Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 35 (2001), páginas 51–59

Sobre la derivada Schwarziana de aplicaciones conformes hiperbólicamente convexas

DIEGO MEJÍA*
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

CHRISTIAN POMMERENKE
Technische Universität Berlin

ABSTRACT. A conformal mapping f of the unit disk $\mathbb{D}$ into itself is called hyperbolically convex if the non-euclidean segment between any two points of $f(\mathbb{D})$ also belongs to $f(\mathbb{D})$. In this paper we prove that the Schwarzian derivative for these functions $S_f = (f''/f')' - (1/2)(f''/f')^2$ verifies the inequality $\left(1-|z|^2\right)^2 |S_f(z)| < 2.54$.

RESUMEN. Se dice que una transformación conforme f del disco unidad $\mathbb{D}$ del plano complejo en sí mismo es hiperbólicamente convexa si el segmento de recta hiperbólica entre cualquier par de puntos de $f(\mathbb{D})$ está también contenido en $f(\mathbb{D})$. En este trabajo probamos que la derivada Schwarziana de estas funciones, $S_f = (f''/f')' - (1/2)(f''/f')^2$, satisface la desigualdad $\left(1-|z|^2\right)^2 |S_f(z)| < 2.54$.

Keywords and phrases. Hyperbolically convex functions. Univalent functions. Schwarzian derivative.

2000 Classification. Primary: 30C45. Secondary: 30C75.

---

*Parcialmente financiado por Colciencias.

1. Introducción

Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad y $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ se llama *hiperbólicamente convexa* o, simplemente, *h-convexa*, si f es analítica e inyectiva y si

$$w_1, w_2 \in f(\mathbb{D}) \Rightarrow C(w_1, w_2) \subset f(\mathbb{D}),$$

donde $C(w_1, w_2)$ es el arco entre w_1 y w_2 del círculo ortogonal a $\mathbb{T}$ que pasa por estos puntos.

El estudio sistemático de las funciones h-convexas se inició con el artículo de Ma y Minda [MaMi 94] y se continuó posteriormente en [MePo 98], [MaMi 99], [MePo 00] y [MePoVa 01].

La clase de las funciones h-convexas es invariante bajo las transformaciones

$$f \to \varphi \circ f \circ \psi \quad \text{con } \varphi, \psi \in \text{Möb}(\mathbb{D}), \tag{1.1}$$

donde Möb($\mathbb{D}$) es el grupo de transformaciones de Möbius de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$. Esta invarianza permite estudiar muchos problemas sobre funciones h-convexas en la clase de funciones h-convexas normalizadas de la forma $f(z) = \alpha z + \cdots$, $\alpha > 0$. En particular el problema objeto de este artículo que describimos a continuación.

El operador diferencial más simple que es invariante bajo transformaciones de Möbius es la derivada Schwarziana

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2. \tag{1.2}$$

Si $\varphi, \psi \in$ Möb($\mathbb{D}$) y $z \in \mathbb{D}$ entonces

$$\left(1 - |z|^2\right)^2 |S_{\varphi \circ f \circ \psi}(z)| = \left(1 - |\psi(z)|^2\right)^2 |S_f(\psi(z))|. \tag{1.3}$$

Ma y Minda [MaMi 99] demostraron que las funciones h-convexas verifican

$$\left(1 - |z|^2\right)^2 |S_f(z)| \leq 3 \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Nuestro resultado principal representa una mejora sustancial a esta estimativa aunque el método empleado no permite obtener la cota óptima.

Teorema. *Si f es h-convexa entonces la derivada Schwarziana verifica*

$$\left(1 - |z|^2\right)^2 |S_f(z)| < 2.54 \quad \text{para } z \in \mathbb{D}. \tag{1.4}$$

Un ejemplo importante [MePo 00] relacionado con la estimativa de la derivada Schwarziana es la función

$$\begin{aligned} f(z) &= \tan\left[\alpha \int_0^z \left(1 - 2\varsigma^2 \cos 2\theta + \varsigma^4\right)^{-1/2} d\varsigma\right] \\ &= \alpha\left(z + \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \cos 2\theta\right) z^3 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $0 < \theta < \pi/2$ y

$$\alpha = \frac{\pi}{2K(\cos\theta)}, \quad K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{1.6}$$

la integral elíptica completa del primer tipo. La función f es h-convexa y $\partial f(\mathbb{D})$ consiste de dos ortocírculos simétricos con respecto al eje real y dos arcos de $\mathbb{T}$.

De (1.2) y (1.5) se obtiene que $S_f(0) = 2(\alpha^2 + \cos 2\theta)$ y se conjetura en [MePo 00] que

$$\max_{0<\theta<\pi/2} 2(\alpha^2 + \cos 2\theta) \approx 2.383 \tag{1.7}$$

es la cota óptima para la derivada Schwarziana. Véase la Observación 1 más adelante.

Se sigue de (1.4) y (1.7) que

$$2.38 < \max_f \max_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^2 |S_f(z)| < 2.54, \tag{1.8}$$

donde f recorre las funciones h-convexas. Más adelante, en la Proposición 1, se demuestra que tales máximos existen.

2. Resultados auxiliares

En esta sección derivamos varios resultados que son necesarios en la demostración del teorema.

Proposición 1. *Existe una función h-convexa de la forma*

$$f(z) = \alpha\left(z + bz^2 + b_3z^3 + \cdots\right), \quad \alpha > 0,\ b \geq 0 \tag{2.1}$$

tal que

$$|S_f(0)| = \max\left\{\max_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^2 |S_g(z)| : g \text{ es h-convexa}\right\}. \tag{2.2}$$

Demostración. Sean $z_n \in \mathbb{D}$ y g_n funciones h-convexas tales que

$$\left(1-|z_n|^2\right)^2 |S_{g_n}(z_n)| \to M, (n \to \infty),$$

donde M es la cantidad obtenida al reemplazar los máximos en la expresión (2.2) por supremos. Escojamos $\varphi_n, \psi_n \in$ Möb($\mathbb{D}$) de tal modo que $\varphi_n(g_n(z_n)) = 0, \psi_n(0) = z_n$. Entonces, por (1.1), las funciones

$$f_n = \varphi_n \circ g_n \circ \psi_n$$

son h-convexas y verifican $f_n(0) = \varphi_n(g_n(z_n)) = 0$. Podemos suponer que $f_n \to f^*$ $(n \to \infty)$ localmente uniformemente en $\mathbb{D}$. Entonces, de (1.3), deducimos que

$$|S_{f_n}(0)| = \left(1 - |z_n|^2\right)^2 |S_{g_n}(z_n)| \to |S_{f^*}(0)|,$$

lo cual implica que $|S_{f^*}(0)| = M$. Finalmente, puesto que $f^*(0) = 0$, podemos escoger β y γ adecuadamente de tal manera que la función $f(z) = e^{i\beta} f^*\left(e^{i\gamma} z\right)$ tiene la forma (2.1) y satisface la conclusión (2.2). ☑

Proposición 2. *Sea f una función h-convexa de la forma* (2.1). *Entonces*

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} > s \equiv \frac{1}{2\alpha}\left(\left[3\alpha^2 + (1 + b/2)^2\right]^{1/2} - (1 + b/2)\right)^{1/2}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta que $b \leq 1 - \alpha^2$ [MaMi 94, Th.5] es fácil verificar que $1/2 \leq s \leq 1$. Por lo tanto (2.3) representa una mejora de la cota $\operatorname{Re}[zf'(z)/f(z)] > 1/2$ que, junto con la invarianza (1.1), es el fundamento de los resultados obtenidos en [MePo 00].

Demostración. Como $\partial f(\mathbb{D})$ es una curva de Jordan rectificable [BF 83, Th. 2], la función f' está en la clase H^1 de Hardy [Po 92, p. 134] y, por lo tanto, también lo está la función $zf'(z)/f(z)$. En consecuencia, es suficiente probar que

$$\operatorname{Re}[\varsigma f'(\varsigma)/f(\varsigma)] \geq s \quad (2.4)$$

para todo $\varsigma \in \mathbb{T}$ en donde la derivada angular $f'(\varsigma)$ exista y sea finita.

Si $f(\varsigma) \in \mathbb{T}$ entonces $\operatorname{Re}[\varsigma f'(\varsigma)/f(\varsigma)] = |f'(\varsigma)| \geq 1$ por el lema de Julia y Wolff [Po 92, p. 82]. Puesto que $s \leq 1$ podemos entonces suponer que $f(\varsigma) \in \mathbb{D}$.

Sean C el ortocírculo tangente a $\partial f(\mathbb{D})$ en $f(\varsigma)$ y G la componente de $\mathbb{D} \setminus C$ que contiene al origen. Por ser f h-convexa se tiene que $f(\mathbb{D}) \subset G$. Ahora bien, para $\lambda \in \mathbb{T}$ y $0 < \beta < 1$ adecuados, la función

$$\lambda k_\beta(z) = 2\lambda\beta z / \left(1 - z + \sqrt{(1 - z)^2 + 4\beta^2 z}\right) = \beta z + \beta\left(1 - \beta^2\right) z^2 + \cdots \quad (2.5)$$

es una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre G [MaMi 94][MePo 00, Ex. 5.1]. Por lo tanto existe una aplicación conforme h de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ tal que

$$f(z) = \lambda k_\beta(h(z)) \quad (z \in \mathbb{D}). \quad (2.6)$$

Ya que $f(0) = k_\beta(0) = 0$, la función h tiene la forma

$$h(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

Teniendo en cuenta (2.1) y (2.6) obtenemos las relaciones

$$\alpha = \lambda\beta c_1, \quad b = \frac{c_2}{c_1} + \left(1 - \beta^2\right) c_1.$$

Si escribimos $\gamma = |c_1|$, deducimos las desigualdades

$$\left(1-\beta^2\right)\gamma - b \leq \left|\frac{c_2}{c_1}\right| \leq 2\,(1-\gamma)\,,$$

la última de la cuales resulta del hecho de que $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es inyectiva [Pick 17] [Po 75, p. 99]. De aquí resulta que

$$3\gamma - \alpha^2/\gamma \leq 2 + b$$

lo cual, junto con el hecho de que $\alpha = \beta\gamma < \gamma$, implica la estimativa

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{2+b}{\alpha}\right)^2 > \left(\frac{2+b}{\alpha}\right)^2 + \frac{2+b}{\alpha} + 3$$

de la cual concluimos que

$$\frac{\alpha^2}{\gamma} \geq \sqrt{3\alpha^2 + (2+b)^2 + \alpha\,(2+b)} - (2+b)\,.$$

Esta desigualdad implica que

$$\frac{\alpha^2}{\gamma} > \sqrt{3\alpha^2 + (1+b/2)^2} - (1+b/2)\,. \tag{2.7}$$

Finalmente, se sigue de (2.6) que

$$\varsigma\frac{f'(\varsigma)}{f(\varsigma)} = \omega\frac{k_\beta'(\omega)}{k_\beta(\omega)}.\varsigma\frac{h'(\varsigma)}{h(\varsigma)} \quad \text{con} \quad \omega = h(\varsigma)\,.$$

Puesto que $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $h(\varsigma) \in \mathbb{T}$, por el lema Julia y Wolff el último factor de la anterior ecuación es real y positivo. Además, ya que $f(\varsigma) \in C$, la parte real del primer factor es $= 1/2$ [MePo 00, Ex. 5.1]. Por consiguiente

$$\operatorname{Re}\left[\varsigma f'(\varsigma)/f(\varsigma)\right] = \frac{1}{2}\left|h'(\varsigma)\right| \geq \frac{1}{2}\left|h'(0)\right|^{-1/2} = \frac{1}{2}\gamma^{-1/2},$$

pues $|h'(0)|\,|h'(\varsigma)|^2 \geq 1$ [PoVa 00, Th. 3.1]. Luego (2.4) se sigue de (2.7). ☑

A continuación derivamos una cota para la derivada Schwarziana que sólo es válida en un cierto rango de α.

Proposición 3. *Sea f una función h-convexa de la forma* (2.1) *que satisface*

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} > s \quad (z \in \mathbb{D})\,, \quad \frac{1}{2} \leq s < 1. \tag{2.8}$$

Si $1 \leq p \leq 2$ y $\alpha \geq \exp\left[-p(1-s)/s\right]$ entonces

$$|S_f(0)| \leq 6\,(1-s)\left(1-\alpha^{2/(1-s)}\right) - \frac{3\,(2-p)\,s}{p\,(1-s)}b^2. \tag{2.9}$$

Demostración. Sea $t = 1/(1-s)$. La función

$$h(z) = \frac{f(z)^t}{z^{t-1}} = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{2.10}$$

es estelar pues, debido a (2.8),

$$\operatorname{Re} z\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{1}{1-s}\left(\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} - s\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Por otra parte, por el lema de Schwarz, $|h(z)| \leq |z| < 1$.

A partir de (2.1) y (2.10) obtenemos las relaciones

$$c_1 = \alpha^t, \quad \frac{c_2}{c_1} = tb, \quad \frac{c_3}{c_1} = t\left(b_3 + \frac{t-1}{2}b^2\right).$$

Además, puesto que $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es univalente, se tiene [ScTa 69][Po 75, p.99]

$$\operatorname{Re}\left[\left(\frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right)e^{2i\vartheta}\right] \leq 1 - |c_1|^2 - \frac{1}{\log 1/|c_1|}\left(\operatorname{Re}\left[\frac{c_2}{c_1}e^{i\vartheta}\right]\right)^2$$

para $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Por consiguiente

$$t\operatorname{Re}\left[\left(b_3 - \frac{1+t}{2}b^2\right)e^{2i\vartheta}\right] \leq 1 - \alpha^{2t} - \frac{t}{\log 1/\alpha}\left(\operatorname{Re}\left[be^{i\vartheta}\right]\right)^2.$$

Ahora escogemos ϑ debidamente y escribimos $u+iv = be^{i\vartheta}$. Entonces deducimos la desigualdad

$$t\left|b_3 - b^2\right| \leq 1 - \alpha^{2t} + t\frac{t-1}{2}\left(u^2 - v^2\right) - \frac{t}{\log 1/\alpha}u^2.$$

Ya que $t = 1/(1-s)$ y $u^2 + v^2 = b^2$, se obtiene de lo anterior que

$$\begin{aligned}\left|b_3 - b^2\right| \leq (1-s)\left(1 - \alpha^{2/(1-s)}\right) &- \frac{(2-p)sb^2}{2p(1-s)} \\ &+ \left(\frac{s}{p(1-s)} - \frac{1}{\log 1/\alpha}\right)u^2 - \frac{(p-1)s}{p(1-s)}v^2.\end{aligned}$$

El coeficiente de u^2 es ≤ 0 si $\alpha \geq \exp\left[-p(1-s)/s\right]$. Por lo tanto se sigue la desigualdad (2.9) teniendo en cuenta que

$$|S_f(0)| = 6\left|b_3 - b^2\right| \tag{2.11}$$

por (1.2) y (2.1). ☑

En seguida derivaremos una cota para la derivada Schwarziana válida para todos los valores de α pero que, en general, es peor que la suministrada por la Proposición 3.

Proposición 4. *Sea f una función h-convexa de la forma* (2.1) *que verifica la condición* (2.8). *Entonces*

$$|S_f(0)| \leq 6(1-s) - 3b^2. \tag{2.12}$$

Demostración. La función

$$\frac{1}{1-s}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - s\right) = 1 + 2p_1 z + 2p_2 z^2 + \cdots$$

tiene parte real positiva debido a (2.8). Por lo tanto [Po 75, p. 166] tenemos

$$\left|p_2 - p_1^2\right| \leq 1 - \left|p_1\right|^2. \tag{2.13}$$

Deducimos de (2.1) las relaciones

$$p_1 = \frac{b}{2(1-s)}, \quad p_2 = \frac{1}{1-s}\left(b_3 - \frac{b^2}{2}\right)$$

que, en conjunto con (2.13) y el hecho de que $s \geq 1/2$, permiten obtener la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{\left|b_3 - b^2\right|}{1-s} &\leq \left|p_2 - p_1^2\right| + (2s-1)\left|p_1\right|^2 \\ &\leq 1 + 2(s-1)\left|p_1\right|^2 = 1 - \frac{b^2}{2(1-s)} \end{aligned}$$

la cual implica (2.12) por (2.11). ☑

3. Demostración del teorema

Debido a la Proposición 1 podemos suponer que f tiene la forma

$$f(z) = \alpha\left(z + bz^2 + b_3 z^3 + \cdots\right), \quad \alpha > 0, \quad b \geq 0.$$

Se sabe [MaMi 94, Th. 5] que

$$0 < \alpha \leq 1, \quad b \leq 1 - \alpha^2. \tag{3.1}$$

Ahora definimos:

$$s = \frac{1}{2\alpha}\left(\left[3\alpha^2 + (1 + b/2)^2\right]^{1/2} - (1 + b/2)\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

y deducimos de la Proposición 2 que la condición (2.8) se verifica para el anterior valor de s. Por lo tanto, de la Proposición 3, obtenemos la desigualdad

$$\left|S_f(0)\right| \leq 6(1-s)\left(1 - \alpha^{2/(1-s)}\right) - \frac{3(2-p)s}{p(1-s)}b^2 \tag{3.3}$$

si $\alpha \geq \exp\left[-p(1-s)/s\right]$, mientras que de la Proposición 4 concluimos que

$$\left|S_f(0)\right| \leq 6(1-s) - 3b^2 \tag{3.4}$$

para $0 < \alpha < \exp\left[-p(1-s)/s\right]$.

El resto de la demostración es un procedimiento numérico. Los primeros experimentos indican que el valor $p = 1.31$ da buenos resultados, razón por la cual lo escogemos para hacer las estimativas en (3.3) y (3.4).

Usamos una malla de longitud 0.0001 para α y b en el rango determinado por (3.1). Primero calculamos s de acuerdo con (3.2) y después acotamos $\left|S_f(0)\right|$

utilizando (3.3) y (3.4). El valor más grande que encontramos en estos cálculos es

$$|S_f(0)| \approx 2.53325,$$

el cual se obtiene para $\alpha = 0.3766$, $b = 0.0989$. ☑

Observaciones.

1. En [MePo 00] se estudia el problema de estimar

$$\sigma(\alpha) = \text{máx}\{|S_f(0)| : f(z) = \alpha z + \cdots \text{ es h-convexa}\}$$

y se demuestra que

$$\sigma(\alpha) \leq 3(1-\alpha^4) \quad \text{para} \quad e^{-2} \leq \alpha \leq 1, \tag{3.5}$$

$$\sigma(\alpha) < 2 + \alpha^{2-\varepsilon} \quad \text{para} \quad 0 < \alpha < \alpha_0(\varepsilon),\ \varepsilon > 0. \tag{3.6}$$

Los resultados demostrados arriba mejoran (3.5) pero no (3.6).

La conjetura en [MePo 00] afirma que

$$\sigma(\alpha) = 2(\alpha^2 + \cos 2\theta), \quad \alpha = \frac{\pi}{2K(\cos\theta)}$$

con igualdad para la función impar definida por (1.5). El valor máximo de $2(\alpha^2 + \cos 2\theta)$ se obtiene para $\theta \approx 5\pi/72$, $\alpha \approx 0.218$.

Nuestro método puede ser aplicado a funciones h-convexas impares. En este caso $b = 0$ y se obtiene

$$\text{máx}\{|S_f(0)| : f \text{ es h-convexa e impar}\} < 2.50.$$

Escogimos $p = 1.38$ y el valor más grande encontrado es 2.49101 para $\alpha = 0.3754$.

2. En la Proposición 3 sólo utilizamos que la función h definida por (2.10) es univalente y acotada por 1, mientras que en la Proposición 4 sólo se usó que tal h es estelar. Nunca usamos entonces el hecho de que h es estelar y acotada por 1. Esto indica que nuestro método no es en realidad muy bueno para obtener estimativas más precisas.

Referencias

[BF 83] B. Brown Flinn, *Hyperbolic Convexity and level sets of analytic functions*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 831–841.

[MaMi 94] W. Ma and D. Minda, *Hyperbolically convex functions*, Ann. Polon. Math. **60** (1994), 81–100.

[MaMi 99] W. Ma and D. Minda, *Hyperbolically convex functions II*, Ann. Polon. Math. **71** (1999), 273–285.

[MePo 98] D. Mejía and Ch. Pommerenke, *Sobre aplicaciones conformes hiperbólicamente convexas*, Rev. Colombiana Mat. **32** (1998), 29–43.

[MePo 00] D. Mejía and Ch. Pommerenke, *On Hyperbolically Convex Functions*, J. Geom. Analysis **10** (2000), 361–374.

[MePoVa 01] D. Mejía, Ch. Pommerenke and A. Vassil'ev, *Distortion Theorems for hyperbolically convex functions*, Complex Variables **44** (2001), 117–130.

[Pick 17] G. Pick, *Über die konforme Abbildung eines Kreises auf eines schlichtes und zugleich beschränktes Gebiete*, S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien **126** (1917), 247–263.

[Po 75] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Götingen, 1975.

[Po 92] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer, 1992.

[PoVa 00] Ch. Pommerenke and A. Vassil'ev, *On bounded univalent functions and the angular derivative*, Sklodowska **54** (2000), 79–106.

[ScTa 69] M. Schiffer and O. Tammi, *On the coefficient problem for bounded univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 461–474.

(Recibido en octubre de 2000)

Diego Mejía
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Apartado Aéreo 3840, Medellín, COLOMBIA
e-mail: dmejia@perseus.unalmed.edu.co

Christian Pommerenke
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135, D-10623
Berlin, ALEMANIA (Deutschland)
e-mail: pommeren@math.tu-berlin.de