Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXVI (1992) pgs. 39- 48

SULLA MISURABILITÁ DELLA FAMIGLIA DI TERNE DI RETTE CONCORRENTI NELLO SPAZIO AFFINE A_3

di

Giulio Santoro

SOMMARIO. Si dimostra il teorema: la famiglia delle terne di rette concorrenti nello spazio affine A_3 è non misurabile.

§1. Introduzione.

Sia G_r un gruppo di trasformazioni di Lie ad r parametri di equazioni

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r), \quad (i = 1, \dots, n) \tag{a}$$

che portano un punto $A(x_1, \dots, x_n)$ in un punto $A'(y_1, \dots, y_n)$ di uno spazio X_n ad n dimensioni, essendo $a_1, \dots, a_r$ parametri ed f_i funzioni analitiche.

Come è noto, una funzione $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ è detta *invariante integrale* di G_r se risulta

$$\int_{A_x} \dots \int \Phi(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n = \int_{A_y} \dots \int \Phi(y_1, \dots, y_n)\, dy_1, \dots, dy_n$$

per ogni insieme di punti $A_x \subset X_n$ per il quale ha senso l'integrale.

Affinchè una funzione Φ sia invariante integrale di un G_r, è necessario [1] e sufficiente [5] che essa sia soluzione *non nulla* del sistema seguente (detto sistema *di Deltheil*):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi_h^i\, \Phi\right)=0, \quad (h=1,\ldots,r),$$

dove

$$\xi_h^i=\left(\frac{\partial y_i}{\partial a_h}\right)_0$$

sono i coefficienti delle trasformazioni infinitesime di G_r.

Un gruppo G_r si dice [6] misurabile se ammette un invariante integrale *unico*, a meno di costanti moltiplicative.
Sia data in X_n una famiglia $\mathfrak{F}_q$ di varietà V_p di dimensione p definita dalle equazioni:

$$F_j(x_1,\ldots,x_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_q)=0, \quad (j=1,\ldots,n-p), \tag{b}$$

essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ parametri ed F_j funzioni analitiche.

L'insieme di tutte le trasformazioni continue T di coordinate di X_n, che lasciano globalmente invariante $\mathfrak{F}_q$, forma [5] un gruppo $\mathfrak{G}$ di Lie.

L'insieme delle trasformazioni $S \in \mathfrak{G}$, che mutano in sè ogni varietà $V_p \in \mathfrak{F}_q$, forma [5] un gruppo g che è un sottogruppo invariante di $\mathfrak{G}$.

Il gruppo quoziente $G = \mathfrak{G}/g$, che ha la proprietà di lasciare globalmente invariante $\mathfrak{F}_q$, senza contenere trasformazioni (oltre a quella identica) che lascino invariante ogni $V_p \in \mathfrak{F}_q$, dicesi [5] *gruppo massimo di invarianza* di $\mathfrak{F}_q$ e i suoi sottogruppi *gruppi di invarianza.*

Sia G_r, definito dalle (a), un gruppo di invarianza della famiglia $\mathfrak{F}_q$, definita dalle (b).

Applicando G_r alla $\mathfrak{F}_q$ si ottiene la varietà

$$F_j(y_1,\ldots,y_n;\beta_1,\ldots,\beta_q)=0, \quad (j=1,\ldots,n-p),$$

con

$$\beta_k=g_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_q;a_1,\ldots,a_r), \quad (k=1,\ldots,q). \tag{c}$$

Le trasformazioni (c) formano [5] un gruppo H_r isomorfo a G_r, detto *gruppo associato* a G_r rispetto a $\mathcal{F}_q$.

Se H_r è misurabile, $\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_q)$ essendo il suo unico invariante integrale, allora l'espressione differenziale

$$|\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_q)| d\alpha_1 \wedge ... \wedge d\alpha_q$$

dicesi [6] *misura elementare* della famiglia $\mathcal{F}_q$, definita dalle (b).

Una famiglia di varietà può ammettere diversi gruppi di invarianza, epperò può ammettere diverse misure.

Una famiglia di varietà dicesi [6] misurabile se ammette una misura unica.

Circa la misurabilità di una famiglia di varietà, sussistono i seguenti teoremi (detti *prima e seconda condizione di Stoka*):

Prima Condizione [6]: se H_r, associato al gruppo massimo di invarianza, è misurabile, la famiglia è misurabile.

Seconda condizione [7]: se H_r non è misurabile, mentre due suoi sottogruppi sono misurabili ed hanno diversa misura, allora la famiglia è non misurabile.

Per ulteriori dettagli vedasi [6].

§2. Sulla misurabilità della famiglia di terne di rette concorrenti nello spazio affine A_3.

Scopo di questa nota è dimostrare il seguente teorema: la famiglia delle terne di rette concorrenti nello spazio affine A_3 è non misurabile.

Sia A_3 lo spazio affine riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxyz. Si consideri in questo spazio la famiglia delle terne di rette concorrenti, G_1, G_2, G_3, cioè tali che sia $G_1 \cap G_2 \cap G_3 = P(a, b, c)$.

Se

$$\begin{cases} x = p_i z + r_i \\ y = q_i z + s_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3$$

sono le equazioni di tre rette generiche, per l'ipotesi $G_1 \cap G_2 \cap G_3 = P(a, b, c)$ esse diventano:

$$\begin{cases} x = p_i z + a - p_i c \\ y = q_i z + b - q_i c \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

e danno le equazioni della famiglia di varietà.

Lo spazio dei parametri è uno spazio di dimensione 9 di coordinate: $a, b, c, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$.

Il gruppo massimo di invarianza di questa famiglia è il gruppo affine di equazioni:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4 \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + \beta_4 \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + \gamma_4 \end{cases} \qquad (2)$$

con

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Applicando alla famiglia (1) il gruppo (2), si ottiene la varietà:

$$\begin{cases} x' = p'_i z' + a' - p'_i c' \\ y' = q'_i z' + b' - q'_i c' \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1')$$

dove è

$$\begin{cases} a' = A(G - C) : (A - E) + C\,; \quad b' = B(G - C) : (A - E) + D; \\ c' = \dfrac{G - C}{A - E} \\ p'_1 = A;\ p'_2 = E;\ p'_3 = H;\ q'_1 = B;\ q'_2 = F;\ q'_3 = I \end{cases} \qquad (3)$$

con

$A = [(\beta_3 - q_1\gamma_3)(\alpha_2 - p_1\gamma_2) - (\alpha_3 - p_1\gamma_3)(\beta_2 - q_1\gamma_2)]$:

$$: [(\alpha_1 - p_1\gamma_1)(\beta_2 - q_1\gamma_2) - (\beta_1 - q_1\gamma_1)(\alpha_2 - p_1\gamma_2)]$$
$$B = [(\beta_3 - q_1\gamma_3)(\alpha_1 - q_1\gamma_2) - (\alpha_3 - p_1 \gamma_3)(\beta_1 - q_1\gamma_2)] :$$
$$: [(\alpha_2 - p_1\gamma_2)(\beta_1 - q_1\gamma_1) - (\beta_2 - q_1\gamma_2)(\alpha_1 - q_1\gamma_1)]$$
$$C = [(a - p_1c + p_1\gamma_4 - \alpha_4)(\beta_2 - q_1\gamma_2) - (b - q_1c + q_1\gamma_4 - \beta_4)(\alpha_2 - p_1\gamma_2)]:$$
$$: [(\alpha_1 - p_1\gamma_1)(\beta_2 - q_1\gamma_2) - (\beta_1 - q_1\gamma_1)(\alpha_2 - p_1\gamma_2)]$$
$$D = [(a - p_1c + p_1\gamma_4 - \alpha_4)(\beta_1 - q_1\gamma_1) - (b - q_1c + q_1\gamma_4 - \beta_4)(\alpha_1 - q_1\gamma_1)] :$$
$$: [(\alpha_2 - p_1\gamma_2)(\beta_1 - q_1\gamma_1) - (\beta_2 - q_1\gamma_2)(\alpha_1 - q_1\gamma_1)]$$
$$E = [(\beta_3 - q_1\gamma_3)(\alpha_2 - p_1\gamma_2) - (\alpha_3 - p_1 \gamma_3)(\beta_2 - q_1\gamma_2)] :$$
$$: [(\alpha_1 - p_1\gamma_1)(\beta_2 - q_1\gamma_2) - (\beta_1 - q_1\gamma_1)(\alpha_2 - p_1\gamma_2)]$$
$$F = [(\beta_3 - q_2\gamma_3)(\alpha_1 - q_2\gamma_1) - (\alpha_3 - p_2 \gamma_3)(\beta_1 - q_2\gamma_1)]:$$
$$: [(\alpha_2 - p_2\gamma_2)(\beta_1 - q_2\gamma_1) - (\beta_2 - q_2\gamma_2)(\alpha_1 - q_2\gamma_1)]$$
$$G = [(a - p_2c + p_2\gamma_4 - \alpha_4)(\beta_2 - q_2\gamma_2) - (b - q_2c + q_2\gamma_4 - \beta_4)(\alpha_2 - p_2\gamma_2)] :$$
$$: [(\alpha_1 - p_2\gamma_1)(\beta_2 - q_2\gamma_2) - (\beta_1 - q_2\gamma_1)(\alpha_2 - p_2\gamma_2)]$$
$$H = [(\beta_3 - q_3\gamma_3)(\alpha_2 - p_3\gamma_2) - (\alpha_3 - p_3 \gamma_3)(\beta_2 - q_3\gamma_2)]:$$
$$: [(\alpha_1 - p_3\gamma_1)(\beta_2 - q_3\gamma_2) - (\beta_1 - q_3\gamma_1)(\alpha_2 - p_3\gamma_2)]$$
$$I = [(\beta_3 - q_3\gamma_3)(\alpha_1 - q_3\gamma_1) - (\alpha_3 - p_3 \gamma_3)(\beta_1 - q_3\gamma_1)] :$$
$$: [(\alpha_2 - p_3\gamma_2)(\beta_1 - q_3\gamma_1) - (\beta_2 - q_3\gamma_2)(\alpha_1 - q_3\gamma_1)] .$$

Le (3) rappresentano le equazioni del gruppo associato nello spazio dei parametri della famiglia (1) al gruppo massimo di invarianza (2).

I coefficienti delle trasformazioni infinitesime del gruppo (3) sono raccolti nella seguente tabella dove $L = p_1 - q_1$ e gli spazi rappresentano zeri:

ξ_j^i	i: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
j: 1	$-a$	$-b$	$-c$	-1								
2					$-a$	$-b$	$-c$	-1	$-aL$	$-bL$	$-cL$	$-L$
3									$-a$	$-b$	$-c$	-1
4	$-p_1$	$-q_1$	-1						p_1^2	p_1q_1	p_1	
5	$-p_2$	$-q_2$	-1						p_2^2	p_2q_2	p_2	
6	$-p_3$	$-q_3$	-1						p_3^2	p_3q_3	p_3	
7					$-p_1$	$-q_1$	-1		p_1q_1	q_1^2	q_1	
8					$-p_2$	$-q_2$	-1		p_2q_2	q_2^2	q_2	
9					$-p_3$	$-q_3$	-1		p_3q_3	q_3^2	q_3	

Il corrispondente sistema di Deltheil ha quali prima, quinta e nona equazione rispettivamente le seguenti:

$$\sum p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = -4\Phi, \quad \sum q_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = -4\Phi, \quad \sum \left(p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right) = -5\Phi,$$

le quali implicano $-8\Phi = -5\Phi$, ossia

$$\Phi = 0. \tag{4}$$

Pertanto il gruppo (3) non è misurabile, epperò la famiglia (1) può risultare misurabile o no.

Si consideri allora la trasformazione

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{cases} \tag{2'}$$

che è un sottogruppo di (2).

Applicando alla famiglia (1) il sottogruppo (2'), si otterranno le equazioni del sottogruppo (3'), identiche a quelle del gruppo (3), salvo quanto concerne le condizioni

$$\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0.$$

I coefficienti delle trasformazioni infinitesime del gruppo (3') si ricaveranno da quelli del gruppo (3), sopprimendo le colonne 4ª, 8ª, 12ª.

Il sistema di Deltheil corrispondente sarà quindi:

$$\begin{cases} a \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \Sigma p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = b \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \Sigma q_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = -4\Phi \\ b \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \Sigma q_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = c \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = a \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \Sigma p_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = c \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = 0 \\ -a \left(L \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \right) + \Sigma p_i^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} + \Sigma\, p_i q_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = -3 \Sigma\, p_i \Phi \\ -b \left(L \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \right) + \Sigma p_i q_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} + \Sigma\, q_i^2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = (L - 3 \Sigma\, q_i) \Phi \\ -c \left(L \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \right) + \Sigma p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} + \Sigma\, q_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = -5\Phi \end{cases},$$

dove $L = p_1 - q_1$ ed $i = 1, 2, 3$.

Integrando questo sistema, si ottiene, k essendo una constante moltiplicativa ed $i = 1, 2, 3$, la soluzione

$$\Phi = k M \begin{vmatrix} a^2 M - c \sum p_i^2 M_i & ab M - c \sum p_i q_i M_i \\ ab M - c \sum p_i q_i M_i & b^2 M - c \sum q_i^2 M_i \end{vmatrix} \qquad (4')$$

con

$$M = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ a & b & c \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Pertanto il sottogruppo (3') è misurabile.

Si consideri ora la trasformazione

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_4 \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_4 \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + \gamma_4 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1, \qquad (2'')$$

che è un sottogruppo di (2).

Aplicando alla famiglia (1) il sottogruppo (2''), si otterranno le equazioni del sottogruppo (3''), identiche a quelle del gruppo (3), salvo quanto concerne le condizioni

$$\alpha_3 = \beta_3 = 0 \quad \text{ed} \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1.$$

I coefficienti delle trasformazioni infinitesime del sottogruppo (3'') si ricaveranno da quelli del gruppo (3), sopprimendo le colonne 1ª, 3ª, 7ª; mentre la colonna 6ª si muterà nella seguente:

$$\overset{6}{\xi}_1 = a; \quad \overset{6}{\xi}_2 = -b; \quad \overset{6}{\xi}_3 = 0; \quad \overset{6}{\xi}_4 = p_1; \quad \overset{6}{\xi}_5 = p_2;$$
$$\overset{6}{\xi}_6 = p_3; \quad \overset{6}{\xi}_7 = -q_1; \quad \overset{6}{\xi}_8 = -q_2; \quad \overset{6}{\xi}_9 = -q_3.$$

Il sistema di Deltheil corrispondente sarà quindi:

$$\Sigma\, q_i \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} = \Sigma\, p_i \frac{\partial\Phi}{\partial q_i} = \Sigma\left(p_i \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} - q_i \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{\partial\Phi}{\partial b} = \frac{\partial\Phi}{\partial c} = 0$$

$$\Sigma\left(p_i^2 \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} + p_i q_i \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right) = -3\,\Sigma\, p_i\, \Phi$$

$$\Sigma\left(p_i q_i \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} + q_i^2 \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right) = (L - 3\,\Sigma\, q_i)\, \Phi$$

$$\Sigma\left(p_i \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right) = -5\, \Phi$$

dove $L = p_1 - q_1$ ed $i = 1, 2, 3$.

Integrando questo sistema, si ottiene, k essendo una costante moltiplicativa, la soluzione

$$\Phi = k \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} \qquad (4'')$$

essendo

$$N_i = P\, q_i^2 + p_i q_i Q, \quad \text{dove } i = 1, 2, 3,$$

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 q_1 & -p_2 q_2 & -p_3 q_3 \end{vmatrix}$$

Pertanto il sottogruppo (3") è misurabile, e la sua misura è diversa da quella di (3'), essendo (4") ≠ (4').

Ricapitolando: il gruppo (3) non è misurabile, ma due suoi sottogruppi, (3') e (3"), sono misurabili ed hanno misure diverse. Pertanto, stante la seconda condizione di Stoka, si conclude con il teorema: la famiglia delle terne di rette concorrenti nello spazio affine A_3 è non misurabile.

REFERENCIAS

[1] DELTHEIL, R., *Probabilités Géométriques,* Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] GUERRERO, A. B., *Geometría integral de los grupos ST(n-1) y $ST_1(n+1)$ en el espacio proyectivo P_n,* Revista Colombiana de Mat., 24 (1990).

[3] SANTALO, L. A., *Two applications of the integral geometry in affine and proyective spaces,* Publ. Math. Debrecen, 7 (1960).

[4] SANTALO, L. A., *Integral geometry in proyective and affine spaces,* Ann. of Math., 51, 2 (1950).

[5] STOKA, M. I., *Masura unei multimi de varietati dintr-un spatiu R_n,* Bul. St. Acad. R. P. R., 7 (1955).

[6] STOKA, M. I., *Géométrie Integrale,* Mem. Sci. Math. 165, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[7] STOKA, M. I., *Geometria integrale in uno spazio euclideo E_n,* Boll. Un. Mat. Ital. serie III, 13, 4 (1958)

[8] STOKA, M. I., *Géométrie integrale dans l'espace projectif P_n,* Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari, fasc. 172, (1979).

Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano,
Piazza Leonardo da Vinci, 32
20133 Milano, Italy

(Recibido en septiembre de 1990, la versión revisada en agosto de 1991)