Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 47(2013)1, páginas 29-38

Ecuación de Lazer-Solimini con retraso dependiente del estado: una demostración alternativa

Lazer-Solimini Equation with State-Dependent Delay: An Alternative Demonstration

Alexander Gutiérrez

Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

Resumen. En este trabajo se hace una demostración alternativa de los resultados [5], donde se estudió la existencia de soluciones T-periódicas para una familia de ecuaciones del tipo Lazer-Solimini con retraso dependiente del estado. Las herramientas utilizadas en la demostración son una combinación de cotas a priori y grado de coincidencia.

Palabras y frases clave. Ecuación de Lazer-Solimini, retraso dependiente del estado, grado de coincidencia, soluciones periódicas.

2010 Mathematics Subject Classification. 34K13, 34C25.

Abstract. In this paper, an alternative proof of results in [5] is given; there, the existence of T-periodic solutions of a family of Lazer-Solimini equations with state-dependent delay is studied. The tools used in the proof are a combination of a priori bounds and coincidence degree.

Key words and phrases. Lazer-Solimini equation, State-dependent delay, Coincidence degree, Periodic solution.

1. Introducción

Las singularidades no lineales surgen de forma natural cuando se consideran fuerzas gravitatorias o electromagnéticas. Por ejemplo, si se considera un espacio unidimensional, la ecuación que describe el movimiento de una partícula con carga eléctrica bajo la influencia de un campo eléctrico generado por otra partícula con carga eléctrica situada en el origen y fuerza externa p es

$$x'' \pm \frac{1}{x^{\alpha}} = p(t), \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

El signo $+$ indica que las partículas tienen cargas contrarias, mientras el signo $-$ indica que las partículas tienen la misma carga. Así que en la terminología clásica, se dice que la ecuación con el signo $+$ (resp. $-$) tiene una singularidad atractiva (resp. repulsiva). A menudo, simplemente se habla del caso atractivo y repulsivo respectivamente.

Cuando $\alpha \geq 1$ en (1), se suele decir que se satisface la condición de "fuerza fuerte", termino que fue introducido por Gordon [4]. Al definir el potencial asociado como

$$G(x) = \int_x^1 \frac{1}{s^{\alpha}} ds,$$

se dirá que $\frac{1}{x^{\alpha}}$ tiene una singularidad fuerte en cero si

$$\lim_{x \to 0^+} G(x) = +\infty.$$

En otro caso, cuando el límite es finito, se dice que la singularidad es débil. La naturaleza de la fuerza externa $p(t)$ determina la dinámica de la ecuación. Cuando $p(t)$ es periódica, Lazer y Solimini en [7] encontraron condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones periódicas para el caso atractivo. Si denotamos el valor medio de p por $\overline{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\, dt$. Entonces después de integrar (1) sobre todo un período se hace evidente que una condición necesaria para la existencia de soluciones periódicas positivas (resp. negativas), en el caso atractivo, es $\overline{p} > 0$ (resp. $\overline{p} < 0$). La suficiencia de la condición se logra usando cotas a priori y teoría de grado. Mientras que para en el caso repulsivo, Lazer y Solimini [7] construyeron un ejemplo donde el valor medio de $p(t)$ es negativo y sin embargo no existen soluciones periódicas cuando $0 < \alpha < 1$, es decir, cuando la singularidad es débil. Más adelante se presentará una condición suficiente que garantiza la existencia de soluciones periódicas en el caso repulsivo con singularidad débil.

De otro lado, cuando se habla de las fuerzas gravitacionales, la introducción de los efectos relativistas tiene sentido. Una de las consecuencias conocidas de la Relatividad Especial es que el estado dependiente tiene retrasos cuando se consideran la evolución temporal en sistemas donde interactúan campos eléctricos y magnéticos con cargas en movimiento, ver [2, 10]. Motivados por esta reflexión, proponemos el estudio de un análogo de las ecuaciones Lazer-Solimini con retraso dependiente del estado

$$x'' + g[x](t) = p(t), \tag{2}$$

$$x'' - g[x](t) = -p(t), \tag{3}$$

donde $p \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ y

$$g[x](t) \equiv g\big(x\big(t - \tau\big(t, x(t)\big)\big)\big),$$

siendo $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función continua no negativa y $T-$periódica en la primera variable. Finalmente, $g \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función continua que verifica las siguientes hipótesis

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} g(x) &= 0, \\ \lim_{x \to 0^+} g(x) &= +\infty. \end{aligned} \tag{H1}$$

Nuestro interés se centra en las soluciones T-periódicas y positivas de (2) y (3). Así que en el caso repulsivo (3), un signo menos se ha añadido a p por conveniencia.

Los sistemas con retraso surgen en forma natural en una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, el estado dependiente de retraso juega un papel clave en una gran variedad de modelos biológicos y mecánicos (véase por ejemplo [11] y la bibliografía consignada allí). Aunque las ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden con retrasos han sido consideradas en algunos artículos recientes (véase, por ejemplo [3, 6, 8] sólo por citar algunos de ellos), sin embargo, hasta donde mi conocimiento lo permite, parece que [5] es la primera publicación que incluye las singularidades en los sistemas con retraso.

Ahora se presentan condiciones suficientes para la existencia de soluciones periódicas para las ecuaciones (2) y (3). El objetivo es proporcionar una demostración alternativa de los resultados presentados en [5] para ecuaciones con retraso dependiente del estado.

Teorema 1. *Supongamos que g satisface (H1) y*

$$g(x) > \overline{p} > 0 \quad \textit{para cada} \quad x \leq T\|p^+\|_1. \tag{H2}$$

Entonces (2) *(resp.* (3)*) tiene al menos una solución $T-$periódica positiva.*

En el caso atractivo, podemos probar un resultado diferente.

Teorema 2. *Supongamos que g satisface (H1) y $\overline{p} > 0$. Si $p(t)$ esta acotada superiormente y*

$$\limsup_{x \to 0^+} \tau(t, x) < \frac{\min\big\{v \in \mathbb{R}_+ : g(v) = \|p^+\|_\infty\big\}}{\|p^+\|_1}, \quad \textit{uniformemente en } t, \tag{H3}$$

entonces (2) *tiene al menos una solución $T-$periódica positiva.*

Como se menciono en [5], parece hasta ahora que el teorema 1 es un resultado nuevo incluso para la ecuación sin retraso. Mientras que el teorema 2 es una generalización del resultado clásico de Lazer-Solimini, que se recupera al tomar $\tau(t,x) \equiv 0$. La novedad de la condición (H2) es que sigue siendo válida para cualquier retraso y tipo de singularidad, pues (H2) tiene que ver con la fortaleza de la singularidad y garantiza la existencia de soluciones T-periódicas en el caso repulsivo con singularidad débil. Por otro lado, (H3) está relacionada con el comportamiento del retraso cerca de la singularidad. Sin embargo, podría tener algún interés desde el punto de vista de la Física, ya que en la Relatividad Especial el retraso esperado debe ser proporcional a la distancia de la partícula a la singularidad, que es del tipo $\tau(t,x) = x$, lo que satisface trivialmente (H3).

En adelante, se consideran los espacios de Banach $X = C^1\big(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}\big)$ con la norma habitual en C^1 y $Z = L^1\big(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}\big)$ con la norma L^1. Dada $f \in Z$, $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$ denota la parte positiva y $f^- = \text{máx}\{-f, 0\}$ la parte negativa de f. Así que se pasa a hacer una breve descripción de como se desarrolló el artículo. En el apartado 2 se presentan algunas cotas a priori para una familia homotópica conveniente. Finalmente, en el apartado 3 se presenta una demostración alternativa de los resultados principales, ahora usando el teorema de continuación de Mawhin [9].

2. Cotas a priori

En esta sección se muestran algunos lemas que serán usados en las demostraciones de los principales resultados. Se consideran las siguientes ecuaciones homotópicas

$$x'' + \lambda g[x](t) = \lambda p(t), \tag{4}$$
$$x'' - \lambda g[x](t) = -\lambda p(t). \tag{5}$$

El siguiente lema, debido a Lazer-Solimini [7], será de gran utilidad.

Lema 3 ([7, Proposition 3.1])**.** *Sea $x \in X$ una función $T-$periódica tal que $x'' \in Z$. Entonces,*

$$\|x'\|_\infty \leq \|(x'')^\pm\|_1.$$

Con este lema se puede encontrar una cota uniforme para x' cuando x es una solución $T-$periódica de (2) o (3).

Lema 4. *Si x es una solución $T-$periódica de* (4) *o* (5) *y g satisface (H1) entonces*

$$\|x'\|_\infty \leq \|p^+\|_1.$$

Demostración. Sea $x \in X$ una solución $T-$periódica de (4). Entonces, por el lema 3, se tiene que

$$\begin{aligned}\|x'\|_\infty &< \big\|(x'')^+\big\|_1 = \big\|\lambda\big(p(t) - g[x](t)\big)^+\big\|_1 \\ &\leq \|\lambda p^+\|_1 \leq \|p^+\|_1.\end{aligned}$$

La demostración en el caso que x sea una solución $T-$periódica de (5) es análogo, teniendo en cuenta que $\|x'\|_\infty \leq \left\|(x'')^-\right\|_1 = \left\|(-x'')^+\right\|_1$. ☑

Ahora se encuentran cotas superiores para soluciones $T-$periódicas de las ecuaciones (4) o (5).

Lema 5. *Supóngase que g satisface (H1) y $\overline{p} > 0$. Entonces existe una constante positiva M que no depende de λ tal que*

$$x(t) < M, \ \text{para todo } t,$$

para toda solución $T-$periódica de (4) o (5).

Demostración. Se denota con x una solución $T-$periódica de (4) o (5). Integrando a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^T g[x](t)\, dt &= \lambda \int_0^T p(t)\, dt. \\ &= \lambda T \overline{p}.\end{aligned}$$

Debido a la continuidad de las funciones involucradas, existe $t_1 \in]0, T[$ tal que

$$g[x](t_1) = g\big(x\big(t_1 - \tau\big(t_1, x(t_1)\big)\big)\big) = \overline{p}.$$

Al definir $t_{0,\lambda} := t_1 - \tau\big(t_1, x(t_1)\big)$ y usar el lema 4, se obtiene

$$x(t) - x(t_{0,\lambda}) = \int_{t_{0,\lambda}}^t x'(s)\, ds \leq T\|x'\|_\infty \leq T\|p^+\|_1,$$

para todo $t \in]t_{0,\lambda}, t_{0,\lambda}+T[$. De otro lado, (H1) y $\overline{p} > 0$ implican que el conjunto $\{v \in \mathbb{R}^+ : g(v) = \overline{p}\}$ es acotado, cerrado y no vacío, esto en consecuencia indica que el conjunto anterior alcanza un máximo, que se notará C^*. Entonces,

$$x(t) \leq T\|p^+\|_1 + x(t_{0,\lambda}) < T\|p^+\|_1 + C^* + 1 =: M;$$

es obvio que esta constante no depende de λ. ☑

Finalmente, se muestran unas cotas inferiores para soluciones $T-$periódicas de (4) o (5).

Lema 6. *Bajo las condiciones del teorema 1, existe $\varepsilon_1 > 0$ que no depende de $\lambda \in [0, 1]$ tal que*

$$x(t) > \varepsilon_1, \quad \text{para todo} \quad t,$$

para toda solución $T-$periódica de (4) o (5).

Demostración. Argumentando en forma similar como en el lema 5, se obtiene

$$x(t) = \int_{t_{0,\lambda}}^{t} x'(s)\,ds + x(t_{0,\lambda}),$$

donde $g\big(x(t_{0,\lambda})\big) = \overline{p}$. De las condiciones (H1) y (H2) se obtiene $C_* = \text{mín}\big\{v \in \mathbb{R}^+ : g(v) = \overline{p}\big\}$. Entonces aplicando el lema 4 una vez más,

$$x(t) = \int_{t_{0,\lambda}}^{t} x'(s)\,ds + x(t_{0,\lambda}) \geq C_* - T\|p^+\|_1 > \frac{C_* - T\|p^+\|_1}{2} =: \varepsilon_1 > 0. \quad ☑$$

Lema 7. *Bajo las condiciones del teorema 2, existe* $\varepsilon_2 > 0$ *que no depende de* $\lambda \in [0,1]$ *tal que*

$$x(t) > \varepsilon_2, \quad \textit{para todo} \quad t,$$

para toda solución $T-$*periódica de* (4).

Demostración. Sea x una solución $T-$periódica de (4) y supóngase que $x(t_0) = \underset{t\in[0,T]}{\text{mín}}\, x(t)$. Entonces,

$$\lambda g[x](t_0) \leq x''(t_0) + \lambda g[x](t_0) = \lambda p_\lambda(t_0) \leq \|p^+\|_\infty.$$

Ahora, al usar la hipótesis (H1) se obtiene

$$x\big(t_0 - \tau\big(t_0, x(t_0)\big)\big) \geq D_* := \text{mín}\big\{v \in \mathbb{R}^+ : g(v) = \|p^+\|_\infty\big\} > 0. \tag{6}$$

De un lado, si se llama $\widetilde{\varepsilon} := D_* - \|p^+\|_1 \limsup_{x\to 0^+} \tau(t,x)$, por la condición $(H3)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$D_* - \|p^+\|_1 \tau(t,x) \geq \widetilde{\varepsilon} > 0, \qquad \text{para todo} \quad 0 < x \leq \varepsilon. \tag{7}$$

Ahora, usando el teorema del valor medio y el lema 4 se tiene

$$\begin{aligned} x\big(t_0 - \tau\big(t_0, x(t_0)\big)\big) - x(t_0) &\leq x'(\zeta)\tau\big(t_0, x(t_0)\big) \\ &\leq \|x'\|_\infty \tau\big(t_0, x(t_0)\big) \\ &\leq \|p^+\|_1 \tau\big(t_0, x(t_0)\big). \end{aligned}$$

De otro lado, usando (6) se tiene que

$$\begin{aligned} x(t_0) &\geq x\big(t_0 - \tau\big(t_0, x(t_0)\big)\big) - \|p^+\|_1 \tau\big(t_0, x(t_0)\big) \\ &\geq D_* - \|p^+\|_1 \tau\big(t_0, x(t_0)\big) > 0. \end{aligned}$$

Bien, si $x(t_0) \leq \varepsilon$, combinando (7) con la desigualdad anterior, se obtiene $x(t_0) \geq \widetilde{\varepsilon}$. La demostración se finaliza tomando

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\,\text{mín}\{\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}\}. \quad ☑$$

3. Demostración alternativa de los resultados principales

Primero se define el operador lineal

$$\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \to Z, \quad \mathcal{L}(x) := x''.$$

donde $D(\mathcal{L}) := \{x \in X : \ x' \text{ es absolutamente continua en } \mathbb{R}\}$.

Se tiene que $\mathcal{L}$ es un operador de Fredholm de índice cero. Además

$$\ker \mathcal{L} = \{x \in X : x \text{ es una función constante}\} \cong \mathbb{R},$$
$$\operatorname{Im} \mathcal{L} = \left\{ h \in Z : \int_0^T h(t)\, dt = 0 \right\}.$$

Si se define la proyección $\mathcal{Q} : Z \to Z$ por

$$\mathcal{Q}(y) := \frac{1}{T} \int_0^T y(s)\, ds,$$

entonces $\mathcal{Q}$ satisface $\ker \mathcal{Q} = \operatorname{Im} \mathcal{L}$. Ahora se define el operador lineal

$$L_{\mathcal{P}} := \mathcal{L}|_{D(\mathcal{L}) \cap \ker \mathcal{P}} : D(\mathcal{L}) \cap \ker \mathcal{P} \to \operatorname{Im} \mathcal{L}.$$

Así se tiene que $L_{\mathcal{P}}$ es invertible y la inversa

$$L_{\mathcal{P}}^{-1} : \operatorname{Im} \mathcal{L} \to D(\mathcal{L}) \cap \ker \mathcal{P}$$

es continua y tal que

$$L_{\mathcal{P}}^{-1} = \int_0^T G(t, s) y(s)\, ds,$$

donde

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{s(T - t)}{T}, & 0 \le s < t; \\ \dfrac{t(T - s)}{T}, & t \le s \le T. \end{cases}$$

El operador de Nemitskii $\mathcal{N} : X^+ \to Z$, $X^+ = \{x' \in X : x(t) > 0 \text{ para todo } t\} \subset X$, definido como

$$\mathcal{N}(x) = g[x] - p(t).$$

En consecuencia, la existencia de una solución $T-$periódica de (2) o (3) es equivalente a resolver la ecuación

$$\mathcal{L}(x) + \mathcal{N}(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \mathcal{L}(x) - \mathcal{N}(x) = 0,$$

respectivamente. La diferencia con respecto a los resultados presentados en [5] es que en la demostración no se usará el resultado de Capietto-Mawhin-Zanolin [1] sino el teorema de continuación de Mawhin o grado de coincidencia, que se presenta a continuación:

Teorema 8 ([9])**.** *Supóngase que X, Y son dos espacios de Banach y $L : D(L) \subset X \to Y$, es un operador de Fredholm de índice cero. Más aún, $\Omega \subset X$ es un conjunto abierto y $N : \overline{\Omega} \to Z$ un operador L-compacto en $\overline{\Omega}$. Si las condiciones:*

(1) $Lx + \lambda Nx \neq 0$, *para todo* $(x, \lambda) \in \big[(D(L) \diagup \ker L) \cap \partial\Omega\big] \times]0, 1[$,

(2) $Nx \notin Im\ L$ *para todo* $x \in \ker L \cap \partial\Omega$, *y*

(3) $\deg(QN|_{\ker L}, \Omega \cap \ker L) \neq 0$, *donde* $Q : Z \to Z$ *es una proyección continua tal que* $\ker Q = \operatorname{Im} L$

se satisfacen, entonces la ecuación $Lx + Nx = 0$ tiene al menos una solución en $D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Así que los teoremas 1 y 2 estarán demostrados si las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 8 se satisfacen. Ahora se presenta la demostración del teorema 1.

Demostración de los teoremas 1 y 2. Sea $\Omega \subset X$ un conjunto acotado y abierto definido por

$$\Omega = \big\{x \in X : \varepsilon_1 < x(t) < M \quad \text{y} \quad \|x'(t)\|_\infty < M_1, \forall t \in \mathbb{R}\big\},$$

donde ε_1, M son las constantes positivas que se fijaron en los lemas 5, 6 y $M_1 := \|p^+\|_1$.

Por un lado tenemos que $\mathcal{N}$ es $\mathcal{L}$-compacto, pues $\mathcal{K}_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}\mathcal{N} = L_{\mathcal{P}}^{-1}(I - \mathcal{Q})$ es compacto, $\mathcal{Q}\mathcal{N}$ es continua y $\mathcal{Q}\mathcal{N}(\overline{\Omega})$ es un subconjunto acotado de Z. De otro lado, la condición 1 del teorema 8 se satisface gracias a los lemas 4, 5 y 6 junto con la definición de Ω. Ahora si se define el conjunto $\Omega_1 = \{x \in X|_{x \in \ker \mathcal{L}}, \mathcal{N}(x) \in \operatorname{Im} \mathcal{L}\}$ se tiene que todo $x \in \Omega_1$ es constante $x \equiv c$ y $g(c) = \overline{p}$. Por consiguiente, $\Omega_1 \subset \Omega$ y la condición 2 se cumple. De otro lado, $x \equiv$ constante y positivo pertenece a $\ker \mathcal{L}$ y

$$\mathcal{Q}\mathcal{N}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g[x] - \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = g(x) - \overline{p},$$

entonces usando la condición (H2) se tiene que $g(\varepsilon_1) - \overline{p} > 0$ y $g(M) - \overline{p} < 0$. En consecuencia,

$$\deg\big(\mathcal{Q}\mathcal{N}(x)|_{\ker \mathcal{L}}, \Omega \cap \ker \mathcal{L}\big) = -1.$$

Así se tiene que la condición 3 también se verifica. Por lo tanto, (2) tiene al menos una solución en $\overline{\Omega}$, que es una solución $T-$periódica positiva. La demostración del resultado en el caso atractivo (2) es análoga, sólo cambia el signo del grado a 1. En forma análoga se demuestra el resultado obtenido en el teorema 2. ☑

Referencias

[1] Anna Capietto, Jean Mawhin, and Fabio Zanolin, *Continuation Theorems for Periodic Perturbations of Autonomous Systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 41–72.

[2] Rodney D. Driver, *A Two-Body Problem of Classical Electrodynamics: The One-Dimensional Case*, Ann. Phys. **21** (1963), 122–142.

[3] Bo Du, Chuanzhin Bai, and Xiangkui Zhao, *Problems of Periodic for a Type of Duffing Equation with State-Dependent Delay*, J. Comput. Appl. Math. **233** (2010), 2807–2813.

[4] William B. Gordon, *Conservative Dynamical Systems Involving Strong Forces*, Trans. Amer. Math. Soc. **204** (1975), 113–135.

[5] Alexander Gutiérrez and Pedro J. Torres, *The Lazer-Solimini Equation with State-Dependent Delay*, Appl. Math. Lett. **25** (2012), 643–647.

[6] Dunyuan Hao and Shiwang Ma, *Semilinear Duffing Equations Crossing Resonance Points*, J. Differential Equations **133** (1997), 98–116.

[7] Alan C. Lazer and Sergio Solimini, *On Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations with Singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), no. 1, 109–114.

[8] Shiwang Ma, Zhicheng Wang, and Jianshe Yu, *Coincidence Degree and Periodic Solutions of Duffing Equations*, Nonlinear Anal. **34** (1998), 443–460.

[9] Jean Mawhin, *Equivalence Theorems for Nonlinear Operator Equations and Coincidence Degree Theory for Some Mappings in Locally Convex Topological Vector Spaces*, J. Difference Equations Appl. **12** (1972), 610–636.

[10] Stephen. P. Travis, *A One-Dimensional Two-Body Problem of Classical Electrodynamics*, SIAM J. Appl. Math. **28** (1975), no. 3, 611–632.

[11] Hans-Otto Walther, Ferenc Hartung, Tibor Krisztin, and Jianhong Wu, *Functional Differential Equations with State-Dependent Delay: Theory and Applications*, Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, A. Canada, P. Drbek, A. Fonda (Eds.), vol. 3, Elsevier, North-Holland, 2006, pp. 435–545.

(Recibido en julio de 2012. Aceptado en enero de 2013)

Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
AA: 97 - Código postal: 660003
Risaralda, Colombia
e-mail: alexguti@utp.edu.co