**Revista Colombiana de Matemáticas**
Volumen 34 (2000), páginas 103–111

# Operadores clausura sobre O-categorías

JONATAN GÓMEZ PERDOMO
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. This paper introduces the notions of closure map and closure operator over O-categories. We prove that if a O-category has initial and final objects, products and exponentiation (up to continuity), so does the induced category of closure operators. We also prove that every continuous local functor over a O-category $\mathbb{K}$ induces, in a natural way, a continuous functor over the category of closure operators induced by $\mathbb{K}$.

*Keywords and phrases.* Clousure operator, O-category, functor, Cartesian closed categories, poset, denotational semantics.

*1991 Mathematics Subject Classification.* Primary: 18A30. Secondary: 18B20, 18B35, 68Q55.

RESUMEN. Se presenta una noción de operador clausura sobre O-categorías. Se muestra que si una O-categoría tiene productos, objeto inicial, objetos terminal y exponenciales (bajo continuidad), la categoría de operadores clausura sobre ella, resulta ser una O-categoría y también tiene dichas construcciones. Por último, se demuestra que todo functor localmente continuo sobre una O-categoría induce, de manera natural, un functor continuo sobre la categoría de operadores clausura.

## 1. Introducción

El concepto de operador clausura ha sido uno de los conceptos más explorados en matemáticas debido a las múltiples conexiones que ha permitido establecer entre diversos campos de esta ciencia. Es así como se ha presentado este concepto de diversas formas en la teoría de categorías [4]. El presente artículo tiene como objetivo presentar el concepto de operador clausura sobre O-categorías. Esto es posible gracias a que en una O-categoría la colección de morfismos entre cada par de objetos está dotado de un orden [5]. De esta manera, un operador clausura es un par objeto-morfismo de la O-categoría, donde el morfismo tiene las siguientes características, que son usuales en la noción de operador clausura, pero que aquí están definidas en términos del orden asociado a los morfismos:

(1) $id_a \sqsubseteq c_a$ (proyección).
(2) si $x \sqsubseteq y$ entonces $c_a \circ x \sqsubseteq c_a \circ y$ (monotonía).
(3) $c_a \circ c_a = c_a$ (idempotencia).

Como la composición de morfismos en una O-categoría es una operación continua, se garantiza la monotonía de los morfismos.

Con estos elementos, se puede definir la categoría de operadores clausura sobre una O-categoría, donde los morfismos son los llamados morfismos compatibles, es decir, aquellos morfismos que preservan las clausuras. La categoría de operadores clausura resulta ser también una O-categoría que hereda muchas de las propiedades de la O-categoría sobre la cual están definidos. Por ejemplo, si la O-categoría tiene objetos terminal e inicial, la categoría de operadores clausura también los tiene. Las siguientes son algunas de las propiedades que se heredan:

(1) Objeto inicial, terminal.
(2) Productos (bajo continuidad local).
(3) Exponenciales (bajo continuidad local).
(4) Cartesiana cerrada (bajo continuidad local).
(5) Functores continuos.

Adicionalmente, el concepto de inmersión parcialmente compatible, es decir morfismos que son inmersiones y que preservan parcialmente las clausuras, permite definir una subcategoría alámbrica de la O-categoría, con la cual se puede establecer la continuidad de algunos functores.

El definir operadores clausura sobre O-categorías permite estudiar la semántica denotacional de lenguajes de programación ya que el concepto de operador clausura sobre O-categorías permite modelar, de manera muy abstracta, el proceso de obtener información completa (o perfecta) a partir de información parcial (una colección incompleta de *tokens* de información), mientras que el concepto de morfismo compatible modela de manera precisa las operaciones que producen información completa a partir de información incompleta o completa. Una presentación más detallada de la semántica de lenguajes se programación se puede encontrar en [7] y en [8].

La posibilidad de definir una subcategoría alámbrica de las inmersiones parcialmente compatibles de una O-categoría facilita la búsqueda de soluciones a ecuaciones recursivas de dominios en la categoría de operadores clausura.

La búsqueda de soluciones a ecuaciones recursivas de dominios es uno de los principales temas de estudio en semántica denotacional [9].

El resultado más sorprendente es que a pesar de que la categoría de operadores clausura tiene más estructura (se puede construir un functor inmersión de la O-categoría a la de operadores clausura), para demostrar que la categoría de operadores clausura es un buen modelo para la semántica denotacional es suficiente mostrar que la O-categoría que la induce es un modelo para la semántica denotacional.

## 2. Preliminares

Un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado se dice *dirigido* si no es vacío y si todos sus subconjuntos finitos tienen cota superior en él. Un conjunto ordenado se dice *orden parcial completo* (CPO) si tiene elemento mínimo y si todos sus subconjuntos dirigidos tienen mínima cota superior. Una función $\varphi : P \to Q$ sobre los conjuntos ordenados $P$ y $Q$ se dice continua si para todo subconjunto dirigido $D$ de $P$ se tiene que $\varphi\left(\bigvee D\right) = \bigvee \varphi(D)$. Una descripción más completa sobre CPOs y órdenes se puede encontrar en [1] y en [6].

Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $A$ se dice de *carácter finito* si la unión de los conjuntos en la colección $\mathcal{A}$ es igual al conjunto $A$ y si para cada subconjunto de $A$ se tiene que el subconjunto está en la colección $\mathcal{A}$ si y solo si cada uno de sus subconjuntos está en la colección $\mathcal{A}$. Una función $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dice continua si $f(X) = \bigcup_{W \Subset X} f(W)$. Para más detalles sobre las colecciones de carácter finito se pueden consultar [3] y [2].

Sea $I$ un conjunto ordenado y $\mathfrak{C}$ una categoría cualquiera. Un functor $\Delta : I \to \mathfrak{C}$ (o simplemente $\Delta$), es llamado un *diagrama indexado por* $I$ sobre $\mathfrak{C}$. Si $I$ es dirigido se dice que $\Delta : I \to \mathfrak{C}$ es un *diagrama dirigido*.

Una familia $\{\mu_i\}_{i\in I}$ de $\mathfrak{C}$-morfismos indexada por $I$ y un $\mathfrak{C}$-objeto $a$ forman un *cocono* sobre un diagrama $\Delta$, (notado $\mu : \Delta \to a$) si

(1) $\mu_i : \Delta(i) \to a$ para todo $i \in I$.

(2) para todo $i, j \in I$, si $i \leq j$ entonces $\mu_i = \mu_j \circ \Delta(i \leq j)$.

Sean $\mu : \Delta \to a$ y $\upsilon : \Delta \to e$ dos coconos sobre $\Delta$, un $\mathfrak{C}$-morfismo $f : a \to e$ es *mediador* de $\mu$ en $\upsilon$ si se tiene que $\upsilon_i = f \circ \mu_i$ para todo $i \in I$. Se usa la notación $f : \mu \to \upsilon$ para los morfismos mediadores. Un cocono $\mu : \Delta \to a$ es un *colímite* del diagrama $\Delta$ si para todo otro cocono $\upsilon : \Delta \to e$, existe una único morfismo mediador $f : \mu \to \upsilon$. Si todo diagrama dirigido sobre $\mathfrak{C}$ tiene un colímite se dice que $\mathfrak{C}$ es *cocompleta* .

Un functor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ se dice *continuo* si $\mu : \Delta \to d$ es un colímite entonces $F(\mu) : F(\Delta) \to F(d)$ es un colímite.

**Ejemplo 2.1.** (1) El functor constante $K_a : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es continuo.

(2) El functor identidad $Id : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ es continuo.

(3) Si $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}_1$ y $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}_2$ son continuos $(F, G) : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ es continuo.

**Definición 2.1.** Una categoría $\mathbb{K}$ es una *O-categoría* si

(i) Para todo par de $\mathbb{K}$-objetos $a$, $b$ el conjunto $\mathbb{K}(a, b)$ esta dotado con un orden parcial completo $\sqsubseteq_{\mathbb{K}(a,b)}$.
(ii) La composición de $\mathbb{K}$-morfismos es continua respecto a los ordenes, es decir,

$$\bigsqcup_{i \in I} \left( g_i \circ f_i \right) = \left( \bigsqcup_{i \in I} g_i \right) \circ \left( \bigsqcup_{i \in I} f_i \right).$$

**Lema 2.1.** *En toda O-categoría si $f \sqsubseteq g$ entonces $f \circ h \sqsubseteq g \circ h$.*

*Bosquejo de la demostración:* Es obvio que $g = \bigsqcup \{f, g\}$, entonces $g \circ h = (\bigsqcup \{f, g\}) \circ h$, pero como la composición es continua $g \circ h = \bigsqcup \{f \circ h, g \circ h\}$ y por definición $f \circ h \sqsubseteq \bigsqcup \{f \circ h, g \circ h\}$, por lo tanto $f \circ h \sqsubseteq g \circ h$. ☑

**Ejemplo 2.2.** (1) La categoría de los CPOs con funciones continuas, notada **CPO**, es una O-categoría. El orden asociado a la colección de funciones continuas entre dos CPOs es el orden puntual, es decir, si $f, g : P \to Q$ son funciones continuas, $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq g(x)$ para todo $x \in P$.
(2) La categoría de colecciones de carácter finito con funciones continuas, notada **CCF**, forman una O-categoría. El orden asociado a la colección de funciones continuas entre dos CCFs es el orden puntual, es decir, si $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son funciones continuas, $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f(X) \sqsubseteq g(X)$ para todo $X \in \mathcal{A}$.

Sea $\mathbb{K}$ una O-categoría, $f : a \to b$ y $f^R : b \to a$ $\mathbb{K}$-morfismos, $f$ es llamado una *inmersión* y $f^R$ una *proyección* si $f^R \circ f = id_a$ y $f \circ f^R \sqsubseteq id_b$. La *categoría de inmersiones de* $\mathbb{K}$, escrita $\mathbb{K}^{\mathbf{E}}$, es la categoría que tiene como objetos los objetos de $\mathbb{K}$ y como morfismos los $\mathbb{K}$-morfismos que son inmersiones.

**Definición 2.2.** Sea $\mathbb{K}$ una O-categoría, $\Delta : I \to \mathbb{K}^{\mathbf{E}}$ un diagrama dirigido, $\mu : \Delta \to a$ un cocono en $\mathbb{K}^{\mathbf{E}}$ y $\mathbb{K}^{\mathbf{E}}_*$ una subcategoría de $\mathbb{K}^{\mathbf{E}}$.

(i) $\mu : \Delta \to a$ es llamado un *O-colímite* de $\Delta$ si $\bigsqcup_{i \in I} \left( \mu_i \circ \mu_i^R \right) = id_a$.
(ii) Se dice que $\mathbb{K}$ tiene *$\mathbb{K}^{\mathbf{E}}_*$-colímites localmente determinados* si,

$$\mu : \Delta \to a \text{ es colímite en } \mathbb{K}^{\mathbf{E}}_* \Leftrightarrow \mu : \Delta \to a \text{ es O-colímite de } \Delta.$$

**Definición 2.3.** Un functor $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ es *localmente continuo* si

$$F\Big( \bigsqcup_{i \in I} f_i \Big) = \bigsqcup_{i \in I} F(f_i)$$

para toda $\{f_i : a \to b\}_{i \in I}$ colección dirigida en $\mathbf{K}(a, b)$.

**Teorema 2.1.** *Sean* $\mathbf{K}$ *y* $\mathbf{L}$ *O-categorías y* $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ *un functor, tales que:*

(1) $\mathbf{K}$ tiene $\mathbf{K}^{E}_*$-colímites localmente determinados.

(2) $\mathbf{L}$ tiene $\mathbf{L}^E_*$-colímites localmente determinados.
(3) $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ es localmente continuo.

Si $F^E_* : \mathbf{K}^E_* \to \mathbf{L}^E_*$ definido de la siguiente manera es un functor

$$\begin{array}{rccc} F^E_* : & \mathbf{K}^E_* & \longrightarrow & \mathbf{L}^E_* \\ & a & \longmapsto & F(a) \\ & \downarrow f & & \downarrow F(f) \\ & b & \longmapsto & F(b) \end{array}$$

entonces $F^E_*$ es continuo.

*Demostración.* Véase [3]. ☑

## 3. Operadores clausura

Tradicionalmente un operador clausura se define como un par $(A, c)$, donde $A$ es un conjunto y $c : \wp(A) \to \wp(A)$ es una función, $\wp(A)$ es el conjunto partes del conjunto $A$, que satisface las siguientes condiciones:

(1) $X \subseteq c(X)$ (proyección).
(2) Si $X \subseteq Y$ entonces $c(X) \subseteq c(Y)$ (monotonía).
(3) $c(c(X)) = c(X)$ (idempotencia).

Como en la categoría de conjuntos con funciones, **SET**, se puede formar la subcategoría plena $\wp$**SET** de **SET**, donde los objetos son los conjuntos *partes de*, y teniendo en cuenta, por un lado, que en la categoría $\wp$**SET** cada subconjunto $X$ de un conjunto $A$ se puede representar mediante la función elemento $X : \{\varnothing\} \to \wp(A)$ que asigna al conjunto vacío el conjunto $X$ y, por otro lado, que para todo operador clausura $(A, c)$, la función $c$ es un morfismo de $\wp$**SET**, es claro que se puede presentar el concepto de operador clausura en la categoría $\wp$**SET** en términos de composición de morfismos. Se asocia a la colección de funciones entre cada par de conjuntos "partes de" el orden puntual, es decir, el orden para el cual si $f, g : \wp(A) \to \wp(B)$ son funciones entonces $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f(X) \subseteq g(X)$.

De esta manera, un operador clausura es un par $(\wp(A), c)$ donde $c : \wp(A) \to \wp(A)$ es una función tal que

(1) $X \sqsubseteq c \circ X$, para todo $X : \{\varnothing\} \to \wp(A)$
(2) $Y \sqsubseteq X \Rightarrow c \circ X \sqsubseteq c \circ Y$, para todos $X, Y : \{\varnothing\} \to \wp(A)$.
(3) $c \circ X = c \circ c \circ X$, para todo $X : \{\varnothing\} \to \wp(A)$.

Estas propiedades, definidas en términos de morfismos, motivan la definición del concepto de operador clausura en categorías que tenga un orden parcial asociado a la colección de morfismos entre cada par de objetos. En estas categorías se puede presentar el concepto de operador clausura como un par $(a, c)$ donde $a$ es un objeto y $c : a \to a$ es un morfismo que cumple:

(1) $id_a \sqsubseteq c$,
(2) si $f \sqsubseteq g$ entonces $c \circ f \sqsubseteq c \circ g$.
(3) $c = c \circ c$.

Ahora, como una O-categoría es una categoría en la cual la colección de morfismos entre cada par de objetos tiene un orden parcial completo y la composición de morfismos es continua, el concepto de operador clausura se puede definir como sigue.

**Definición 3.1.** Sea $\mathbb{K}$ una O-categoría

(1) Un *operador clausura* (sobre $\mathbb{K}$), es una pareja $(a, c)$ donde $a$ es un $\mathbb{K}$-objeto y $c : a \to a$ es un $\mathbb{K}$-morfismo que cumple:
  (a) $id_a \sqsubseteq c$ (proyección).
  (b) $c = c \circ c$ (idempotencia).
(2) Un morfismo $f : a \to b$ se dice *compatible* con los operadores clausura $(a, c_a)$ y $(b, c_b)$ si se tiene que $c_b \circ f \circ c_a = f$.

A partir de esta definición, si $a$ es un $\mathbb{K}$-objeto entonces $(a, id_a)$ es un operador clausura.

Los operadores clausura sobre una O-categoría $\mathbb{K}$, con los morfismos compatibles, forman la categoría $\overline{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-*operadores clausura*. Esta categoría hereda muchas de las propiedades y construcciones de la O-categoría que la induce. La parte final de este artículo está dedicada a presentar algunas de las propiedades y construcciones heredadas.

**Proposición 3.1.** *Sea $\mathbb{K}$ una O-categoría, $\overline{\mathbb{K}}$ es una O-categoría.*

*Bosquejo de demostración:* Primero se debe mostrar que la identidad de un operador clausura $(a, c_a)$ es el morfismo $c_a$. Para esto se muestra que $c_a$ es compatible con ella misma, lo que es cierto por idempotencia, y luego se prueba que $f \circ c_a = f$ y $c_a \circ g = g$, lo que es cierto nuevamente por idempotencia y compatibilidad de $f$ y $g$ con $c_a$. En segundo lugar, se muestra que la composición de funciones compatibles es una función compatible. En tercer lugar, el orden que se asocia a las funciones compatibles se hereda de la O-categoría. Finalmente, se prueba que el supremo de funciones compatibles es una función compatible, por lo tanto la continuidad de la composición se hereda de la O-categoría. ☑

**Proposición 3.2.** *Sea $\mathbb{K}$ una O-categoría.*

(1) *Si $\mathbb{K}$ tiene objeto terminal entonces $\overline{\mathbb{K}}$ tiene objeto terminal.*
(2) *Si $\mathbb{K}$ tiene objeto inicial entonces $\overline{\mathbb{K}}$ tiene objeto inicial.*
(3) *Si $\mathbb{K}$ tiene productos binarios y $\times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es localmente continuo entonces $\overline{\mathbb{K}}$ tiene productos binarios.*
(4) *Si $\mathbb{K}$ tiene exponenciales y $\to: \mathbb{K}^{op} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es localmente continuo entonces $\overline{\mathbb{K}}$ tiene exponenciales.*
(5) *Si $\mathbb{K}$ es cartesiana cerrada, $\times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ y $\to: \mathbb{K}^{op} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ son localmente continuos entonces $\overline{\mathbb{K}}$ es cartesiana cerrada.*

*Bosquejo de demostración:* (Para mayores detalles el lector es referido a [3]).

(1) La idea es mostrar que si 1 es un objeto terminal en la O-categoría $\mathbb{K}$ entonces $(1, id_1)$ es un objeto terminal en $\overline{\mathbb{K}}$. Para esto se prueba que el único morfismo entre cualquier operador clausura $(a, c_a)$ y $(1, id_1)$ es precisamente el único morfismo entre los objetos $a$ y 1, es decir, $1_{(a,c_a)} : (a, c_a) \to (1, id_1) = 1_a : a \to 1$.

(2) Es una prueba similar a (1).

(3) Primero se prueba que para todo par de $\mathbb{K}$-objetos $a, b$ y todos los operadores clausura $(a, c_a)$ y $(b, c_b)$, si $(a \times b, \pi_1, \pi_2)$ es un producto binario, entonces

$$\pi_1 \circ (c_a \times c_b) = c_a \circ \pi_1 \circ (c_a \times c_b)\,,$$
$$\pi_2 \circ (c_a \times c_b) = c_b \circ \pi_2 \circ (c_a \times c_b)\,.$$

Para esto se utiliza la continuidad local del functor producto.

Luego se prueba que $(a \times b, c_a \times c_b)$ es un operador clausura y que si $f : (e, c_e) \to (a, c_a)$ y $g : (e, c_e) \to (b, c_b)$ son $\overline{\mathbb{K}}$-morfismos entonces $\langle f, g\rangle : (e, c_e) \to (a \times b, c_a \times c_b)$ es un $\overline{\mathbb{K}}$-morfismo. Para esto se utiliza nuevamente la continuidad local del functor producto. Finalmente, se prueba que

$$((a \times b, c_a \times c_b)\,, c_a \circ \pi_1 \circ (c_a \times c_b)\,, c_b \circ \pi_2 \circ (c_a \times c_b))$$

es un producto en $\overline{\mathbb{K}}$.

(4) Gracias a la continuidad local del functor exponencial, se prueba que para todo par de $\mathbb{K}$-objetos $a, b$ y todos operadores clausura $(a, c_a)$ y $(b, c_b)$ se tiene que $[id_a \to id_b] \sqsubseteq_{\mathbb{K}([a\to b],[a\to b])} [c_a \to c_b]$ y, de paso, se prueba que $([a \to b]\,, [c_a \to c_b])$ es un operador clausura. Luego se prueba, usando continuidad local del functor exponencial, que si

$$f : (d \times a, c_d \times c_a) \to (b, c_b)$$

es $\overline{\mathbb{K}}$-morfismo entonces $curry\,(f) : (d, c_d) \to ([a \to b]\,, [c_a \to c_b])$ es un $\overline{\mathbb{K}}$-morfismo. Finalmente se prueba que

$$\left(([a \to b]\,, [c_a \to c_b])\,, c_b \circ ev_{a,b} \circ \left(id_{[a\to b]} \times c_a\right)\right)$$

es un exponencial en $\overline{\mathbb{K}}$.

(5) Se sigue de los anteriores encisos. ☑

**Proposición 3.3.** *Sea $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ un functor localmente continuo, $\overline{F} : \overline{\mathbb{K}} \to \overline{\mathbb{K}}$ definido por*

$$\begin{array}{cccc}
\overline{F}: & \overline{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{K}} \\
 & (a, c_a) & \longmapsto & (F(a), F(c_a)) \\
 & f\downarrow & & \downarrow F(f) \\
 & (b, c_b) & \longmapsto & (F(b), F(c_b))
\end{array}$$

*es un functor localmente continuo.*

*Demostración.* Véase [3]. ☑

**Definición 3.2.** En una $\mathbb{K}$ una O-categoría, una inmersión $f : a \to b$ se dice *parcialmente compatible* si para todo par de operadores clausura $(a, c_a)$ y $(a, c_b)$ se tiene que

$$c_a \circ f^R = f^R \circ c_b \quad \text{y} \quad c_b \circ f = c_b \circ f \circ c_a.$$

Los objetos de una O-categoría $\mathbb{K}$ y las inmersiones parciamente compatibles entre ellos forman una subcategoría (notada $\mathbb{K}^{EPC}$) de la categoría de inmersiones $\mathbb{K}^E$. Adicionalmente, $\mathbb{K}^{EPC}$ induce la subcategoría $\overline{\mathbb{K}}^{EPC}$ de $\overline{\mathbb{K}}^E$, donde los objetos son los operadores clausura inducidos por $\mathbb{K}$ y los morfismos entre operadores clausura son los inducidos por las inmersiones parcialmente compatibles, es decir, $f : a \to b$ es un $\overline{\mathbb{K}}^{EPC}$-morfismo entre $(a, c_a)$ y $(b, c_b)$ si existe $f_* : a \to b$ inmersión parcialmente compatible tal que $f = c_b \circ f_* \circ c_a$.

**Definición 3.3.** Una categoría $\mathfrak{C}$ se dice *alámbrica* si entre cada par de objetos existe a lo máximo un morfismo.

**Proposición 3.4.** *Sea $\mathbb{K}_*^E$ una subcategoría alámbrica de $\mathbb{K}^{EPC}$, sea $\overline{\mathbb{K}}_*^E$ la categoría inducida por $\mathbb{K}_*^E$ (en la forma indicada arriba).*

(1) *$olv : \overline{\mathbb{K}}_*^E \to \mathbb{K}_*^E$ definido como por*

$$\begin{array}{rccc} olv : & \overline{\mathbb{K}}_*^E & \longrightarrow & \mathbb{K}_*^E \\ & (a, c_a) & \longmapsto & a \\ & \downarrow c_b \circ f \circ c_a & & \downarrow f \\ & (b, c_b) & \longmapsto & b \end{array}$$

*es un functor.*

(2) *Si $\mathbb{K}$ tiene $\mathbb{K}_*^E$-colímites localmente determinados y $\mathbb{K}_*^E$ es cocompleta entonces $\overline{\mathbb{K}}^E$ tiene $\overline{\mathbb{K}}_*^E$-colímites localmente determinados y $\overline{\mathbb{K}}_*^E$ es cocompleta.*

(3) *Si $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es localmente continuo y $F_*^E : \mathbb{K}_*^E \to \mathbb{K}_*^E$ es un functor entonces $\overline{F}_*^E : \overline{\mathbb{K}}_*^E \to \overline{\mathbb{K}}_*^E$ es un functor continuo.*

*Bosquejo de la demostración:*

(1) Solo hay que probar que *olv* está bien definido. Como $\mathbb{K}_*^E$ es una subcategoría alámbrica, para cada $f : (a, c_a) \to (b, c_b)$ existe única $f_* : a \to b$ $\mathbb{K}_*^E$-morfismo tal que $f = c_b \circ f_* \circ c_a$. Por lo tanto, *olv* está bien definido.

(2) Sea $\triangle : I \to \overline{\mathbb{K}}_*^E$ un diagrama dirigido, como *olv* es un functor, entonces $olv \circ \triangle$ es un diagrama en $\mathbb{K}_*^E$ y por lo tanto existe $\mu : olv \circ \triangle \to a$ colímite ($\mathbb{K}_*^E$ cocompleta). Además, $\mu : olv \circ \triangle \to a$ es O-colímite ($\mathbb{K}_*^E$-colímite localmente determinado). La afirmación deseada se sigue al probar que $\left(a, \bigsqcup_{i \in I} \mu_i \circ c_i \circ \mu_i^R\right)$ es un operador clausura y que

$\mu : \triangle \to \left(a, \bigsqcup_{i\in I} \mu_i \circ c_i \circ \mu_i^R\right)$ es un O-colímite y, por consiguiente, colímite para el diagrama dirigido $\triangle : I \to \overline{\mathbb{K}}_*^E$.

(3) Gracias a (2), solo se necesita mostrar que $\overline{F}_*^E$ está bien definido. ☑

## Referencias

[1] B. A. DAVEY& H. A. PRIESTLEY, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.

[2] M. ERNÉ, *Algebraic ordered sets and their generalizations*, in *Algebras and Orders*, edited by Rosenberg and Sabidussi, Kluwer Academic Press, 1993, 113–192.

[3] J. GÓMEZ, *Semántica Denotacional Mediante. Operadores Clausura*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 1999.

[4] S. MACLANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[5] B. C. PIERCE, *Basic Category Theory for the Computer Scientist*, MIT Press, 1991.

[6] D. S. SCOTT, *Domains for denotational semantics*, Lecture Notes in Computer Science, no. 140, Springer, 577–613, 1982.

[7] D. SCOTT & C. GUNTER, *Semantic Domains*, in *The Handbook of Theoretical Computer Science*, North Holland, 1990.

[8] G. WINSKEL, *The Formal Semantics of Programming Languages*, MIT Press, 1993.

[9] G. WINSKEL & D. LARSEN, *Using information systems to solve recursive domain equations ffectively*, Lecture Notes in Computer Science, no. 173, 110–131, 1984.

(Recibido en septiembre de 2000)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BOGOTÁ, COLOMBIA

*e-mail:* jgomezp@ingenieria.ing.unal.edu.co