Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 35 (2001), páginas 1–11

Un problema discontinuo con operador cuasilineal

MARCO CALAHORRANO RECALDE
JUAN MAYORGA ZAMBRANO
Escuela Politécnica Nacional, Quito, ECUADOR

ABSTRACT. We find conditions on the functions q, f and h that allow us to prove the existence of weak solutions to the problem $-\Delta_p u = h(x)f(u) + q(x)$ en $\Omega; u = 0$ en $\partial\Omega$.

Keywords and phrases. nonlinear, elliptic, PDE, boundary value.

1991 Classification. Primary: 35J60.

RESUMEN. Nosotros hallamos condiciones sobre las funciones f, g y h que permiten probar la existencia de soluciones débiles al problema $-\Delta_p u = h(x)f(u) + q(x)$ en $\Omega; u = 0$ en $\partial\Omega$.

1. Introducción

El interés en tratar problemas de ecuaciones diferenciales parciales que involucran no linealidades discontinuas (DNDE) radica principalmente en que muchos problemas de frontera libre pueden ser reducidos a problemas (DNDE) de valor en la frontera. Además, en algunas ocasiones, es beneficioso poner el problema inicial dentro de una categoría más grande de problemas: (DNDE).

En este artículo tratamos con una clase de ecuaciones elípticas con la característica de que la no linealidad es discontinua. Estas ecuaciones sirven como modelo en varios problemas concretos de la Física Matemática.

En este trabajo extendemos los resultados obtenidos por D. Arcoya y M. Calahorrano,[Arco-Cala]. En concreto, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado, consideramos el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p u = h(x)f(u) + q(x), & en \quad \Omega \\ u = 0, & en \quad \partial\Omega \end{array} \right\}; \tag{1}$$

donde $q \in L^{p'}(\Omega)$ y f es una no linealidad con una única discontinuidad de salto hacia arriba; es decir, $\exists! a \in \mathbb{R}$ tal que $f \in C(\mathbb{R}-\{a\},\mathbb{R})$, $f(a) \in [f(a-), f(a+)]$. Esta última condición hace que el funcional asociado $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega q(x)u(x)dx - \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(t)h(x)dtdx$$

sea no diferenciable en el sentido fuerte y que, por tanto, la teoría clásica de puntos críticos no sea aplicable.

Nuestro objetivo se traduce entonces en encontrar hipótesis sobre las funciones q, f, h que nos permitan probar la existencia de soluciones débiles al problema (1). En este sentido, utilizamos el concepto generalizado de gradiente debido a F. H. Clarke, [Clarke], y los métodos variacionales desarrollados por K. Chang, [Chang], para funcionales que son localmente de Lipschitz.

Debido a que f es discontinua, consideramos dos conceptos de solución para el problema (1). En el primer caso, decimos que una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una solución para el problema multivaluado asociado a (1) si u satisface

$$-\Delta_p u(x) - q(x) \in h(x)\hat{f}(u(x)), \quad a.e.\Omega \tag{2}$$

donde $\hat{f}$ es la función multivaluada dada por

$$\hat{f}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \{f(s)\}, & si \quad s \neq a \\ [f(a-), f(a+)], & si \quad s = a \end{array} \right\}.$$

Sin embargo, existe un segundo criterio de solución, más restrictivo (pero más interesante). Para esto, decimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una solución de (1) si

$$-\Delta_p u(x) = h(x)f(u(x)) + q(x), \quad a.e.\Omega. \tag{3}$$

Claramente, una solución de este tipo también es solución conforme al primer criterio.

2. Antecedentes

Los autores Ambrosetti y Badiale, [Ambro-Ba], estudiaron el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f(u) + q(x), & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array} \right\} \tag{4}$$

donde $q \in L^2(\Omega)$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica

($f1$) Existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f \in C(\mathbb{R}-\{a\},\mathbb{R})$, $f(a-) < f(a+) < \infty$, $f(a) \in [f(a-), f(a+)]$.

Es claro que el problema (4) es un caso particular de (1) donde $p = 2$ y $h(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.

Como se dijo, la dificultad radica en que el funcional de Euler asociado $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(u(x))dx - \int_\Omega q(x)u(x)dx$$

no es Fréchet diferenciable. Los profesores Ambrosetti y Badiale utilizaron entonces el principio dual debido a F. H. Clarke para obtener un funcional dual Φ en $L^2(\Omega)$ de clase C^1 y con la particularidad de que sus puntos críticos u son soluciones para (4), en el sentido de que satisfacen

$$-\Delta u - q(x) \in \hat{f}(u(x)), \quad a.e.\Omega \tag{5}$$

donde $\hat{f}$ es la función multivaluada dada por

$$\hat{f}(s) = \left\{ \begin{array}{lll} \{f(s)\} & \text{si} & s \neq a, \\ [f(a-), f(a+)] & \text{si} & s = a. \end{array} \right\}$$

Ellos mostraron también que si se verifica $-q(x)\overline{\in} [f(a-), f(a+)], \quad a.e.\Omega$, o bien u es un mínimo local de Φ, entonces se tiene

$$|\{x \in \Omega : u(x) = a\}| = 0,$$

y de esta manera u es solución de

$$-\Delta u(x) = f(u(x)) + q(x), \quad a.e.\Omega.$$

Lo anterior motivó a D. Arcoya y M. Calahorrano, [Arco-Cala], para generalizar estos resultados a la versión p-laplaciana del problema (4); es decir, consideraron el problema

$$\left\{ \begin{array}{rll} -\Delta_p u = f(u) + q(x) & \text{en} & \Omega, \\ u = 0 & \text{en} & \partial\Omega, \end{array} \right\} \tag{6}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, $q \in L^{p'}(\Omega)$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica (f1).

En este caso es imposible aplicar los argumentos duales utilizados por los profesores Ambrosetti y Badiale. Sin embargo, como se ve en [Chang], si f satisface, en adición a (f1) la siguiente condición

($f2$) Existe $\sigma > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_1 + C_2|s|^\sigma, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$p \leq 1 + \sigma < p^*,$$

donde

$$p^* = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{Np}{N-p}, & \text{si} & p < N, \\ +\infty, & \text{si} & p \geq N; \end{array} \right\}$$

tenemos que $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, el funcional asociado dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(u(x))dx - \int_\Omega q(x)u(x)dx, \tag{7}$$

donde $F : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ se define mediante

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

es localmente Lipschitz continuo con gradiente generalizado $\partial I(u)$ en cada punto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Decimos en este caso que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un punto crítico de I cuando $0 \in \partial I(u)$. D. Arcoya y M. Calahorrano probaron entonces que

(1) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un punto crítico de I si y solo si

$$-\Delta_p u(x) - q(x) \in \hat{f}(u(x)), \quad a.e.\Omega,$$

donde $\hat{f}$ es la función multivaluada

$$\hat{f}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \{f(s)\}, & \text{si} \quad s \neq a \\ {[f(a-), f(a+)]}, & \text{si} \quad s = a. \end{array} \right\}$$

(2) Si $-q(x)\overline{\in}\,[f(a-), f(a+)] \quad a.e.\Omega$ y u es un punto crítico de I, se tiene que

$$|\{x \in \Omega \mid u(x) = a\}| = 0, \tag{8}$$

y de esta manera u satisface

$$-\Delta_p u(x) = q(x) + f(u(x)), \quad a.e.\Omega. \tag{9}$$

(3) Si u es un mínimo local de I, entonces (8) y (9) también se verifican.

3. Problema principal

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, estudiaremos el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p u = h(x)f(u) + q(x) & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array} \right\} \tag{10}$$

donde Δ_p representa el p-laplaciano definido por

$$\Delta_p u = div\{|\nabla u|^{p-2}\nabla u\}, \quad 1 < p < \infty.$$

Asumimos $q \in L^{p'}(\Omega)$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando la condición (f1) mencionada anteriormente. Suponemos además que h satisface:

(h1) Existen $m, M > 0$ tales que $m = \inf(h(\Omega))$ y $M = \sup(h(\Omega))$.

De la condición (h1) se desprende que $h \in L^{\infty}(\Omega)$.

Consideremos el funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} q(x)u(x)dx - \int_{\Omega} F(u(x))h(x)dx, \tag{11}$$

donde $F : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

El siguiente resultado establece la relación entre el funcional I y el problema (10).

Lema 3.1. *El funcional* $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido en (11) tiene como ecuación de Euler*

$$-\Delta_p u = h(x)f(u) + q(x);$$

es decir, la derivada débil de I en un punto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *está dada por*

$$I_G'(u)v = \int_{\Omega} \{-\Delta_p u - h(x)f(u) - q(x)\}v(x)dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para una prueba, ver [Mayor].

Es evidente que la discontinuidad de f produce inconvenientes en cuanto a la diferenciabilidad (en el sentido fuerte) del funcional I. En general, I no será Fréchet diferenciable. Sin embargo, supondremos que la no linealidad f cumple la siguiente condición:

($f2$) Existe $\sigma > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_1 + C_2|s|^{\sigma}, \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

donde $p \leq 1 + \sigma \leq p^*$ y,

$$p^* = \begin{Bmatrix} \frac{Np}{N-p} & \text{si} & p < N, \\ +\infty & \text{si} & p \geq N. \end{Bmatrix}$$

Observación 3.1. *Si f satisface (f2) tenemos que* [Chang, p.107]

(i) *la función* $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\Phi(x, s) = h(x)F(t)$$

es localmente Lipschitz,

(ii) *el funcional* $J : L^{1+\sigma}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$J(u) = \int_{\Omega} h(x)F(u(x))dx$$

es localmente Lipschitz.

De lo anterior se sigue que I es también localmente Lipschitz y por tanto en todo punto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tiene un gradiente generalizado $\partial I(u)$ [Chang, pp. 103, 104].

Observación 3.2. *Diremos que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es un punto crítico de* I *si* $0 \in \partial I(u)$.

El siguiente teorema es nuestro principal resultado.

Teorema 3.1. *Si se cumplen (f1), (f2) y (h1) tenemos*

(1) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es un punto crítico de* I *si y solo si*

$$-\Delta_p u(x) - q(x) \in h(x)\hat{f}(u(x)), \quad a.e.\Omega,$$

donde $\hat{f}$ *es la función multivaluada*

$$\hat{f}(s) = \left\{ \begin{array}{lll} \{f(s)\} & si & s \neq a, \\ [f(a-), f(a+)] & si & s = a. \end{array} \right\}$$

(2) *Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es un punto crítico de* I *y* $-q(x)\bar{\in}[\alpha^-, \alpha^+]$, $\quad a.e.\Omega$, *donde*

$$\alpha^- = \min\{mf(a-), Mf(a-)\},$$
$$\alpha^+ = \max\{mf(a+), Mf(a+)\},$$

entonces

$$|\{x \in \Omega \mid u(x) = a\}| = 0 \tag{12}$$

y de esta manera $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *satisface*

$$-\Delta_p u(x) = q(x) + h(x)f(u(x)), \quad a.e.\Omega. \tag{13}$$

(3) *Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es un mínimo local de I, entonces (12) y (13) también se verifican.*

Prueba. Consideramos conocidas las herramientas de [Chang].

(1) Para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tenemos que el gradiente generalizado de I está dado por

$$\partial I(u) = \{Au\} - \partial J(u) + \{Bu\};$$

donde $A, B, J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ son funcionales definidos mediante

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$\langle Bu, v\rangle = -\int_\Omega q(x)v(x)dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$\langle Cu, v\rangle = \int_\Omega h(x)F(u(x))v(x)dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Más todavía, se tiene $\partial J(u) \subset [h(\cdot)f(u-), h(\cdot)f(u+)]$. De esta manera, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un punto crítico de I si y solo si existe $w \in \partial J(u)$ tal que

$$Au + Bu = w,$$

$$w \in h(x)\hat{f}(u(x)), \quad a.e.\Omega.$$

Obsérvese que si $w - Bu \in (L^{1+\sigma}(\Omega))' \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ entonces (módulo identificación) se tiene $Au \in L^{(1+\sigma)/\sigma}(\Omega)$. Pero si $L^{p'}(\Omega) \subset (L^{1+\sigma}(\Omega))' \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, entonces tenemos que

$$\langle Au, v\rangle = \langle w - Bu, v\rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

es decir,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega q(x)v(x)dx + \int_\Omega w(x)v(x)dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

de donde,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega (q(x) + w(x))v(x)dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Se sigue que

$$-\Delta_p u = w + q \in L^{(1+\sigma)/\sigma}(\Omega), \quad a.e.\Omega$$

y

$$-\Delta_p u - q(x) \in h(x)\hat{f}(u(x)), \quad a.e.\Omega.$$

(2) Supongamos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un punto crítico de I. Sea $\Gamma = \{x \in \Omega \mid u(x) = a\}$. De la parte (1) de la demostración tenemos que

$$-\Delta_p u(x) - q(x) \in h(x)[f(a-), f(a+)], \quad a.e.\Gamma$$

y, por la definición de α^- y α^+, se sigue que

$$-\Delta_p u(x) - q(x) \in [\alpha^-, \alpha^+], \quad a.e.\Gamma.$$

Ahora, usando un teorema debido a Morrey—Stampacchia, [Morrey, Theorem 3.2.2, p. 69], tenemos

$$-\Delta_p u(x) = 0, \quad a.e.\Gamma;$$

y

$$-q(x) \in [\alpha^-, \alpha^+], \quad a.e.\Gamma.$$

De esta forma, si $-q(x)\bar{\in}[\alpha^-, \alpha^+]$, $a.e.\Omega$, entonces, necesariamente $|\Gamma| = 0$.

De la parte (1) de la demostración es también claro que

$$-\Delta_p u(x) - q(x) = h(x)f(u(x)), \quad a.e.\Omega - \Gamma;$$

luego,

$$-\Delta_p u(x) - q(x) = f(u(x)), \quad a.e.\Omega.$$

(3) Supongamos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un mínimo local de I. Usando un argumento similar al de la parte (2) de la demostración, probamos que $-q(x) \in [\alpha^-, \alpha^+]$, $a.e.\Gamma$.

Sea $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ una función continua y positiva. Puesto que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un mínimo local de I, existe $\delta > 0$ tal que

$$I(u + \varepsilon\psi) - I(u) \geq 0, \quad \forall|\varepsilon| \leq \delta. \tag{14}$$

Es evidente que para todo $\varepsilon \neq 0$, se tiene

$$\frac{I(u+\varepsilon\psi)-I(u)}{\varepsilon} = \frac{1}{p}\int_{\Omega}\frac{|\nabla u+\varepsilon\nabla\psi|^p-|\nabla u|^p}{\varepsilon}dx$$
$$-\int_{\Omega}\frac{F(u+\varepsilon\psi)-F(u)}{\varepsilon}h(x)dx-\int_{\Omega}q(x)\psi(x).$$

Probemos ahora que $|\Gamma|=0$.

(a) Probemos primero que $|\{x\in\Gamma \mid -q(x)\neq\alpha^+\}|=0$. Para esto, supongamos lo contrario; es decir,

$$|\{x\in\Gamma \mid -q(x)\neq\alpha^+\}|>0.$$

Entonces por la convergencia dominada de Lebesgue y (14) tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{I(u+\varepsilon\psi)-I(u)}{\varepsilon}\\
&= \int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi dx-\int_{\Omega}f(u+)\psi(x)dx-\int_{\Omega}q(x)\psi(x)dx\\
&= -\int_{\Omega}[\Delta_p u+h(x)f(u+)+q(x)]\psi(x)dx\\
&= -\int_{\Gamma}[\Delta_p u+h(x)f(u+)+q(x)]\psi(x)dx\\
&= -\int_{\Gamma}[\alpha^+ +q(x)]\psi(x)dx
\end{aligned}$$

y, puesto que $q(x)\leq\alpha^+$, $a.e.\Gamma$ y $|\{x\in\Gamma \mid -q(x)<\alpha^+\}|>0$, se sigue que

$$0\leq-\int_{\Gamma}[\alpha^+ +q(x)]\psi(x)dx<0$$

lo cual es una contradicción.

(b) De forma similar se prueba que $|\{x\in\Gamma| -q(x)\neq\alpha^-\}|=0$. Como $\Gamma=\{x\in\Gamma|-q(x)\neq\alpha^+\}\cup\{x\in\Gamma \mid -q(x)\neq\alpha^-\}$ se sigue, por (a) y (b), que $|\Gamma|=0$. ☑

4. Aplicación

A continuación presentamos una aplicación del teorema anterior. Consideramos el problema (10) con h verificando (h1) y la no linealidad f verificando (f1) y la condición

$(f2')$ Existen $\alpha,\beta>0$ con $\alpha<\frac{\lambda_1}{M}$, donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta_p$, tales que

$$f(s)\leq\alpha|s|^{p-1}+\beta,\quad\forall s\in\mathbb{R}.$$

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *El problema (10) con f verificando* $(f1)$ *y* $(f2')$ *tiene al menos una solución* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *que satisface*

$$-\Delta_p u(x) = q(x) + h(x)f(u(x)), \quad a.e.\Omega,$$

con

$$|\{x \in \Omega \mid u(x) = a\}| = 0.$$

Prueba. Por la caracterización de λ_1, [Ana], tenemos

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\} \right\}$$

lo cual implica

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq \int_\Omega |u|^p dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Usando esto y $(f2')$, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega h(x)F(u(x))dx - \int_\Omega q(x)u(x)dx \\ &\geq \frac{1}{p}||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)}dx - ||q||_{L^{p'}(\Omega)}||u||_{L^p(\Omega)} - M\int_\Omega |F(u(x))|dx \end{aligned}$$

de donde fluye

$$I(u) \geq \frac{1}{p}||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)}dx - k||u||_{L^p(\Omega)} - \frac{M\alpha}{p\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

Hemos probado entonces que

$$I(u) \geq \frac{1-(\alpha M)/\lambda_1}{p}||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} - ||q||_{L^{p'}(\Omega)}||u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde $k \in \mathbb{R}$. De este último resultado se desprende que el funcional I es coercivo pues $0 < \alpha < \lambda_1/M$ provoca $1-(\alpha M)/\lambda_1 > 0$.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Es claro que

$$I(u) \leq \underline{\lim}\, f(u_n).$$

El funcional I es entonces coercivo y débilmente semicontinuo inferiormente. De esto se sigue que existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mínimo local de I. Concluimos la prueba utilizando la parte (3) del teorema (3.1). ☑

Referencias

[Ambro] A. AMBROSETTI, *Critical Points and Nonlinear Variational Problems*, Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France, 1992 pp. 5–66.

[Ambro-Ba] A. AMBROSETTI AND M. BADIALE M , *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **140** (1989), no. 2, 363–373.

[Ambro-Cala-Do] A. AMBROSETTI, M. CALAHORRANO AND F. DOBARDO, *Global branching for discontinuos problems*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **31** (1990), no 2, 213–222.

[Ana] ANANE A., *Simplicité et isolation de la première valeur prope du p-laplacien avec poids*, C.R. Acad. Sci. Paris, t305 (Serie I.), 1987.

[Arco-Cala] ARCOYA D. AND CALAHORRANO M., *Some Discontinuos Problems with a Quasilinear Operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **187** (1994), no. 3, 1059–1072.

[Bre] BREZIS H., *Análisis Funcional (Teoría y aplicaciones)*, Alianza Editorial, 1983.

[Cas] A. CASTRO, *Métodos de reducción via minimax*, Centro de Investigación del IPN (Departamento de Matemáticas), México 1981, pp 1–46.

[Chang] K. CHANG, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **80** (1981), 102–129.

[Chow-Ha] S. CHOW. and Hale J., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1982.

[Clarke] F. CLARKE, *A new approach to Lagrange multipliers*, Math. Oper. Res. **1** (1976), 165-174.

[Kol-Fo] F. KOLMOGOROV, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial MIR, 1972.

[Mayor] J. MAYORGA, *Existencia y Multiplicidad de las soluciones de problemas no diferenciables que involucran al p-laplaciano (tesis)*, Escuela Politécnica Nacional, 2000.

[Morrey] C. MORREY, *Multiple Integrals in Calculus of Variations*, Springer-Verlag (Berlin), 1966.

[Pe] I. PERAL, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, 1997 pp. 1-105.

[Ra] P. RABINOWITZ, *Minimax Methods in Critical Point Theory with applications to Differential Equations*, American Mathematical Society, 1986.

[Stru] M. STRUWE, *Variational Methods (Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems)*, Springer-Verlag, 1990.

(Recibido en junio de 2001)

MARCO CALAHORRANO RECALDE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
APARTADO 17-01-2759
QUITO, ECUADOR
e-mail: calahorserver.epn.edu.ec

JUAN MAYORGA ZAMBRANO
CARRERA DE MATEMÁTICA
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
APARTADO 18-01-1225
AMBATO, ECUADOR