En esta sección se presentan las herramientas que serán usadas en la demostración del Teorema 1.1 tal como aparecen en las secciones 2 y 3 de [2].

Para un conjunto $\mathcal{A}$ de álgebras del mismo tipo, $Q(\mathcal{A})$ denota la cuasivariedad generada por $\mathcal{A}$. Denótese con $P_{fin}(\omega)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de ω y considérese una familia infinita $(A_W : W \in P_{fin}(\omega))$ de álgebras finitas del mismo tipo que satisface las siguientes condiciones para X, Y y Z elementos de $P_{fin}(\omega)$:

(P1) $A_\varnothing$ es un álgebra trivial.
(P2) Si $X = Y \cup Z$, entonces $A_X \in Q(\{A_Y, A_Z\})$.
(P3) Si $X \neq \varnothing$ y $A_X \in Q(\{A_Y\})$ entonces $X = Y$.
(P4) Si A_X es una subálgebra de $B \times C$ donde B y C son miembros finitos de $Q(\{A_W : W \in P_{fin}(\omega)\})$ entonces existen Y y Z tales que $A_Y \in Q(\{B\})$, $A_Z \in Q(\{C\})$ y $X = Y \cup Z$.

El resultado principal de esta nota se basa en el siguiente resultado de Adams y Dziobiak. Ver [1, Proposición 3.1] o [2, Proposición 2.1]

Proposición 3.1. *Si $\mathcal{A}$ es una cuasivariedad de álgebras de tipo finito que contiene una familia infinita de álgebras finitas que satisface (P1)-(P4), entonces el retículo de ideales del retículo libre con w generadores es isomorfo a un subretículo de $L_q(\mathcal{A})$. En particular, $L_q(\mathcal{A})$ no satisface identidad no trivial alguna de retículo y su cardinalidad es $2^{\aleph_0}$.*

Recuérdese lo siguiente: un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto V de elementos llamados vértices junto con un conjunto E cuyos elementos, llamado lados, son subconjuntos de 2 elementos de V. Un grafo es conexo si para cada par x, y de elementos distintos de V hay una sucesión $z_0, z_1, \ldots, z_n$ de elementos de V tales que $x = z_0$, $y = z_n$ y $\{z_i, z_i + 1\} \in E$ para cada $i < n$. Una función φ de un grafo $G = (V, E)$ a un grafo $G' = (V', E')$ se dice compatible si, para $x, y \in V$, $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'$ siempre que $\{x, y\} \in E$.

En la siguiente sección se construirá una familia apropiada de miembros de $\mathcal{S}$, $(L_W; W \in P_{fin}(\omega))$, que satisafaga las propiedades (P1)-(P4) de la Proposición 3.1. Para ello se procederá exactamente como en [2], construyendo los espacios simétricos duales haciendo uso de la existencia de una familia infinita $(G_i = (V_i, E_i) : i < \omega)$ de grafos para la cual no hay aplicaciones compatibles entre miembros distintos de la familia y las únicas aplicaciones compatibles de un miembro de la familia en si mismo son sobreyectivas. La existencia de tal familia se sigue de Hedlrin y Sichler [6]. Se asumirá que para distintos $i, j < \omega$, G_i y G_j no tienen vértices en común.

4. La construcción

Para $W \in P_{fin}(\omega)$ con $W \neq \emptyset$, se define el conjunto $(P(W), \leq \zeta_W)$, p.o. simétrico, así:

$$P(W) = \{a, b, c\} \cup \bigcup_{i \in W} D_i \cup \bigcup_{i \in W} E_i$$

donde a, b, c son elementos fijos y $D_i = V_i \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. El orden parcial en $P(W)$ está dado por las siguientes relaciones:

- Para $i \in W$ y $x \in V_i$, $(x, 0) < (x, 3)$; $(x, 1) < (x, 2)$, $(x, 4)$, $(x, 9)$; $(x, 5) < (x, 8)$; $(x, 6) < (x, 4)$, $(x, 7)$, $(x, 9)$; $a < (x, 2)$, $(x, 4)$, $(x, 9)$, $(x, 7)$; $b < (x, 2)$, $(x, 3)$, $(x, 4)$; $c < (x, 7)$, $(x, 8)$, $(x, 9)$.
- Para $i \in W$ y $\{x, y\} \in E_i$, $(x, 0)$, $(y, 0)$, $(x, 1)$, $(y, 1)$, $(x, 5)$, $(y, 5)$, $(x, 6)$, $(y, 6)$, $a < \{x, y\}$.

La Figura 1 muestra una porción del orden parcial en $P(W)$. Nótese que todos los elementos de $P(W)$ son maximales o son minimales. La función ζ_W está definida por las relaciones $\zeta_W(b) = c$; $\zeta_W(x, i) = (x, i + 5)$, (suma módulo 10); $\zeta_W(\{x, y\}) = \{x, y\}$ y $\zeta_W(a) = a$.

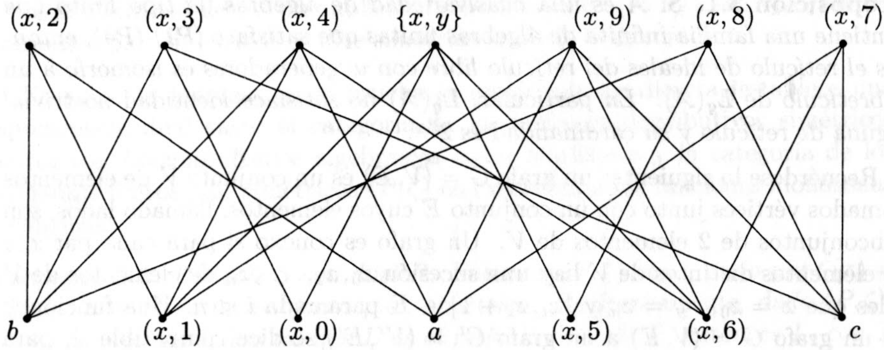

FIGURA 1. Una porción del orden parcial de $P(W)$.

Los dos lemas que siguen se refieren a una aplicación simétrica $\varphi : P(X) \to P(Y)$ donde $X, Y \in P_{fin}(\omega)$.

Lema 4.1. *Si* $\varphi(\{a,b,c\}) \neq \{a,b,c\}$ *se tiene que para cada* $k \in Y$ *y* $z \in V_k$, $\{(z,3), (z,8)\} \cap \varphi(P(X)) = \varnothing$.

Prueba. Obsérvese que $\varphi(a) \in \{a, \{u,v\}\}$ para algún $j \in Y$ y $\{u,v\} \in E_j$.

Caso $\varphi(a) = \{u,v\}$. En este caso, ya que φ es monótona, se tiene que para todo $i \in X$ y $x \in V_i$, $\varphi(x,2) = \varphi(x,4) = \varphi(x,9) = \varphi(x,7) = \{u,v\}$. De acuerdo con esto, es claro que

$$\{\varphi(b), \varphi(c), \varphi(x,1), \varphi(x,0), \varphi(x,5), \varphi(x,6)\} \cap \{(u,3), (u,8), (v,3), (v,8)\} = \varnothing.$$

De $b < (x,2)$ se sigue $\varphi(b) \in \{\{u,v\}, (u,1), (u,6), (u,0), (u,5)\}$. Si $\varphi(b) = (u,0)$ entonces $\varphi(x,8) \in \{(u,3), (u,0), \{u,v\}\}$. Se descarta $\varphi(x,8) \in \{(u,0), (u,3)\}$ así: si $\varphi(x,8) = (u,3)$, como $\varphi(c) = (u,5)$ y $c < (x,8)$ entonces $(u,5) \leq (u,3)$ lo que contradice el orden en $P(Y)$. De forma similar se descarta $\varphi(x,8) = (u,0)$. Luego, si $\varphi(b) = (u,0)$, $\varphi(x,8) = \varphi(x,3) = \{u,v\}$. Por simetría se concluye que si $\varphi(b) = (u,5)$; entonces $\varphi(x,8) = \varphi(x,3) = \{u,v\}$. Si $\varphi(b) = (u,1)$, entonces $b < (x,3)$ implica que $\varphi(x,3) \in \{(u,2), (u,4), (u,1), (u,9), \{u,v\}\}$ y por tanto, $\varphi(x,8) \in \{(u,7), (u,9), (u,6), (u,4), \{u,v\}\}$. Si $\varphi(b) = (u,6)$, $b < (x,3)$ implica que $\varphi(x,3) \in \{(u,9), (u,4), (u,7), (u,6), \{u,v\}\}$ y por tanto $\varphi(x,8) \in \{(u,4), (u,9), (u,2), (u,1), \{u,v\}\}$. Finalmente, si $\varphi(b) = \{u,v\}$, entonces $\varphi(x,3) = \varphi(x,8) = \{u,v\}$.

Caso $\varphi(a) = a$. Si $\varphi(b) = \{u,v\}$ entonces $\varphi(x,2) = \varphi(x,3) = \varphi(x,4) = \varphi(x,9) = \varphi(x,8) = \varphi(x,7) = \varphi(c) = \{u,v\}$ y obviamente

$$\{\varphi(x,1), \varphi(x,0), \varphi(x,5), \varphi(x,6)\} \subseteq \{\{u,v\}, (u,k), v(k) : k = 0,1,5,6\}.$$

Si $\varphi(b) = (u,1), b < (x,k), k = 1,2,3,$ implica que $(u,1) \leq \varphi(x,k), k = 1,2,3;$ de donde

$$\{(u,3),(u,8)\} \cap \{\varphi(x,k) : k = 2,3,4,7,8,9\} = \varnothing.$$

$\{\varphi(x,k) : k = 0,1,5,6\} \cap \{(u,3),u,8)\} = \varnothing$ pues en caso contrario $\varphi(\{x,y\}) \in \{(u,3),(u,8)\}$ lo que no puede ser pues $\zeta_Y(\varphi(\{x,y\})) = \varphi(\{x,y\})$. Si $\varphi(b) = (u,0)$, como $b < (x,2)$ entonces $(u,0) \leq \varphi(x,2)$ de donde

$$\varphi(x,2) \in \{(u,0),(u,3),\{u,v\}\},$$

lo cual no es posible pues $a = \varphi(a) \leq \varphi(x,2)$. $\varphi(b) = (u,2)$ implica $\varphi(x,2) = \varphi(x,3) = \varphi(x,4)$ lo que a su vez implica que $(u,3),(u,8) \notin \varphi(P(X))$. A lo mismo se llega si $\varphi(b) \in \{(u,4),(u,7),(u,9)\}$. Si $\varphi(b) = a$, puesto que $b < (x,3),(x,8)$ entonces $a \leq \varphi(x,3), \varphi(x,8)$ de donde

$$\varphi(x,3), \varphi(x,8) \in \{a,(u,2),(u,4),(u,7),(u,9)\}.$$

Igual sucede con $\varphi(x,2), \varphi(x,4), \varphi(x,7), \varphi(x,9)$.

Lema 4.2. *Si* $\varphi(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\}$ *entonces:*

(i) $X \subseteq Y$;
(ii) *Para* $i \in X$, $\varphi(D_i)$ *y* $\varphi(\{\{x,z\} \in E_i : i \in X\}) = \{\{x,z\} \in E_i : i \in X\}$.

Prueba. Para $i \in X$ y $z \in V_i$, como $b, c < (z,3)$, entonces $b, c \leq \varphi(z,3)$ y esto implica que $\varphi(z,3) \in \{(u,3),(u,8)\}$ para algún $j \in Y$ y $u \in V_j$. Supóngase primero que $\varphi(z,3) = (u,3)$. Entonces como $(z,0) < (z,3)$, $\varphi(z,0) \leq (u,3)$ de donde se deduce que $\varphi(z,0) \in \{b,c,(u,0),(u,3)\}$. Supóngase que $\varphi(z,0) = (u,3)$ y sea $t \in V_i$ tal que $\{z,t\} \in E_i$. Tal t debe existir pues los grafos en consideración son conexos. Entonces $\varphi(\{z,t\}) = (u,3)$. Pero esto no puede ser pues se tendría

$$(u,8) = \zeta_Y(u,3) = \zeta_Y(\varphi(\{z,t\})) = \varphi(\zeta_X(\{z,t\})) = \varphi(\{z,t\})) = (u,3).$$

$\varphi(z,0) = b$ (o c) implica que b (o c) $\leq \varphi(\{z,t\})$ lo que no puede ser pues $\varphi(\{z,t\} \in E_k$ para algún $k \in Y$ o $\varphi(\{z,t\} = a$. En conclusión, $\varphi(z,0) = (u,0)$. Se puede deducir en forma similar que si $\varphi(z,3) = (u,8)$ entonces $\varphi(z,0) = (u,5)$. En cualquier caso se tiene que

$$\varphi(\{(z,3),(z,8),(z,0),(z,5)\}) = \{(u,3),(u,8),(u,0),(u,5)\};$$

$$\varphi(\{(z,0),(z,5)\}) = \{(u,0),(u,5)\};$$

Considérese ahora los grafos

$$G = \dot{\bigcup}(G_i : i \in X) \quad \text{y} \quad H = \dot{\bigcup}(G_j : j \in Y).$$

El punto encima del símbolo de unión representa unión disjunta. Defínase la aplicación

$$\Psi : G \to H; \quad \psi(z) = y$$

donde $\varphi(\{(z,k) : k \in \{0,3,5,8\}\}) = \{(y,k) : k \in \{0,3,5,8\}\}$. Es claro que Ψ esta bien definida. Se afirma ahora que Ψ es compatible. Para verificar esta afirmación sea $\{z,z'\}$ un lado de G y sea $y = \psi(z)$ y $y' = \psi(z')$. Como $\varphi(\{(z,0),(z,5)\}) = \{(y,0),(y,5)\}$ y $\varphi(\{(z',0),(z',5)\}) = \{(y',0),(y',5)\}$ y como $(z,0),(z,5),(z',0)$ y $(z',5)$ son menores que $\{z,z'\}$ entonces $(y,0)$, $(y,5)$, $(y',0)$ y $(y',5)$ son menores que $\varphi(\{z,z'\})$ que, por la definición de $P(Y)$ y el hecho de que φ es simétrica, debe ser un lado de H. Más aún, dicho lado debe ser $\{y,y'\}$; esto es, $\varphi(\{z,z'\}) = \{y,y'\}$. Esto prueba que Ψ es compatible. Recuérdese que para cada $i \in X$, G_i es conexo. Entonces existe $j \in Y$ tal que $\Psi|_{G_i} : G_i \to G_j$ es una aplicación compatible lo cual, por la forma como fue escogida la familia $(G_i : i < w)$, solo es posible cuando $j = i$ y esto muestra que $X \subseteq Y$. Además, como las únicas aplicaciones compatibles de G_i en si mismo son biyectivas entonces $\varphi(D_i) = D_i$ y $\varphi(E_i) = E_i$. Esto completa la prueba.

Ahora se define la familia $(L_W : W \in P_{fin}(\omega))$ de miembros de $\mathcal{S}$ así: $L_\varnothing$ es el retículo distributivo simétrico trivial. Para $\varnothing \neq W \in P_{fin}(\omega)$ sea L_W el miembro de $\mathcal{S}$ cuyo espacio simétrico dual es $(P(W),\zeta_W)$. Lo que sigue es la verificación de que esta familia satisface (P1)-(P4). Dicha verificación, con los cambios obvios, es igual a la dada en [2, Lemas 3.4 3.5 y 3.6]. Incluimos en la siguiente sección dicha verificación solo para hacer el artículo autocontenido.

5. La verificación

Lema 5.1. $(L_W : W \in P_{fin}(\omega))$ *satisface (P2–P3).*

Prueba. Para verificar que (P2) se satisface sean $X,Y,Z \in P_{fin}(\omega)$ tales que $X = Y \cup Z$ y considérese la aplicación simétrica natural

$$\varphi : P(Y) \dot\cup P(Z) \to P(X)$$

la cual es claramente sobreyectiva. En consecuencia, por el Teorema 2.2, la aplicación dual de φ es una aplicación inyectiva de L_X en $L_Y \times L_Z$ y por lo tanto $L_X \in Q(\{L_Y, L_Z\})$.

Para verificar que (P3) se satisface sean $X,Y \in P_{fin}(\omega)$, $X \neq \varnothing$, tales que $L_X \in Q(L_Y)$. Entonces L_X es isomorfo a una subálgebra de L_Y^m para algún $m \geq 1$. Ahora, de nuevo por el Teorema 2.2, la aplicación dual del homomorfismo inyectivo correspondiente

$$\varphi : \dot{\bigcup}_{k=1}^{m} P_k(Y) \to P(X)$$

(cada $P_k(Y)$ es una copia de $P(Y)$) es una aplicación simétrica sobreyectiva. Nótese que para cada $k, \varphi_k = \varphi|_{P_k(Y)} : P_k(Y) \to P(X)$ es una aplicación simétrica. Escójase $i \in X$ y $x \in V_i$. Como φ es sobreyectiva, $(x,3) \in \varphi(P_k(Y))$ para algún $k < m$. Se sigue de los Lemas 4.1 y 4.2 que $Y \subseteq X$. Además, como $(x,3) \in D_i$, $(x,3) \in \varphi(D_j)$ para algún $j \in Y$ y, de nuevo por el Lema 4.2, $\varphi(D_j) = D_j$ de donde se sigue que $i = j \in Y$; esto es, $X \subseteq Y$. Por tanto, $X = Y$ como era deseado.

Lema 5.2. *$(L_W : W \in P_{fin}(w))$ satisface $(P4)$.*

Prueba. Sean $X \in P_{fin}(\omega)$ y $B, C \in Q(\{L_W : W \in P_{fin}(\omega)\})$, B y C ambos finitos y L_X subálgebra de $B \times C$. Si $X = \varnothing$, (P4) se satisface con $Y = Z = \varnothing$. Asúmase ahora que $X \neq \varnothing$ y denótese con P_B y P_C los duales de B y C respectivamente. Entonces existe una aplicación simétrica sobreyectiva

$$\varphi : P_B \dot{\cup} P_C \to P(X).$$

Además, existen dos sucesiones $Y_0, \ldots, Y_{m-1}$; $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$ de elementos de $P_{fin}(\omega)$ tales que B es isomorfo a una subálgebra de $\prod_{k=0}^{m-1} L_{Y_k}$ y C lo es a una subálgebra de $\prod_{k=0}^{n-1} L_{Z_k}$. Del Teorema 2.2 se sigue la existencia de aplicaciones simétricas sobreyectivas

$$\varphi_B : \dot{\bigcup}_{k=0}^{m-1} P(Y_k) \to P_B\,, \quad \varphi_C : \dot{\bigcup}_{k=0}^{n-1} P(Z_k) \to P_C.$$

Sean

$$I_B = \{k : k < m \text{ y } \varphi \circ \varphi_B|_{P(Y_k)}(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\}\},$$
$$I_C = \{k : k < n \text{ y } \varphi \circ \varphi_C|_{P(Z_k)}(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\}\},$$
$$Y = \bigcup(Y_k : k \in I_B) \quad \text{y} \quad Z = \bigcup(Z_k : k \in I_C).$$

Se afirma ahora que $Y \cup Z = X$. En efecto, dado $i \in X$, escójase $x \in V_i$. Como φ, φ_B y φ_C son sobreyectivas,

$$(x,3) \in \varphi \circ \varphi_B\Big(\dot{\bigcup}_{0 \leq k < m} P(Y_k)\Big) \cup \varphi \circ \varphi_C\Big(\dot{\bigcup}_{0 \leq k < n} P(Z_k)\Big).$$

Si $(x,3) \in \varphi \circ \varphi_B(\dot{\bigcup}_{0 \leq k < m}) P(Y_k))$ entonces para algún $k < m$, $(x,3) \in \varphi \circ \varphi_B(P(Y_k))$ lo cual, debido a los Lemas 4.1 y 4.2, implica que $k \in I_B$. Entonces, por el Lema 4.2, $(x,3) \in \varphi \circ \varphi_B(D_j)$ para algún D_j en $P_k(Y)$ con

$j \in Y$. Como $(x,3) \in D_i$ y, por el Lema 4.2, $\varphi o \varphi_B(D_j) = D_j$, se sigue que $i = j$ (puesto que G_j y G_i no tienen vértices comunes para $i \neq j$). Así, $i \in Y$.

Si $(x,3) \in \varphi \circ \varphi_C(\dot{\bigcup}_{0 \leq k < n} P(Z_k))$, con un argumento similar al anterior se concluye que $i \in Z$. Por lo tanto se ha probado que $X \subseteq Y \cup Z$. La otra inclusión se sigue de las definiciones de Y y Z y el Lema 4.2. Para completar la prueba falta verificar que $L_Y \in Q(\{B\})$ y $L_Z \in Q(\{C\})$. Como $X = Y \cup Z$ y $X \neq \varnothing$, uno de los dos Y o Z es no vacío. Supóngase que $Y \neq \varnothing$. Entonces por el Lema 4.2(ii) y ya que φ_B es sobreyectiva se tiene que

$$P(Y) \subseteq \varphi \circ \varphi_B\Big(\dot{\bigcup_{0 \leq k < m}} P(Y_k)\Big) = \varphi(P_B) \subseteq P(X).$$

Por el Lema 4.1, para $k \notin I_B$,

$$\begin{aligned}&\varphi \circ \varphi_B(P(Y_k)) \subseteq \\ &\qquad P(Y) \cup \bigcup (V_i \times \{1,2,4,5,6,7,9\} : i \in X \smallsetminus Y) \cup \bigcup (E_i : i \in X \smallsetminus Y),\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}&P(Y) \subseteq \varphi(P_B) \subseteq \\ &\qquad P(Y) \cup \bigcup (V_i \times \{1,2,4,5,6,7,9\} : i \in X \smallsetminus Y) \cup \bigcup (E_i : i \in X \smallsetminus Y).\end{aligned}$$

Escójase un lado $\{z,w\} \in E_j$ para algún $j \in Y$ y defínase la aplicación $\Psi_Y : \varphi(P_B) \to P(Y)$ como la identidad en $P(Y)$ y las fórmulas

$$\begin{aligned}\Psi_Y(x,k) &= (z,k) \text{ si } \quad (x,k) \in \varphi(P_B) \smallsetminus P(Y),\\ \Psi_Y(\{u,v\}) &= \{z,w\} \quad \text{si} \quad \{u,v\} \in \varphi(P_B) \smallsetminus P(Y).\end{aligned}$$

Claramente, Ψ_Y es una aplicación simétrica (preserva ζ) sobreyectiva. Entonces, $L_Y \leq B$ y por lo tanto $L_Y \in Q(\{B\})$ como era deseado. Con un argumento similar se prueba que $L_Z \in Q(\{C\})$ con lo cual se completa la prueba.

La Proposición 3.1 y los Lemas 5.1 y 5.2 constituyen la prueba del Teorema 1.1.

Referencias

[1] M. E. Adams & W. Dziobiak, *Q-universal quasivarieties of algebras*, Proc. Amer. Math Soc. **120** (1994) 1053–1059.

[2] M. E. Adams & W. Dziobiak, *Lattices of quasivarieties of 3-element algebras*, J. Alg. **166**, No.1 (1994), 181–210.

[3] M. E. Adams & H. A. Priestley, *De Morgan algebras are universal*, Discrete Math. **66** (1987), 1–13.

[4] S. A. Celani, *Retículos distributivos simétricos*, Lecturas Matemáticas, **17** (1996), 107–119.

[5] W. H. Cornish & P. R. Fowler, *Coproducts of de Morgan algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. **16** (1977), 1–13.

[6] Z. Hedrlín & J. Sichler, *Any boundable binding category contains a proper class of mutually disjoint copies of itself*, Algebra Universalis, **1** (1971), 97–103.

[7] H. A. Priestley, *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 186–190.

(Recibido en agosto de 1998; revisado por el autor en noviembre de 1999)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BOGOTÁ, COLOMBIA