Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 35 (2001), páginas 29–49

Localización en campos de espacios uniformes separados

Serafín Bautista
Januario Varela

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Abstract. In this paper a construction of the localization process for Hausdorff uniform bundles is presented via an existence theorem for uniform bundles due to J. Varela. This construction leads to a universal arrow from a given presheaf $\mathcal{P}$ to the functor F assigning to each bundle of Hausdorff uniform spaces the presheaf of all its local sections.

Key words and phrases. Localization, uniform bundles, presheaf.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 55R65. Secondary 18A30.

Resumen. En este artículo se presenta una construcción del proceso de localización para campos uniformes saparados utilizando un teorema de existencia de campos uniformes de J. Varela. A partir de esta construcción y otros resultados de tipo categórico, se obtiene que para cada prehaz $\mathcal{P}$ de espacios uniformes separados existe una flecha universal de este prehaz $\mathcal{P}$ al funtor F que en objetos asigna a cada campo de espacios uniformes separados el prehaz se sus secciones locales.

0. Introducción

El mecanismo clásico de construcción de fibras en haces a partir de prehaces, mediante el cálculo de límites inductivos en la categoría de conjuntos, tiene una contraparte no discreta en la construcción de fibras de campos de espacios uniformes. Desde la propuesta inicial de J. Dauns y K. H. Hofmann [7], [8] se han

El primer autor agradece la ayuda financiera de la *Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia* .

clarificado y precisado considerablemente estos procedimientos, cf. S. Bautista [2] y R. De Castro [5], [6]. Continuando en esta dirección en el presente artículo consideramos para efectos de la construcción de las fibras, categorías de espacios uniformes presentadas esta vez por medio de entornos generales en lugar de recurrir a familias de seudométricas como acontece en los trabajos citados. Esto se logra por medio de caracterizaciones de las aplicaciones uniformemente continuas en términos de los calibres totales (ver [4]) de los espacios dominio y codominio de la aplicación.

1. Campo de espacios uniformes

1.1. Definición. Sea $p : G \longrightarrow T$ una función sobreyectiva. Una *uniformidad* para p es un filtro $\mathcal{U}$ sobre $G \vee G = \{(u,v) \in G \times G : p(u) = p(v)\}$ tal que el filtro generado por $\mathcal{U}$ en $G \times G$ sea una estructura uniforme para G.

Referimos a [10] para las definiciones de ***selección, selección global, selección local*** y ***sección local*** para p, de ***conjunto de selecciones pleno*** y de ***U-tubo alrededor de una selección local α para p*** con $U \in \mathcal{U}$.

1.2. Definición. Sean G y T espacios topológicos, $p : G \longrightarrow T$ una función sobreyectiva y $\mathcal{U}$ una uniformidad para p. A la tripleta (G,p,T) se llama *campo uniforme* con respecto a $\mathcal{U}$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(i) Para todo $u \in G$ y todo $U \in \mathcal{U}$, existe una sección local α tal que $u \in U(\alpha)$.

(ii) La familia de conjuntos $U(\alpha)$, donde U recorre un sistema fundamental de entornos apropiado $\mathfrak{G}$ y α recorre las secciones locales para p, forman una base de la topología de G.

Por lo tanto, para cada $u \in G$, un sistema fundamental de vecindades está constituido por los U-tubos con $U \in \mathfrak{G}$, que contienen a u, alrededor de secciones locales para p.

El espacio T se llama el ***espacio base*** del campo. Si se necesita más precisión se escribe $[(G,p,T),\mathcal{U}]$ en vez de (G,p,T). Para cada $t \in T$, $G_t = p^{-1}(t)$ es la *fibra encima* de t. El espacio G es el *espacio fibrado.* Un campo uniforme es ***separado*** si la uniformidad $\mathcal{U}$ es separada. Además, $G \vee G = \bigcup_{t \in T} G_t \times G_t$.

1.3. Teorema (Existencia de campos uniformes). *Sean T espacio topológico y $p : G \longrightarrow T$ una función sobreyectiva. Denótese por Σ un conjunto de selecciones locales para p y por $\mathfrak{G}$ un sistema fundamental de entornos para p, cerrado para la inversión, esto es, $U^{-1} \in \mathfrak{G}$ si $U \in \mathfrak{G}$ y tal que para todo $U \in \mathfrak{G}$ y todo $(u,v) \in U$ existen $V, W \in \mathfrak{G}$ para los cuales $(u,v) \in V$ y $V \circ W \subset U$. Hacemos las siguientes suposiciones:*

(a) *Para todo $u \in G$ y todo $U \in \mathfrak{G}$, existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $u \in U(\alpha)$.*

(b) *Para todo $U \in \mathfrak{G}$ y todo $(\alpha,\beta) \in \Sigma \times \Sigma$, el conjunto $\{s \in T : (\alpha(s),\beta(s)) \in U\}$ es abierto en T.*

Entonces G puede ser provisto de una topología $\mathcal{T}$ tal que

(1) *$\mathcal{T}$ tiene una base constituida por los conjuntos de la forma $U(\alpha|_Q)$, donde $U \in \mathfrak{G}$ y $\alpha|_Q$ es la restricción de $\alpha \in \Sigma$ a un conjunto abierto Q contenido en el dominio de α.*

(2) *Cada $\alpha \in \Sigma$ es una sección local.*

(3) *(G, p, T) es un campo uniforme.*

Demostración. Ver J. Varela [10]. ☑

1.4. Observación. En el caso de que (G, p, T) sea un campo uniforme y Σ sea la familia de todas las secciones locales para p, entonces se tienen inmediatamente las condiciones (a) y (b) del Teorema 1.3. En efecto, (a) hace parte de la definición de campo uniforme y (b) se tiene porque

$$\{s \in T : (\alpha(s), \beta(s)) \in U\} = \alpha^{-1}(U(\beta|_Q))$$

es la imagen recíproca de un abierto.

2. Categorías de campos uniformes

2.1. Definición. Sea T un espacio topológico fijo y $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos de T. Se denotará con $\mathcal{U}camp$ la categoría de campos uniformes tal que

(i) Los objetos son campos uniformes $[(G, p, T), \mathcal{U}]$ con espacio base T.

(ii) Los morfismos entre pares de objetos $[(G, p, T), \mathcal{U}]$ y $[(H, q, T), \mathcal{V}]$ son funciones $f : G \longrightarrow H$ uniformemente continuas (con las uniformidades de los campos) y continuas con las topologías de G y H tales que $q \circ f = p$.

2.2. Definición. La categoría $\mathcal{U}camp_s$ es la subcategoría plena de $\mathcal{U}camp$ que tiene como objetos los campos uniformes separados con espacio base T y como morfismos los descritos en 2.1.

De ahora en adelante $(T, \mathcal{A})$ denota un espacio topológico y $\mathfrak{V}(t)$ la base de filtro formada por todas las vecindades abiertas del punto $t \in T$. Además, $\mathcal{A}$ se considera como un preorden con la relación de contenencia.

2.3. Definición. Un *prehaz de espacios uniformes* es un funtor contravariante $\mathcal{P}$ definido de $\mathcal{A}$ a la categoría $Unif$ de los espacios uniformes y aplicaciones uniformemente continuas tal que

(i) A cada abierto Q de $\mathcal{A}$ le hace corresponder un espacio uniforme $\mathcal{P}(Q)$.

(ii) A cada par de abiertos $Q, P \in \mathcal{A}$ con $P \subset Q$ le hace corresponder una función uniformemente continua $f_{QP} : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}(P)$ llamada morfismo restricción.

2.4. Observaciones.

(1) Si en $\mathcal{A}$ se define la relación $Q \leq P$ si y sólo si $P \subset Q$, entonces $(\mathcal{A}, \leq)$ es un conjunto dirigido. Por lo tanto, el prehaz

$$((\mathcal{P}(Q))_{Q\in\mathcal{A}}, (f_{QP})_{Q,P\in\mathcal{A}}^{P\subset Q})$$

es un sistema directo en $Unif$.

(2) Si en la Definición 2.3 se toma una categoría cualquiera en el lugar de $Unif$, al funtor contravariante $\mathcal{P}$ se le llamará simplemente un *prehaz.*

2.5. Prehaz de secciones locales. Sea $\big[(G,p,T),\ \mathcal{U}\big]$ un campo uniforme. Denotamos por $\mathcal{C}$ el calibre total de $(G, \mathcal{U})$, esto es, la colección de todas las pseudométricas finitas uniformemente continuas definidas de $G \times G$ en $\mathbb{R}$. A este campo se le puede asociar el prehaz de *secciones locales* $\mathcal{P}_p : \mathcal{A} \longrightarrow Unif$ como sigue:

(i) Para cada $Q \in \mathcal{A}, \mathcal{P}_p(Q) = \big(\mathcal{P}_p(Q), \mathcal{U}_Q\big)$, donde $\mathcal{P}_p(Q) = \{\alpha : \alpha$ es una sección local en (G,p,T) con dominio $Q\}$ y $\mathcal{U}_Q$ es la uniformidad generada por la base $\{U_{d,Q}^{\varepsilon,p} : \varepsilon > 0, d \in \mathcal{C}\}$, siendo

$$U_{d,Q}^{\varepsilon,p} = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}_p(Q) \times \mathcal{P}_p(Q) : (\forall s \in Q)((\alpha(s), \beta(s)) \in V_d^{\varepsilon})\},$$
$$V_d^{\varepsilon} = \{(u,v) \in G \times G : d(u,v) < \varepsilon\}.$$

(ii) Para cada $Q, P \in \mathcal{A}$ con $P \subset Q$, $f_{QP} : \mathcal{P}_p(Q) \longrightarrow \mathcal{P}_p(P), \alpha \longmapsto \alpha|_P$ es uniformemente continua, donde $\alpha|_P$ denota la restricción de α a P.

2.6. Definición. Dado un campo uniforme (G,p,T) y un prehaz $\mathcal{P}$ definido de $\mathcal{A}$ en $Unif$, $\mathcal{P}$ se llama *prehaz de secciones locales* si para cada $Q \in \mathcal{A}$ se tiene $\mathcal{P}(Q) \subset \mathcal{P}_p(Q)$. Los morfismos restricción son aquí los mismos definidos en $\mathcal{P}_p$. Los entornos básicos de $\mathcal{P}(Q)$ se denotan por $U_{d,Q}^{\varepsilon}$ en vez de $U_{d,Q}^{\varepsilon,p}$.

2.7. Definición. Un prehaz $\mathcal{P}$ de secciones locales de (G,p,T) es *pleno* si para cada $u \in G$ con $p(u) = t$ existen $Q \in \mathfrak{V}(t)$ y $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$ tales que $\alpha(t) = u$. Nótese que la plenitud de $\mathcal{P}$ en esta definición es diferente al concepto de plenitud de $\mathcal{P}$ visto como funtor (ver [1]).

2.8. Definición. En la categoría $Preh$ de los prehaces de espacios uniformes con respecto a $\mathcal{A}$ se tiene que

(i) Los objetos son prehaces de espacios uniformes, $\mathcal{P} : \mathcal{A} \longrightarrow Unif$.

(ii) Los morfismos entre dos prehaces $\mathcal{P}, \mathcal{P}' : \mathcal{A} \longrightarrow Unif$ son aplicaciones naturales $\phi : \mathcal{P} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathcal{P}'$, esto es, para cada $Q \in \mathcal{A}$, existe un morfismo $\phi_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}'(Q)$ en $Unif$ y estos morfismos son compatibles con las restricciones, es decir, si $Q, P \in \mathcal{A}$ con $P \subset Q$, el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(Q) \arrow[r, "\phi_Q"] \arrow[d, "f_{QP}"'] & \mathcal{P}'(Q) \arrow[d, "f_{QP}"] \\ \mathcal{P}(P) \arrow[r, "\phi_P"] & \mathcal{P}'(P) \end{tikzcd}$$

2.9. Teorema. *La correspondencia $F : \mathcal{U}camp \longrightarrow Preh$ que asigna a cada campo uniforme (G,p,T) el prehaz $\mathcal{P}_p$ de sus secciones locales y a cada morfismo de campo uniforme $f : [(G,p,T),\mathcal{U}] \longrightarrow [(H,q,T),\mathcal{V}]$ le asigna la aplicación natural $F(f) = \phi : \mathcal{P}_p \dot{\longrightarrow} \mathcal{P}_q$ dada por $F(f)_Q = \phi_Q : \mathcal{P}_p(Q) \longrightarrow \mathcal{P}_q(Q), \alpha \longmapsto f \circ \alpha$, para cada $Q \in \mathcal{A}$, es un funtor covariante.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_H$ los calibres totales de $(G,\mathcal{U})$ y $(H,\mathcal{V})$ respectivamente. Dado que f es uniformemente continua si y sólo si existe una única aplicación $\ell : \mathcal{C}_H \longrightarrow \mathcal{C}_G$, $d \longmapsto d_\ell$ tal que $d(f(u),f(v)) = d_\ell(u,v)$, para $u,v \in G$ (ver [3]), entonces dado $U^{\varepsilon,q}_{d,Q}$ tenemos que $(\phi_Q \times \phi_Q)^{-1}(U^{\varepsilon,q}_{d,Q}) = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}_p(Q) \times \mathcal{P}_p(Q) : (f\circ\alpha, f\circ\beta) \in U^{\varepsilon,q}_{d,Q}\} = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}_p(Q) \times \mathcal{P}_p(Q) : (\forall s \in Q)\big((\alpha(s),\beta(s)) \in V^{\varepsilon}_{d_\ell}\big)\} = U^{\varepsilon,p}_{d_\ell,Q}$, por lo tanto ϕ_Q es uniformemente continua.

Cada ϕ es una transformación natural puesto que si $\alpha \in \mathcal{P}_p(Q)$ entonces $f \circ \alpha \in \mathcal{P}_q(Q)$ ya que f es continua. El diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_p(Q) \arrow[r, "\phi_Q"] \arrow[d, "f_{QP}"'] & \mathcal{P}_q(Q) \arrow[d, "f_{QP}"] \\ \mathcal{P}_p(P) \arrow[r, "\phi_P"] & \mathcal{P}_q(P) \end{tikzcd}$$

conmuta, en efecto, sean $Q,P \in \mathcal{A}$ con $P \subset Q$. Para $\alpha \in \mathcal{P}_p(Q)$ se tiene $(f_{QP} \circ \phi_Q)(\alpha) = f_{QP}(f\circ\alpha) = (f\circ\alpha)|_P = f\circ\alpha|_P = \phi_P(\alpha|_P) = \phi_P(f_{QP}(\alpha)) = (\phi_P \circ f_{QP})(\alpha)$.

Sean $f : (G,p,T) \longrightarrow (H,q,T)$ y $g : (H,q,T) \longrightarrow (L,r,T)$ dos morfismos en $\mathcal{U}camp$. Veamos que $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$. Dado $Q \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathcal{P}_p(Q)$ se tiene que $F(g\circ f)_Q(\alpha) = (g\circ f)\circ\alpha = g\circ(f\circ\alpha) = F(g)_Q(f\circ\alpha) = F(g)_Q(F(f)_Q(\alpha)) = (F(g)_Q \circ F(f)_Q)(\alpha)$.

Sea $1_G : (G,p,T) \longrightarrow (G,p,T)$ la aplicación idéntica. Entonces dado $Q \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathcal{P}_p(Q)$ se tiene, $F(1_G)_Q(\alpha) = 1_G \circ \alpha = \alpha = 1_{\mathcal{P}_p(Q)}(\alpha)$, por lo tanto $F(1_G) = 1_{\mathcal{P}_p}$. ☑

2.10. Corolario. *Si se considera la subcategoría $\mathcal{U}camp_s$ de $\mathcal{U}camp$, la correspondencia $F : \mathcal{U}camp_s \longrightarrow Preh$ definida como en el Teorema 2.9 también es un funtor.*

2.11. Proposición. *Sean $[(G,p,T),\mathcal{U}]$ un campo uniforme, $\mathcal{C}$ su calibre total, $\mathcal{P}$ un prehaz de secciones locales, $t \in T$ y $Q \in \mathfrak{V}(t)$. Si $\alpha,\beta \in \mathcal{P}(Q)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada $d \in \mathcal{C}$ las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) $(\alpha(t),\beta(t)) \in V^{\varepsilon}_d$.

(ii) $(\exists S \in \mathfrak{V}(t)$ *con* $S \subset Q)\big((\alpha|_S, \beta|_S) \in U^{\varepsilon}_{d,S}\big)$, *donde* $\alpha|_S$ *es la restricción de* α *a* S *y* $\beta|_S$ *es la restricción de* β *a* S.

Demostración. Sean $t \in T$, $Q \in \mathfrak{V}(t)$. Como (G, p, T) es un campo uniforme, $\{V^{\varepsilon}_d \ : \ \varepsilon > 0,\ d \in \mathcal{C}\}$ es una base de $\mathcal{U}$ y si α, β son secciones locales con dominio Q, entonces para V^{ε}_d tenemos que $P = \{s \in T \ : \ (\alpha(s), \beta(s)) \in V^{\varepsilon}_d\}$ es un abierto en T. Sea $S = Q \cap P \in \mathfrak{V}(t)$. Si $(\alpha(t), \beta(t)) \in V^{\varepsilon}_d$, entonces $(\forall s \in S)\big((\alpha|_S(s), \beta|_S(s)) \in V^{\varepsilon}_d\big)$, luego $(\exists S \in \mathfrak{V}(t)$ con $S \subset Q)\big((\alpha|_S, \beta|_S) \in U^{\varepsilon}_{d,S}\big)$. La recíproca es inmediata. ☑

3. El proceso de localización

A partir de un prehaz en $Unif_s$ vamos a construir un campo de espacios uniformes por el proceso de localización. Este proceso consiste en definir las fibras del campo como colímites de sistemas directos de espacios uniformes separados determinados por el prehaz dado cf. [3], aprovechando que las vecindades abiertas de un punto $t \in T$ es un conjunto dirigido. En esta construcción se tratan uniformidades en términos de entornos generales, caracterizando las aplicaciones uniformemente continuas por medio de los calibres totales.

3.1. La construcción del campo.

Sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio topológico y $\mathcal{P} : \mathcal{A} \longrightarrow Unif_s$ un prehaz en $Unif_s$, esto es,

$$\Big(\big(\mathcal{P}(Q)\big)_{Q\in\mathcal{A}},\ \big(f_{QP}\big)^{P\subset Q}_{Q,P\in\mathcal{A}}\Big).$$

1. Para cada $t \in T$ considérese el prehaz

$$\Big(\big(\mathcal{P}(Q)\big)_{Q\in\,\mathfrak{V}(t)},\ \big(f_{QP}\big)^{P\subset Q}_{Q,P\in\mathfrak{V}(t)}\Big),$$

donde cada $\mathcal{P}(Q) = (X_Q, \mathcal{U}_Q)$ es un espacio uniforme separado y $\mathcal{C}_Q$ denota su calibre total (ver [3]).

2. Sea

$$\big(\widehat{G}_t,\ \big(\mathcal{T}^t_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \widehat{G}_t\big)_{Q\in\,\mathfrak{V}(t)}\big)$$

el colímite de este prehaz, tal como fue construído en [3]: en esta construcción tenemos que la función $f_{QP} : X_Q \longrightarrow X_P$ es uniformemente continua si y sólo si existe una función $\ell_{QP} : \mathcal{C}_P \longrightarrow \mathcal{C}_Q, d_P \longmapsto (d_P)_{\ell_{QP}}$ tal que

$$d_P\big(f_{QP}(x_Q), f_{QP}(y_Q)\big) = (d_P)_{\ell_{QP}}(x_Q, y_Q); \quad \forall x_Q, y_Q \in X_Q,$$

donde $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$ con $P \subset Q$.

En

$$Z_t = \dot{\bigcup_{Q \in \mathfrak{V}(t)}} X_Q$$

se considera la colección de entornos subbásicos

$$\mathcal{B}_t = \{W^\varepsilon_{d_t} \; : \varepsilon > 0, d_t \in \mathcal{C}_t\}$$

donde $\mathcal{C}_t = \overleftarrow{\lim}\, \mathcal{C}_Q$ es el límite proyectivo del sistema $\mathcal{C}_Q$ con las aplicaciones ℓ_{QP}; $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$, $P \subset Q$, esto es,

$$\mathcal{C}_t = \{d_t = (d_Q)_{Q \in \mathfrak{V}(t)} \in \prod_{Q \in \mathfrak{V}(t)} \mathcal{C}_Q : (\pi^t_P(d_t))_{\ell_{QP}} = \pi^t_Q(d_t)$$
$$\text{para cada } \; Q, P \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } P \subset Q\}$$

y

$$W^\varepsilon_{d_t} = \{(x_Q, y_P) \in Z_t \times Z_t \;\; : \;\; (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q \cap P)$$
$$\big((f_{QS}(x_Q), f_{PS}(y_P)) \in V^\varepsilon_{\pi^t_S(d_t)}\big)\}.$$

Se define sobre Z_t la relación de equivalencia $x_Q R_t \; y_P$ si y sólo si

$$(\forall d_t \in \mathcal{C}_t)(\forall \varepsilon > 0)\big((x_Q, y_P) \in W^\varepsilon_{d_t}\big)$$

y se toma $\widehat{G_t} = Z_t / R_t$.

Se considera la función canónica

$$\phi_t : Z_t \longrightarrow \widehat{G_t}, \; x_Q \longmapsto \overline{x_Q}$$

y la colección de entornos subbásicos

$$\{(\phi_t \times \phi_t)(W^\varepsilon_{d_t}) \;\; : \;\; W^\varepsilon_{d_t} \in \mathcal{B}_t\}$$

que genera una uniformidad separada $\widehat{\mathcal{U}_t}$ en $\widehat{G_t}$.

Los morfismos que forman el cono del colímite se definen así : para $Q \in \mathfrak{V}(t)$,

$$\mathcal{T}^t_Q : X_Q \longrightarrow \widehat{G_t}, \; x_Q \longmapsto \overline{x_Q}.$$

Resulta que otra forma para escribir a $\widehat{G_t}$ es la siguiente

$$\widehat{G_t} = \{\mathcal{T}^t_Q(x_Q) \;\; : \;\; x_Q \in X_Q, Q \in \mathfrak{V}(t)\}.$$

3. Sea

$$\widehat{G} = \dot{\bigcup_{t\in T}} \widehat{G_t} = \{\mathcal{T}_Q^t(x_Q) \ : \ t\in T,\ x_Q \in X_Q,\ Q\in \mathfrak{V}(t)\}$$

y definamos

$$\widehat{p} : \widehat{G} \longrightarrow T,\ \mathcal{T}_Q^t(x_Q) \longmapsto t.$$

Es inmediato que $\widehat{p}$ está bien definida y es sobre.

4. En $\widehat{G}$ se define la siguiente colección de entornos subásicos:

$$\mathcal{W} = \{W_d^\varepsilon = \bigcup_{t\in T} (\phi_t \times \phi_t)(W_{d_t}^\varepsilon) \ : \ d = (d_t)_{t\in T} \in C, \varepsilon > 0\},$$

donde

$$(\phi_t \times \phi_t)(W_{d_t}^\varepsilon) = \{(\mathcal{T}_Q^t(x_Q), \mathcal{T}_P^t(y_P)) \in \widehat{G_t} \times \widehat{G_t} \ : \ (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q\cap P)$$
$$((f_{QS}(x_Q), f_{PS}(y_P)) \in V_{\pi_S^t(d_t)}^\varepsilon)\}$$

y

$$C = \{d = (d_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \mathcal{C}_t \ : \ (\forall S \in \mathcal{A})(\forall s,t\in S)(\pi_S^s(\pi_s(d)) = \pi_S^t(\pi_t(d)))\}.$$

Las funciones π_S^s y π_S^t son las proyecciones de $\mathcal{C}_s$ y $\mathcal{C}_t$ en $\mathcal{C}_S$ respectivamente.

Tomamos el sistema fundamental de entornos $\widehat{\mathcal{W}}$ como la base generada por $\mathcal{W}$, cuyos entornos son de la forma:

$$W_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon = \bigcap_{k=1}^n \big(\bigcup_{t\in T} (\phi_t \times \phi_t)(W_{d_{kt}}^\varepsilon)\big) = \bigcup_{t\in T} \big(\bigcap_{k=1}^n (\phi_t \times \phi_t)(W_{d_{kt}}^\varepsilon)\big).$$

5. El sistema $\widehat{\mathcal{W}}$ es cerrado para la inversión, en efecto, dado $\big(\bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon\big) \in \widehat{\mathcal{W}}$ se tiene,

$$\big(\bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon\big)^{-1} = \bigcup_{t\in T} \big(\bigcap_{k=1}^n (\phi_t \times \phi_t)(W_{d_{kt}}^\varepsilon)\big)^{-1}$$
$$= \bigcup_{t\in T} \big(\bigcap_{k=1}^n (\phi_t \times \phi_t)(W_{d_{kt}}^\varepsilon)\big) = \bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon.$$

Además, dados

$$\bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon \in \widehat{\mathcal{W}} \quad \text{y} \quad (\mathcal{T}_Q^s(x_Q), \mathcal{T}_P^s(y_P)) \in \bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon,$$

entonces para cada $k = 1, 2, ..., n$ se tiene

$$(\mathcal{T}_Q^s(x_Q), \mathcal{T}_P^s(y_P)) \in (\phi_s \times \phi_s)\big(W_{d_{ks}}^{\varepsilon}\big),$$

y en consecuencia para cada $k = 1, 2, ..., n$ existe $S_k \in \mathfrak{V}(s)$ con $S_k \subset Q \cap P$ tal que

$$(f_{QS_k}(x_Q), f_{PS_k}(y_P)) \in V_{\pi_{S_k}^s(d_{ks})}^{\varepsilon},$$

luego para cada $k = 1, 2, ..., n$ existe $S_k \in \mathfrak{V}(s)$ con $S_k \subset Q \cap P$ y

$$\delta_k = \frac{1}{2}\big(\varepsilon - \pi_{S_k}^s(d_{ks})(f_{QS_k}(x_Q), f_{PS_k}(y_P))\big)$$

tal que

$$(f_{QS_k}(x_Q), f_{PS_k}(y_P)) \in V_{\pi_{S_k}^s(d_{ks})}^{\varepsilon-\delta_k}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Entonces para cada $k = 1, 2, ..., n$ existe $S_k \in \mathfrak{V}(s)$ con $S_k \subset Q \cap P$ tal que $(f_{QS_k}(x_Q), f_{PS_k}(y_P)) \in V_{\pi_{S_k}^s(d_{ks})}^{\varepsilon-\delta}$,

entonces para cada $k = 1, 2, ..., n$, $(\mathcal{T}_Q^s(x_Q), \mathcal{T}_P^s(y_P)) \in (\phi_s \times \phi_s)\big(W_{d_{ks}}^{\varepsilon-\delta}\big)$.

Se sigue que,

$$(\mathcal{T}_Q^s(x_Q), \mathcal{T}_P^s(y_P)) \in \bigcap_{k=1}^{n} (\phi_s \times \phi_s)\big(W_{d_{ks}}^{\varepsilon-\delta}\big).$$

En consecuencia,

$$(\mathcal{T}_Q^s(x_Q), \mathcal{T}_P^s(y_P)) \in \bigcap_{k=1}^{n} W_{d_k}^{\varepsilon-\delta}.$$

Por lo tanto, existen

$$\bigcap_{k=1}^{n} W_{d_k}^{\delta} \in \widehat{\mathcal{W}} \text{ y } \bigcap_{k=1}^{n} W_{d_k}^{\varepsilon-\delta} \in \widehat{\mathcal{W}}$$

para los cuales

$$(\mathcal{T}_Q^s(x_Q), \mathcal{T}_P^s(y_P)) \in \bigcap_{k=1}^{n} W_{d_k}^{\varepsilon-\delta} \quad \text{y} \quad \bigcap_{k=1}^{n} W_{d_k}^{\varepsilon-\delta} \circ \bigcap_{k=1}^{n} W_{d_k}^{\delta} \subset \bigcap_{k=1}^{n} W_{d_k}^{\varepsilon}.$$

6. Se define la familia Σ de selecciones locales para $\widehat{p}$ así : para cada $Q \in \mathcal{A}$, $x_Q \in X_Q$

$$\widehat{x_Q} : Q \longrightarrow \widehat{G},\ t \longmapsto \mathcal{T}_Q^t(x_Q).$$

Si $s = t \in Q$ y $x_Q \in X_Q$ tenemos que

$$\widehat{x_Q}(t) = \mathcal{T}_Q^t(x_Q) = \mathcal{T}_Q^s(x_Q) = \widehat{x_Q}(s),$$

lo cual demuestra que $\widehat{x_Q}$ está bien definida.

7. Sobre $\widehat{G}$ puede ser definida una topología de tal manera que
   (i) Cada $\widehat{x_Q} \in \Sigma$ es continua.
   (ii) $(\widehat{G},\ \widehat{p},\ T)$ es un campo uniforme.

En efecto, según el teorema de existencia de campos uniformes 1.3 para concluir (i) y (ii) basta verificar las condiciones (a) y (b) allí requeridas como hipótesis.

(a) Dado $\mathcal{T}_Q^t(x_Q) \in \widehat{G_t} \subset \widehat{G}$ y $W_\varepsilon \in \widehat{\mathcal{W}}$ existe $\widehat{x_Q} \in \Sigma$ con $\widehat{x_Q}(t) = \mathcal{T}_Q^t(x_Q)$ tal que

$$\mathcal{T}_Q^t(x_Q) \in W_\varepsilon(\widehat{x_Q}) = \{\mathcal{T}_P^s(y_P) \in \widehat{G}\ :\ (\mathcal{T}_P^s(y_P),\ \widehat{x_Q}(s)) \in W_\varepsilon\}$$

puesto que $\widehat{x_Q}(\widehat{p}(\mathcal{T}_Q^s(x_Q))) = \widehat{x_Q}(s)$.

(b) Dado $W_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon \in \widehat{\mathcal{W}}$ y $(\widehat{x_Q}, \widehat{y_P}) \in \Sigma \times \Sigma$ el conjunto

$$\{s \in T\ :\ (\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_P}(s)) \in W_\varepsilon\}$$

es abierto en T. En efecto, como

$$\{s \in T\ :\ (\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_P}(s)) \in \bigcap_{k=1}^n W_{d_k}^\varepsilon\} = \bigcap_{k=1}^n \{s \in T\ :\ (\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_P}(s)) \in W_{d_k}^\varepsilon\},$$

basta demostrar que para todo $W_d^\varepsilon \in \mathcal{W}$ y $(\widehat{x_Q}, \widehat{y_P}) \in \Sigma \times \Sigma$ el conjunto

$$A = \{s \in T\ :\ (\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_P}(s)) \in W_d^\varepsilon\}$$

es un abierto en T.
Consideremos

$$\widehat{x_Q} : Q \longrightarrow \widehat{G},\ t \longmapsto \mathcal{T}_Q^t(x_Q)$$
$$\widehat{y_P} : P \longrightarrow \widehat{G},\ t \longmapsto \mathcal{T}_P^t(y_P).$$

Si $Q \cap P = \varnothing$, entonces $A = \varnothing \in \mathcal{A}$. En el caso $Q \cap P \neq \varnothing$, tomemos $t \in A$ y demostremos que existe $S \in \mathfrak{V}(t)$ tal que $S \subset A$.

Como $(\mathcal{T}_Q^t(x_Q), \mathcal{T}_P^t(y_P)) \in (\phi_t \times \phi_t)(W_{d_t}^\varepsilon)$ entonces

$$(\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q \cap P)\big((f_{QS}(x_Q), f_{PS}(y_P)) \in V_{\pi_S^t(d_t)}^\varepsilon\big).$$

Dado $s \in S$, entonces $S \in \mathfrak{V}(s)$ y como $\pi_S^t(d_t) = \pi_S^s(d_s)$, entonces

$$(f_{QS}(x_Q), f_{PS}(y_P)) \in V_{\pi_S^s(d_s)}^\varepsilon.$$ Por lo tanto,

$$(\mathcal{T}_Q^s(x_Q), \mathcal{T}_P^s(y_P)) \in (\phi_s \times \phi_s)(W_{d_s}^\varepsilon) \subset \bigcup_{t\in T}(\phi_t \times \phi_t)(W_{d_t}^\varepsilon) = W_d^\varepsilon,$$

luego $s \in A$ y por ende $S \subset A$.

4. Resultados de tipo categórico

En esta última sección trataremos problemas de carácter categórico a saber:

(1) Bajo qué condiciones un campo uniforme dado es igual a un campo uniforme construido por localización.
(2) Determinar si el campo construido por localización tiene alguna propiedad universal.

El problema (1) se resuelve en 4.5: la localización de prehaces de secciones locales, uniformes y plenos, genera los campos uniformes separados.

El problema (2) se resuelve en 4.7: para cada prehaz $\mathcal{P} : \mathcal{A} \longrightarrow Unif_s$, existe una flecha universal (ver [9]), proporcionada por el proceso de localización, de $\mathcal{P}$ a F, donde F es el funtor dado en 2.10.

4.1. Lema. *En el proceso de localización 3.1, si $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$, $P \subset Q$ y $Q, P \in \mathcal{A}$ entonces $\widehat{x_Q}|_P = \widehat{f_{QP}(x_Q)}$.*

Demostración. Sea $t \in P$. Como

$$\widehat{x_Q}|_P(t) = \mathcal{T}_Q^t(x_Q), \quad \widehat{f_{QP}(x_Q)}(t) = \mathcal{T}_P^t(f_{QP}(x_Q))$$

y $x_Q R_t f_{QP}(x_Q)$ pues para todo $\varepsilon > 0$ y todo $d_t \in \mathcal{C}_t$ existe $S = P \subset Q \cap P$ tal que

$$\big(f_{QP}(x_Q),\ f_{PP}(f_{QP}(x_Q))\big) = \big(f_{QP}(x_Q),\ f_{QP}(x_Q)\big) \in V^{\varepsilon}_{\pi^t_P(d_t)},$$

se sigue que $\mathcal{T}_Q^t(x_Q) = \mathcal{T}_P^t(f_{QP}(x_Q))$. ☑

4.2. Teorema. *Si $\mathcal{P} : \mathcal{A} \longrightarrow Unif_s$ es un prehaz y $(\widehat{G}, \widehat{p}, T)$ es el campo obtenido por localización, entonces se puede construir un prehaz se secciones locales $\widehat{\mathcal{P}}$ (para cada $Q \in \mathcal{A}$, $\widehat{\mathcal{P}}(Q) \subset \mathcal{P}_{\widehat{p}}(Q)$) de tal manera que*

(i) *El prehaz $\widehat{\mathcal{P}}$ es pleno.*
(ii) *Existe un morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{P} \dot{\longrightarrow} \widehat{\mathcal{P}}$.*

Demostración. Se define $\widehat{\mathcal{P}} : \mathcal{A} \longrightarrow Unif_s$ de la siguiente manera: para cada $Q \in \mathcal{A}$, $\widehat{\mathcal{P}}(Q) = \{\widehat{x_Q} : x_Q \in \mathcal{P}(Q)\} \subset \mathcal{P}_{\widehat{p}}(Q)$ es dotado de la uniformidad que tiene por base los entornos

$$U^{\varepsilon}_{d,Q} = \{(\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in \widehat{\mathcal{P}}(Q) \times \widehat{\mathcal{P}}(Q) : (\forall s \in Q)\big((\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_Q}(s)) \in$$

$$(\phi_s \times \phi_s)(W^{\varepsilon}_{\pi_s(d)})\big)\},$$

donde $\varepsilon > 0$ y $d \in C \subset \prod_{t \in T} C_t$, cf. 3.1.

Para $Q, P \in \mathcal{A}$ con $P \subset Q$ se define $\widehat{\mathcal{P}}(P \subset Q) = f_{QP} : \widehat{\mathcal{P}}(Q) \longrightarrow \widehat{\mathcal{P}}(P)$, donde $f_{QP}(\widehat{x_Q}) = \widehat{x_Q}|_P$.

Esta definición tiene sentido porque si $\widehat{x_Q} \in \widehat{\mathcal{P}}(Q)$, entonces $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$, luego $f_{QP}(x_Q) \in \mathcal{P}(P)$ y por lo tanto $\widehat{x_Q}|_P = \widehat{f_{QP}(x_Q)} \in \widehat{\mathcal{P}}(P)$.

Además, f_{QP} es uniformemente continua, pues dado $U^{\varepsilon}_{d,P}$ entorno básico de $\widehat{\mathcal{P}}(P)$ existe $U^{\varepsilon}_{d,Q}$ entorno básico de $\widehat{\mathcal{P}}(Q)$ tal que

$$\begin{aligned}
&(f_{QP} \times f_{QP})^{-1}(U^{\varepsilon}_{d,P}) = \{(\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in \widehat{\mathcal{P}}(Q) \times \widehat{\mathcal{P}}(Q) : (\widehat{x_Q}|_P, \widehat{y_Q}|_P) \in U^{\varepsilon}_{d,P}\} = \\
&\{(\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in \widehat{\mathcal{P}}(Q) \times \widehat{\mathcal{P}}(Q) : (\forall s \in P)\big((\widehat{x_Q}|_P(s), \widehat{y_Q}|_P(s)) \in (\phi_s \times \phi_s)(W^{\varepsilon}_{\pi_s(d)})\big\} \\
&\supset \{(\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in \widehat{\mathcal{P}}(Q) \times \widehat{\mathcal{P}}(Q) : (\forall s \in Q)\big((\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_Q}(s)) \in (\phi_s \times \phi_s)(W^{\varepsilon}_{\pi_s(d)})\big\} \\
&= U^{\varepsilon}_{d,Q}.
\end{aligned}$$

(i) Veamos que $\widehat{\mathcal{P}}$ es pleno: sea $\mathcal{T}^t_Q(x_Q) \in \widehat{G}_t \subset \widehat{G}$ con $\widehat{p}(\mathcal{T}^t_Q(x_Q)) = t$, donde $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$ y $Q \in \mathfrak{V}(t)$. Entonces existen $Q \in \mathfrak{V}(t)$ y $\widehat{x_Q} \in \widehat{\mathcal{P}}(Q)$ tales que $\widehat{x_Q}(t) = \mathcal{T}^t_Q(x_Q)$.

(ii) Para cada $Q \in \mathcal{A}$ definimos

$$\varphi_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \widehat{\mathcal{P}}(Q), \quad x_Q \longmapsto \varphi_Q(x_Q) = \widehat{x_Q},$$

La aplicación φ_Q es uniformemente continua porque dado $U^{\varepsilon}_{d,Q}$ entorno básico de $\widehat{\mathcal{P}}(Q)$ existe $s \in Q$ y $V^{\varepsilon}_{\pi_Q(\pi_s(d))}$ entorno básico de $\mathcal{P}(Q)$ con $s \in Q$ tal que

$$\begin{aligned}
&(\varphi_Q \times \varphi_Q)^{-1}(U^{\varepsilon}_{d,Q}) = \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in U^{\varepsilon}_{d,Q}\} = \\
&\{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\forall s \in Q)\big((\phi_s \times \phi_s)(x_Q, y_Q) \in (\phi_s \times \phi_s)(W^{\varepsilon}_{\pi_s(d)})\big)\} \\
&\supset \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\forall s \in Q)\big((x_Q, y_Q) \in W^{\varepsilon}_{\pi_s(d)}\big)\} \\
&= \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\forall s \in Q)\big((x_Q, y_Q) \in V^{\varepsilon}_{\pi_Q(\pi_s(d))}\big)\} \\
&= \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : \ (x_Q, y_Q) \in V^{\varepsilon}_{\pi_Q(\pi_s(d))}\} = V^{\varepsilon}_{\pi_Q(\pi_s(d))}.
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad se tiene para cada $s \in Q$ por la definición de C.

Para ver que φ es una transformación natural se establece la conmutatividad del diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(Q) & \xrightarrow{\varphi_Q} & \widehat{\mathcal{P}}(Q) \\
{\scriptstyle f_{QP}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{QP}} \\
\mathcal{P}(P) & \xrightarrow{\varphi_P} & \widehat{\mathcal{P}}(P)
\end{array}$$

Sean $Q, P \in \mathcal{A}$ con $P \subset Q$ y $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$, entonces

$$f_{QP}(\varphi_Q(x_Q)) = f_{QP}(\widehat{x_Q}) = \widehat{x_Q}|_P = \widehat{f_{QP}(x_Q)} = \varphi_P(f_{QP}(x_Q)). \ ☑$$

4.3. Definición. Sea $[(G,p,T),\ \mathcal{U}]$ un campo uniforme y $\mathcal{P}$ un prehaz de secciones locales. Se dice que $\mathcal{P}$ es *uniforme* si para cada cono inductivo $\big((H,\mathcal{V}),\ (\sigma_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow H)_{Q\in\mathcal{A}}\big)$ existe $\ell_{GH} : \mathcal{C}_H \longrightarrow \mathcal{C}_G, d_H \longmapsto (d_H)\ell_{GH}$, independiente de Q, donde $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_H$ son los calibres totales de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, tal que

$$(\sigma_Q \times \sigma_Q)^{-1}(V^{\varepsilon}_{d_H}) \supset U^{\varepsilon}_{(d_H)\ell_{GH},Q} = \big\{(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\forall s \in Q)\big((\alpha(s),\beta(s)) \in V^{\varepsilon}_{(d_H)\ell_{GH}}\big)\big\}.$$

4.4. Definición. Sean $[(G,p,T),\mathcal{U}]$ y $[(H,q,T),\mathcal{V}]$ campos uniformes, $\mathcal{P}$ un prehaz se secciones locales en (G,p,T) y $\mathcal{P}'$ un prehaz de secciones locales en (H,q,T). Si denotamos por $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_H$ los calibres de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, un morfismo $\varphi : \mathcal{P} \dot{\longrightarrow} \mathcal{P}'$ de prehaces se dice que es *uniforme* si existe $\ell_{GH} : \mathcal{C}_H \longrightarrow \mathcal{C}_G$ tal que para todo $Q \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$(\varphi_Q \times \varphi_Q)^{-1}(U^{\varepsilon}_{d_H,Q}) \supset U^{\varepsilon}_{(d_H)\ell_{GH},Q}.$$

4.5. Teorema. *Si $[(G,p,T),\mathcal{U}]$ es un campo uniforme separado y $\mathcal{P}$ es un prehaz uniforme y pleno de secciones locales en (G,p,T), entonces el campo uniforme $(\widehat{G},\widehat{p},T)$ obtenido por localización es precisamente (G,p,T).*

Demostración. Sea $\mathcal{C}_G$ el calibre total de $\mathcal{U}$. Para cada $t \in T$ se considera el sistema directo

$$\Big((\mathcal{P}(Q))_{Q\in\mathfrak{V}(t)},\ (f_{QP})^{P\subset Q}_{Q,P\in\mathfrak{V}(t)}\Big)$$

en $Unif_s$

Veamos que el colímite de este sistema directo es el cono

$$\big(G_t, (\sigma^t_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow G_t)_{Q\in\ \mathfrak{V}(t)}\big)$$

donde $G_t = p^{-1}(t)$ es la fibra encima de t y $\sigma^t_Q(\alpha) = \alpha(t)$. En efecto, como

$$\begin{aligned}(\sigma^t_Q \times \sigma^t_Q)(U^{\varepsilon}_{d_G,Q}) &= \{(\sigma^t_Q(\alpha),\sigma^t_Q(\beta)) \in G_t \times G_t : (\alpha,\beta) \in U^{\varepsilon}_{d_G,Q}\}\\ &= \{(\alpha(t),\beta(t)) \in G_t \times G_t : (\alpha,\beta) \in U^{\varepsilon}_{d_G,Q}\}\\ &= \{(\alpha(t),\beta(t)) \in G_t \times G_t : (\forall s \in Q)\big((\alpha(s),\beta(s)) \in V^{\varepsilon}_{d_G}\big)\}\\ &\subset \{(\alpha(t),\beta(t)) \in G_t \times G_t : (\alpha(t),\beta(t)) \in V^{\varepsilon}_{d_G}\}\\ &= V^{\varepsilon}_{d_G} \cap (G_t \times G_t),\end{aligned}$$

entonces σ^t_Q es un morfismo de $Unif_s$.

Por otro lado, si $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$ con $P \subset Q$ entonces

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(Q) \arrow[rr, "f_{QP}"] \arrow[dr, "\sigma^t_Q"'] & & \mathcal{P}(P) \arrow[dl, "\sigma^t_P"] \\ & \widehat{G_t} & \end{tikzcd}$$

conmuta, en efecto, para $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$ tenemos que

$$(\sigma^t_P \circ f_{QP})(\alpha) = \sigma^t_P(f_{QP}(\alpha)) = \sigma^t_P(\alpha|_P) = \alpha|_P(t) = \alpha(t) = \sigma^t_Q(\alpha).$$

Sea ahora

$$\Big((H_t, \mathcal{V}_t), (\theta^t_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow H_t)_{Q\in\mathfrak{V}(t)}\Big)$$

otro cono inductivo. Demostremos que existe un único morfismo

$$\varphi_t : G_t \subset G \longrightarrow H_t, \alpha(t) \longmapsto \theta^t_Q(\alpha)$$

tal que para todo $Q \in \mathfrak{V}(t)$, $\theta^t_Q = \sigma^t_Q \circ \varphi_t$. Como $\mathcal{P}$ es pleno, dado $u \in G_t$ con $p(u) = t$ existen $Q \in \mathfrak{V}(t)$ y $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$ tales que $\alpha(t) = u$, en consecuencia φ_t está definida en todo G_t.

La aplicación φ_t está bien definida: supóngase que $\alpha(t) = \beta(t)$ con $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$, $\beta \in \mathcal{P}(P)$ y $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$. Si $\mathcal{C}_{H_t}$ denota el calibre total de la uniformidad separada de H_t; entonces, por ser $\mathcal{P}$ uniforme, existe $\ell_t : \mathcal{C}_{H_t} \longrightarrow \mathcal{C}_G$ tal que

$$(\theta^t_Q \times \theta^t_Q)^{-1}(V^\varepsilon_{d_{H_t}}) \supset U^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}, Q};\ \forall Q \in \mathfrak{V}(t).$$

Dados $\varepsilon > 0$ y $d_{H_t} \in \mathcal{C}_{H_t}$ existe $S \in \mathfrak{V}(t)$ con $S \subset Q \cap P$ tal que si $(\alpha|_S, \beta|_S) \in U^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}, S}$ entonces $\big(\theta^t_S(\alpha|_S), \theta^t_S(\beta|_S)\big) \in (\theta^t_S \times \theta^t_S)(U^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}, S}) \subset V^\varepsilon_{d_{H_t}}$.

Puesto que $\theta^t_Q(\alpha) = \alpha(t) = \alpha|_S(t) = \theta^t_S(\alpha|_S)$ y $\theta^t_P(\beta) = \theta^t_S(\beta|_S)$ entonces $(\theta^t_Q(\alpha), \theta^t_P(\beta)) \in V^\varepsilon_{d_{H_t}}$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $d_{H_t} \in \mathcal{C}_{H_t}$. Pero $(H_t, \mathcal{V}_t)$ es separado, entonces $\theta^t_Q(\alpha) = \theta^t_P(\beta)$.

La aplicación φ_t es uniformemente continua: sean $\varepsilon > 0$, $d_{H_t} \in \mathcal{C}_{H_t}$. Veamos que,

$$(\varphi_t \times \varphi_t)(V^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}}) \subset V^\varepsilon_{d_{H_t}}.$$

En efecto, sea $(\varphi_t \times \varphi_t)(\alpha(t), \beta(t)) \in (\varphi_t \times \varphi_t)(V^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}})$ con $(\alpha(t), \beta(t)) \in V^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}}$, donde $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$, $\beta \in \mathcal{P}(P)$ y $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$. Por la Proposición 2.11 existe $S \in \mathfrak{V}(t)$ con $S \subset Q \cap P$ tal que $(\alpha|_S, \beta|_S) \in U^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}, S}$, esto implica que $\big(\theta^t_S(\alpha|_S), \theta^t_S(\beta|_S)\big) \in (\theta^t_S \times \theta^t_S)(U^\varepsilon_{(d_{H_t})_{\ell_t}, S}) \subset V^\varepsilon_{d_{H_t}}$, por lo tanto,

$$(\varphi_t \times \varphi_t)(\alpha(t), \beta(t)) = \big(\theta^t_Q(\alpha), \theta^t_P(\beta)\big) = \big(\theta^t_S(\alpha|_S), \theta^t_S(\beta|_S)\big) \in V^\varepsilon_{d_{H_t}},$$

con lo cual se demuestra la contenencia anunciada.

Como para cada $t \in T$, $\widehat{G_t} = p^{-1}(t) = G_t$ entonces

$$G = \widehat{G} = \{\sigma_Q^t(\alpha) : t \in T, \alpha \in \mathcal{P}(Q), Q \in \mathfrak{V}(t)\},$$

se sigue que

$$\widehat{p}(\sigma_Q^t(\alpha)) = t = p(\alpha(t)) = p(\sigma_Q^t(\alpha)),$$

entonces $\widehat{p} = p$.

Dado $Q \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$, para cada $t \in Q$ tenemos $\widehat{\alpha}(t) = \sigma_Q^t(\alpha) = \alpha(t)$, por lo tanto la familia de selecciones Σ con dominio Q definidas en el Numeral 6 de la Sección 3.1 coincide con $\mathcal{P}(Q)$.

Para finalizar la demostración veamos que los entornos sobre cada fibra $\widehat{G_t}$ determinados por el calibre de $\mathcal{U}$ son los mismos descritos en el Numeral 5 de 3.1; en efecto, por la Proposición 2.11, tenemos que

$$\begin{aligned}\{(\alpha(t), \beta(t)) \in G_t \times G_t : (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q \cap P)\big((\alpha|_S, \beta|_S) \in U^{\varepsilon}_{d_G, S}\big)\}\\ = \{(\alpha(t), \beta(t)) \in G_t \times G_t : d_G(\alpha(t), \beta(t)) < \varepsilon\} = V^{\varepsilon}_{d_G} \cap (G_t \times G_t)\end{aligned}$$

con lo cual se termina la prueba. ☑

4.6. Teorema. *Sean $[(G,p,T),\mathcal{U}]$ y $[(H,q,T),\mathcal{V}]$ campos uniformes, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ prehaces de secciones locales de los campos (G,p,T) y (H,q,T) respectivamente. Si $\mathcal{V}$ es separada y $\mathcal{P}$ es pleno, entonces un morfismo uniforme de prehaces $\varphi : \mathcal{P} \dot{\longrightarrow} \mathcal{P}'$ determina un morfismo de campos $F : G \longrightarrow H$.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{C}_H$ los calibres totales de las uniformidades $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente.

Los entornos

$$U^{\varepsilon}_{d_G, Q} = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\forall s \in Q)\big((\alpha(s), \beta(s)) \in V^{\varepsilon}_{d_G}\big)\}$$

y

$$U^{\varepsilon}_{d_H, Q} = \{(\mu, \omega) \in \mathcal{P}'(Q) \times \mathcal{P}'(Q) : (\forall s \in Q)\big((\mu(s), \omega(s)) \in V^{\varepsilon}_{d_H}\big)\},$$

donde $d_G \in \mathcal{C}_G$, $d_H \in \mathcal{C}_H$ y $\varepsilon > 0$, forman una base de $\mathcal{P}(Q)$ y $\mathcal{P}'(Q)$ respectivamente.

Como $\varphi : \mathcal{P} \dot{\longrightarrow} \mathcal{P}'$ es un morfismo uniforme de prehaces entonces existe $\ell_{GH} : \mathcal{C}_H \longrightarrow \mathcal{C}_G$ tal que para cada $Q \in \mathcal{A}$

$$(\varphi_Q \times \varphi_Q)^{-1}(U^{\varepsilon}_{d_H, Q}) \supset U^{\varepsilon}_{(d_H)_{\ell_{GH}}, Q},$$

donde

$$\varphi_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}'(Q), \ \alpha \longmapsto \varphi_Q(\alpha).$$

Se define f de la siguiente manera: sean $x \in G$ y $p(x) = t$. Como $\mathcal{P}$ es pleno, existen $Q \in \mathfrak{V}(t)$ y $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$ tal que $\alpha(t) = x$.

$$f : G \longrightarrow H,\ x \longmapsto f(x) = \varphi_Q(\alpha)(t),$$

esto es, $f(\alpha(t)) = \varphi_Q(\alpha)(t)$.

La función f está bien definida: sean $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$ con $\alpha \in \mathcal{P}(Q), \beta \in \mathcal{P}(P)$ tal que $\alpha(t) = x = \beta(t)$. Si se toman $d_H \in \mathcal{C}_H$ y $\varepsilon > 0$ (arbitrarios) entonces existe $S \in \mathfrak{V}(t)$ con $S \subset Q \cap P$ tal que $(\alpha|_S, \beta|_S) \in U^{\varepsilon}_{(d_H)_{\ell_{GH}}, S}$, en consecuencia

$$(\varphi_S(\alpha|_S), \varphi_S(\beta|_S)) \in (\varphi_S \times \varphi_S)(U^{\varepsilon}_{(d_H)_{\ell_{GH}}, S}) \subset U^{\varepsilon}_{d_H, Q},$$

entonces $(\forall s \in S)\big((\varphi_S(\alpha|_S)(s), \varphi_S(\beta|_S)(s)) \in V^{\varepsilon}_{d_H}\big)$ y por consiguiente $(\varphi_Q(\alpha)(t), \varphi_P(\beta)(t)) = (\varphi_S(\alpha|_S)(t), \varphi_S(\beta|_S)(t)) \in V^{\varepsilon}_{d_H}$ debido a que φ es una transformación natural.

Como $d_H \in \mathcal{C}_H$ y $\varepsilon > 0$ se tomaron arbitrariamente y la uniformidad $\mathcal{V}$ es separada, entonces $\varphi_Q(\alpha)(t) = \varphi_P(\beta)(t)$.

La función f es uniformemente continua: como $\mathcal{P}$ es pleno, para cada par $(x, y) \in G_t \times G_t$ existen $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$, $\beta \in \mathcal{P}(P)$ con $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$ tales que $(\alpha(t), \beta(t)) = (x, y)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(f \times f)^{-1}(V^{\varepsilon}_{d_H}) &\supset (f \times f)^{-1}(V^{\varepsilon}_{d_H} \cap (H_t \times H_t)) \\
&= \{(\alpha(t), \beta(t)) \in G_t \times G_t : (\varphi_Q(\alpha)(t), \varphi_P(\beta)(t)) \in V^{\varepsilon}_{d_H}\} \\
&= \{(\alpha(t), \beta(t)) \in G_t \times G_t : (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q \cap P) \\
&\qquad\qquad ((\varphi_S(\alpha|_S), \varphi_S(\beta|_S)) \in U^{\varepsilon}_{d_H, S})\} \\
&\supset \{(\alpha(t), \beta(t)) \in G_t \times G_t : (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q \cap P) \\
&\qquad\qquad ((\alpha|_S, \beta|_S) \in U^{\varepsilon}_{(d_H)_{\ell_{GH}}, S})\} \\
&= \{(\alpha(t), \beta(t)) \in G_t \times G_t : (\alpha(t), \beta(t)) \in V^{\varepsilon}_{(d_H)_{\ell_{GH}}}\} \\
&= V^{\varepsilon}_{(d_H)_{\ell_{GH}}} \cap (G_t \times G_t) \in \mathcal{U},
\end{aligned}$$

por lo tanto f es uniformemente continua.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & H \arrow[dl, "q"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Sea $x = \alpha(t) \in G$ con $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$ y $Q \in \mathfrak{V}(t)$. Entonces $(q \circ f)(x) = q(\varphi_Q(\alpha)(t)) = t = p(\alpha(t)) = p(x)$, por lo tanto $q \circ f = p$.

La función f es continua con respecto a las topologías asociadas a los campos uniformes: sea $V^{\varepsilon}_{d_H}(\sigma)$ un V–tubo en (H, q, T). Si $x \in f^{-1}\big(V^{\varepsilon}_{d_H}(\sigma)\big)$ con $p(x) = t$, entonces $f(x) \in V^{\varepsilon}_{d_H}(\sigma)$, se sigue que $(f(x), \sigma(q(f(x)))) = (f(x), \sigma(t)) \in V^{\varepsilon}_{d_H}$ y si fijamos $r > 0$ tal que $d_H(f(x), \sigma(t)) < r < \varepsilon$, entonces $(f(x), \sigma(t)) \in V^{r}_{d_H}$.

Como $\mathcal{P}$ es pleno, para $x \in G$ existen $Q \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathcal{P}(Q)$ tal que $\alpha(t) = x$. Además, para todo $s \in Q$ tenemos $(f \circ \alpha)(s) = f(\alpha(s)) = \varphi_Q(\alpha)(s)$ y por consiguiente $f \circ \alpha = \varphi_Q(\alpha)$.

Puesto que φ es un morfismo de prehaces entonces $\varphi_Q(\alpha) \in \mathcal{P}'(Q)$ es una sección local para q en el campo (H, q, T), en consecuencia

$$S = \{s \in T : (\varphi_Q(\alpha)s, \sigma(s)) \in V^{r}_{d_H}\} \subset Q$$

es un abierto de T que contiene al punto t.

Como obviamente $x \in V^{\varepsilon - r}_{(d_H)_{\ell_{GH}}}(\alpha|_S)$, para finalizar la demostración basta verificar que

$$V^{\varepsilon - r}_{(d_H)_{\ell_{GH}}}(\alpha|_S) \subset f^{-1}\big(V^{\varepsilon}_{d_H}(\sigma)\big).$$

Sea $y \in V^{\varepsilon - r}_{(d_H)_{\ell_{GH}}}(\alpha|_S)$ con $p(y) = s$, entonces

$(y, \alpha|_S(s)) \in V^{\varepsilon - r}_{(d_H)_{\ell_{GH}}}$, de donde $(f(y), \varphi_Q(\alpha)(s)) \in (f \times f)\big(V^{\varepsilon - r}_{(d_H)_{\ell_{GH}}}\big) \subset V^{\varepsilon - r}_{d_H}$,

luego

$$(f(y), \sigma(s)) \in V^{\varepsilon - r}_{d_H} \circ V^{r}_{d_H} \subset V^{\varepsilon}_{d_H}$$

y por lo tanto $f(y) \in V^{\varepsilon}_{d_H}(\sigma)$. ☑

4.7. Teorema. *Sea $\mathcal{P}$ un prehaz en $Unif_s$ y $F : \mathcal{U}camp_s \longrightarrow \mathcal{P}reh$ el funtor dado en 2.10. La pareja $\big((\widehat{G}, \widehat{p}, T), \varphi : \mathcal{P} \dot{\longrightarrow} \widehat{\mathcal{P}}\big)$ es una flecha universal de $\mathcal{P}$ a F, donde φ es el morfismo definido en 4.2 y $(\widehat{G}, \widehat{p}, T)$ es el campo uniforme obtenido por localización a partir de $\mathcal{P}$.*

Demostración. Recuérdese que F es el funtor que asigna a cada campo uniforme separado (G, p, T) el prehaz $F(G, p, T) = \mathcal{P}_p$, donde para cada $Q \in \mathcal{A}$, $\mathcal{P}_p(Q)$ es el conjunto de todas las secciones locales para p en (Q, p, T) con dominio Q.

Debemos probar que si $[(\widetilde{G}, \widetilde{p}, T),\ \mathcal{V}]$ es un campo uniforme separado y $\psi : \mathcal{P} \dot{\longrightarrow} \mathcal{P}_{\widetilde{p}}$ es un morfismo de prehaces, entonces existe un único morfismo de campos $h : \widehat{G} \longrightarrow \widetilde{G}$ tal que $\xi \circ \varphi = \psi$, donde φ es el morfismo definido en 4.2, ψ es dado y $\xi = F(h)$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & \mathcal{P}_{\widehat{p}} & & \widehat{G} \\ \psi & \searrow & \downarrow & \xi = F(h) & \downarrow \ \exists!\, h \\ & & \mathcal{P}_{\widetilde{p}} & & \widetilde{G} \end{array}$$

Sea $\mathcal{C}_{\widetilde{G}}$ el calibre total de $\mathcal{V}$. Para cada $Q \in \mathcal{A}$ tenemos

$$\varphi_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \widehat{\mathcal{P}}(Q) \subset \mathcal{P}_{\widehat{p}}(Q),\ x_Q \longmapsto \varphi_Q(x_Q) = \widehat{x_Q},$$

$$\psi_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}_{\widetilde{p}}(Q),\ x_Q \longmapsto \psi_Q(x_Q) = \widetilde{x_Q} \ \text{ y}$$

$$\xi_Q : \mathcal{P}_{\widehat{p}}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}_{\widetilde{p}}(Q),\ \alpha \longmapsto \xi_Q(\alpha) = h \circ \alpha,$$

donde h está por determinarse.

En consecuencia $\xi \circ \varphi = \psi$, si y sólo si para cada $Q \in \mathcal{A}$, $\xi_Q \circ \varphi_Q = \psi_Q$, si y sólo si para cada $Q \in \mathcal{A}$ y cada $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$, $h \circ \widehat{x_Q} = \widetilde{x_Q}$.

Sea $t \in T$ fijo y $\widetilde{G_t} = \widetilde{p}^{-1}(t)$ la fibra encima de t en el campo $(\widetilde{G}, \widetilde{p}, T)$. Se considera el sistema directo

$$\Big((\mathcal{P}(Q))_{Q \in \mathfrak{V}(t)}, (f_{QP})^{P \subset Q}_{Q,P \in \mathfrak{V}(t)} \Big).$$

Para cada $Q \in \mathfrak{V}(t)$ definimos:

$$\sigma^t_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \widetilde{G_t} \subset \widetilde{G},\ x_Q \longmapsto \sigma^t_Q(x_Q) = \widetilde{x_Q}(t) = \psi_Q(x_Q)(t).$$

Como ψ es un morfismo de prehaces de secciones locales, entonces para cada $Q \in \mathcal{A}$ y $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$, $\psi_Q(x_Q)$ es una sección local para $\widetilde{p}$. Si denotamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{P}(Q)}$ el calibre de $\mathcal{P}(Q)$, entonces dado $U^{\varepsilon,\widetilde{p}}_{d_{\widetilde{G}},Q}$ entorno básico de $\mathcal{P}_{\widetilde{p}}(Q)$ existe $V^{\delta}_{d_{\mathcal{P}(Q)}}$ entorno básico de $\mathcal{P}(Q)$ tal que $(\psi_Q \times \psi_Q)(V^{\delta}_{d_{\mathcal{P}(Q)}}) \subset U^{\varepsilon,\widetilde{p}}_{d_{\widetilde{G}},Q}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} &(\sigma^t_Q \times \sigma^t_Q)^{-1}(V^{\varepsilon}_{d_{\widetilde{G}}}) = \\ &\qquad \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\psi_Q(x_Q)(t), \psi_Q(y_Q)(t)) \in V^{\varepsilon}_{d_{\widetilde{G}}}\} \\ &\quad = \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q) \\ &\qquad\qquad ((\psi_S(f_{QS}(x_Q)), \psi_S(f_{QS}(y_S))) \in U^{\varepsilon,\widetilde{p}}_{d_{\widetilde{G}},S})\} \\ &= \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q)\big((f_{QS}(x_Q), f_{QS}(y_Q)) \in \\ &\qquad\qquad\qquad (\psi_S \times \psi_S)^{-1}(U^{\varepsilon,\widetilde{p}}_{d_{\widetilde{G}},S})\big)\}. \end{aligned}$$

Puesto que ψ_S es uniformemente continua, dado $U^{\varepsilon,\widehat{\mathcal{P}}}_{d_{\widetilde{G}},S}$ existe $V^{\delta}_{d_{\mathcal{P}(S)}}$ tal que $(\psi_S \times \psi_S)^{-1}\big(U^{\varepsilon,\widehat{\mathcal{P}}}_{d_{\widetilde{G}},S}\big) \supset V^{\delta}_{d_{\mathcal{P}(S)}}$. En consecuencia,

$$(\sigma^t_Q \times \sigma^t_Q)^{-1}(V^{\varepsilon}_{d_{\widetilde{G}}}) \supset \{(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) : (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q)$$
$$\big((f_{QS}(x_Q), f_{QS}(y_Q)) \in V^{\delta}_{d_{\mathcal{P}(S)}}\big)\} \supset V^{\delta}_{(d_{\mathcal{P}(S)})_{\ell_{QS}}},$$

luego σ^t_Q es uniformemente continua.

Sean $Q, P \in \mathfrak{V}(t)$ con $P \subset Q$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(Q) \arrow[rr, "f_{QP}"] \arrow[dr, "\sigma^t_Q"'] & & \mathcal{P}(P) \arrow[dl, "\sigma^t_P"] \\
& \widetilde{G_t} \subset \widetilde{G} &
\end{tikzcd}$$

Para $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\sigma^t_P \circ f_{QP})(x_Q) &= \sigma^t_P(f_{QP}(x_Q)) = \psi_P(f_{QP}(x_Q))(t) = f_{QP}(\psi_Q(x_Q))(t)\\ &= (\psi_Q(x_Q))|_P(t) = \psi_Q(x_Q)(t) = \sigma^t_Q(x_Q)\end{aligned}$$

y dado que

$$\big(\widehat{G_t}, (\mathcal{T}^t_Q : \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \widehat{G_t})_{Q \in \mathfrak{V}(t)}\big)$$

es el colímite del sistema directo considerado según la Construcción 3.1 (ver también [3] pág. 112), existe un único morfismo

$$\theta_t : \widehat{G_t} \longrightarrow \widetilde{G_t} \subset \widetilde{G},\ \mathcal{T}^t_Q(x_Q) \longmapsto \theta_t(\mathcal{T}^t_Q(x_Q)) = \sigma^t_Q(x_Q)$$

tal que $\theta_t \circ \mathcal{T}^t_Q = \sigma^t_Q$ para todo $Q \in \mathfrak{V}(t)$. Además,

$$(\theta_t \times \theta_t)^{-1}(V^{\varepsilon}_{d_{\widetilde{G}}}) = (\phi_t \times \phi_t)(W^{\varepsilon}_{\ell_t(d_{\widetilde{G}})}),$$

donde

$$\phi_t : \dot{\bigcup_{Q \in \mathfrak{V}(t)}} \mathcal{P}(Q) = Z_t \longrightarrow \widehat{G_t},\ x_Q \longmapsto \phi_t(x_Q) = \mathcal{T}^t_Q(x_Q)$$

$$\ell_t : \mathcal{C}_{\widetilde{G}} \longrightarrow \mathcal{C}_t,\ d_{\widetilde{G}} \longmapsto \ell_t(d_{\widetilde{G}})$$

$$\mathcal{C}_t = \overleftarrow{\lim_{Q \in \mathfrak{V}(t)}}\, \mathcal{C}_{\mathcal{P}(Q)} \quad \text{y}$$

$$W^{\varepsilon}_{\ell_t(d_{\widetilde{G}})} = \{(x_Q, y_P) \in Z_t \times Z_t : (\exists S \in \mathfrak{V}(t) \text{ con } S \subset Q \cap P)$$

$((f_{QS}(x_Q), f_{PS}(y_P)) \in V^{\varepsilon}_{d_S})\}$, donde $d_S = \pi^t_S(\ell_t(d_{\widetilde{G}}))$. Recordemos que en la Construcción 3.1 se tomó $X_Q = \mathcal{P}(Q)$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{P}(Q)} = \mathcal{C}_Q$.

Definición de ξ: sea $Q \in \mathcal{A}$. Definimos

$$\xi_Q : \widehat{\mathcal{P}}(Q) \longrightarrow \mathcal{P}_{\widetilde{p}}(Q),\ \widehat{x_Q} \longmapsto \xi_Q(\widehat{x_Q}) = \widetilde{x_Q}.$$

Veamos que ξ_Q es uniformemente continua. En efecto:

$$\begin{aligned}
&(\xi_Q \times \xi_Q)^{-1}(U^{\varepsilon,\widetilde{p}}_{d_{\widetilde{G}},Q}) \\
&= \{(\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in \widehat{\mathcal{P}}(Q) \times \widehat{\mathcal{P}}(Q) : (\widetilde{x_Q}, \widetilde{y_Q}) \in U^{\varepsilon,\widetilde{p}}_{d_{\widetilde{G}},Q}\} \\
&= \{(\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in \widehat{\mathcal{P}}(Q) \times \widehat{\mathcal{P}}(Q) : (\forall s \in Q)\big((\theta_s \times \theta_s)(\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_Q}(s)) \in V^{\varepsilon}_{d_{\widetilde{G}}}\big)\} \\
&= \{(\widehat{x_Q}, \widehat{y_Q}) \in \widehat{\mathcal{P}}(Q) \times \widehat{\mathcal{P}}(Q) : (\forall s \in Q)\big((\widehat{x_Q}(s), \widehat{y_Q}(s)) \in (\phi_s \times \phi_s)(W^{\varepsilon}_{\ell_s(d_{\widetilde{G}})})\big)\} \\
&= U^{\varepsilon}_{d_{\widetilde{G}},Q}.
\end{aligned}$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{P}}(Q) \arrow[r, "\xi_Q"] \arrow[d, "f_{QP}"'] & \mathcal{P}_{\widetilde{p}}(Q) \arrow[d, "f_{QP}"] \\
\widehat{\mathcal{P}}(P) \arrow[r, "\xi_P"] & \mathcal{P}_{\widetilde{p}}(P)
\end{tikzcd}$$

Sea $\widehat{x_Q} \in \widehat{\mathcal{P}}(Q)$, entonces

$$(f_{QP} \circ \xi_Q)(\widehat{x_Q}) = f_{QP}(\widetilde{x_Q}) = \widetilde{x_Q}|_P.$$

Por otra lado,

$$(\xi_P \circ f_{QP})(\widehat{x_Q}) = \xi_P(\widehat{x_Q}|_P) = \xi_P(\widehat{f_{QP}(x_Q)}) = \widetilde{f_{QP}(x_Q)}.$$

Como ψ es transformación natural entonces

$$\widetilde{x_Q}|_P = f_{QP}(\psi_Q(x_Q)) = \psi_P(f_{QP}(x_Q)) = \widetilde{f_{QP}(x_Q)},$$

con lo cual se establece la afirmación.

Con estos resultados tenemos todas las hipótesis del Teorema 4.6: dos campos uniformes $(\widehat{G}, \widehat{p}, T)$ y $(\widetilde{G}, \widetilde{p}, T)$, este último separado, un prehaz $\widehat{\mathcal{P}}$ de secciones locales en el campo $(\widehat{G}, \widehat{p}, T)$ pleno por Teorema 4.2, un prehaz $\mathcal{P}_{\widetilde{p}}$ se secciones locales en $(\widetilde{G}, \widetilde{p}, T)$ y finalmente un morfismo de prehaces uniformes $\xi : \widehat{\mathcal{P}} \dot{\longrightarrow} \mathcal{P}_{\widetilde{p}}$. Por lo tanto, existe

$$h : \widehat{G} \longrightarrow \widetilde{G}, \ \widehat{x_Q}(t) \longmapsto h(\widehat{x_Q}(t)) = \xi_Q(\widehat{x_Q}t) = \widetilde{x_Q}(t)$$

función continua con las topologías de campo uniforme (tubos alrededor de secciones) y uniformemente continua en cada fibra (morfismo de prehaces), puesto que el campo se construye como unión de fibras disjuntas; donde $x_Q \in \mathcal{P}(Q)$ y $t \in Q \in \mathfrak{V}(t)$. De esta forma se llega a

$$h \circ \widehat{x_Q} = \widetilde{x_Q}, \quad \forall x_Q \in \mathcal{P}(Q) \text{ con } Q \in \mathcal{A}$$

y con esto se termina la demostración. ☑

Referencias

[1] Adámek, Jiří, et al, *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*, Wiley & Sons, New York, N.Y., 1989.

[2] Bautista, Serafín, *Co-completez de Categorias de Espacios Uniformes y Procesos de Lacalización, Tesis de Maestría*, Programa de Posgrado en Matemáticas, Universidad Nacional, Bogotá, 1995.

[3] Bautista, Serafín & Varela, Januario, *On the co-completeness of the category of Hausdorff uniform spaces*, Rev. Colombiana Mat. **31** (1997), 109-114.

[4] Bourbaki, Nicolas, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[5] De Castro, Rodrigo, *Localización en Campos de Espacios Uniformes, Tesis de Maestría*, Programa de Posgrado en Matemáticas, Universidad Nacional, Bogotá, 1985.

[6] De Castro, Rodrigo & Varela, Januario, *Localization in bundles of uniform spaces*, Rev. Colombiana Mat. **24** (1990), 103–112.

[7] J. Dauns & K. H. Hofmann, *Representations of rings by sections*, Mem. Amer. Math. Soc. **83** (1968).

[8] K. H. Hofmann, *Representation of algebras by continuous sections*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 291-373.

[9] Mac Lane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, N.Y., 1971.

[10] Varela, Januario, *On the existence of uniform spaces*, Rev. Colombiana Mat. **29** (1995), 95–102.

(Recibido en octubre de 2000)

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, COLOMBIA

e-mail: `sebadi@matematicas.unal.edu.co`
e-mail: `jvarelab13@yahoo.com`