Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXVI (1992) pgs. 49- 54

SOBRE LOS ESPACIOS K-M*

por

José R. Morales

§1. Introducción

A. R. Lovaglia, [2] inventó los espacios de Banach localmente uniformemente convexos, (LUR) en el año de 1955; K. Fan y I. Glicksberg, [1] en el mismo año introduce los espacios KR, que son una generalización de los espacios 2R introducidos por Smulyan en 1939; en 1988, Nan Chao-Xun y Wang Jian-Hua [5] introducen los espacios L-KR que son una generalización de los espacios LUR y KR.
El autor en [3] introduce los espacios K-M que son una generalización de la propiedad (M) introducida por B. B. Panda y O. P. Kapoor, [4] y también conocida como (CL UR) denotada así por L. P. Vlasov, [6]. En este trabajo probamos que la propiedad (K-M) implica la propiedad (H), y en espacios estrictamente convexos la propiedad (K-M) implica L-KR.

§2. Preliminares

Sea $(E, \| . \|)$ un espacio normado real. Por B_E y S_E denotamos la bola unitaria de E y la esfera de E respectivamente.

* Trabajo financiado por el C. D. C. H. T. ULA. Proyecto C-410-90.

A continuación daremos las definiciones que usaremos más adelante.

DEFINICIÓN 1, [3]. Sea $k \geq 1$ un entero. Se dice que un espacio de Banach E satisface la propiedad (K-M) Si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $\{x_n\}$ en B_E tales que

$$\lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = 1$$

entonces $\{x_n\}$ es compacto en B_E.

DEFINICIÓN 2, [5]. Sea $k \geq 1$ un entero. Un espacio de Banach E se dice que es un espacio L-KR, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en E y $x \in E$ tales que $x \in S_E$

$$\lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = 1 \quad y \quad \|x_n\| \to 1$$

entonces $x_n \to x$.

DEFINICIÓN 3. Un espacio de Banach E satisface la propiedad (H) si para todo $x \in S_E$ y $\{x_n\}$ en E tales que $\|x_n\| \to 1$ y $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces $x_n \to x$.

DEFINICIÓN 4. Decimos que un espacio de Banach E es estrictamente convexo, (R) si para cada $x, y \in S_E$ tales $\| x + y\| = 2$ entonces $x = y$.

DEFINICIÓN 5. Un espacio de Banach E satisface la propiedad (S) si para cada sucesión $\{\varnothing_n\} \subset B_{E^*}$ y $x \in S_E$ tales que $\varnothing_n(x) \to 1$, entonces $\{\varnothing_n\}$ es compacto en B_{E^*}.

§3 Resultados

TEOREMA 1. *Sea* E *un espacio de Banach con la propiedad*

(K-M). *Entonces* E *satisface la propiedad* (H).

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en E y $x \in S_E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to 1$. Sea $\emptyset \in S_{E^*}$ tal que $\emptyset(x) = 1$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x \in S_E$. Entonces,

$$k+1 = \lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \emptyset\left(x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right) \leq \lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \inf \|\emptyset\| \left\|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right\|$$

$$\leq \lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \sup \left\|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right\|$$

$$\leq k+1.$$

Por tanto,

$$\lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \|x + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\| = k+1,$$

y como E posee la propiedad (K-M) entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente. Además cualquier subsucesión de $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Esto nos muestra, en vista de $x_n \xrightarrow{w} x$, que $x_n \to x$. Así el teorema es probado. ■

De acuerdo a las respectivas definiciones no es difícil ver que L-KR implica la propiedad (K-M), y el recíproco se cumple si le añadimos una condición más al espacio, en este sentido tenemos la siguiente caracterización.

TEOREMA 2. *Sea* E *un espacio de Banach estrictamente convexo,* (R). *Entonces* E *satisface la propiedad* (K-M) *si y sólo si* E *es un espacio* L-KR.

Demostración. Supongamos que E satisface la propiedad (K-M) y queremos mostrar que E es un espacio L-KR. En efecto, sea $x \in S_E$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión, en E tal que

$$\lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \left\|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right\| = k+1 \quad \text{y} \quad \|x_n\| \to 1.$$

Como E satisface la propiedad (K-M) entonces $\{x_n\}$ es compacto en

B_{E}. En consecuencia existe un $y \in S_E$ y una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_j} \to y$. Obviamente tenemos que $\|x + ky\| = k + 1$, y por tanto $\|x + y\| = 2$, ya que

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \|x + ky - (k - 1)y\| \\ &\geq \|x + ky\| - (k - 1)\|y\| \\ &= (k + 1) - (k - 1) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Ahora como E es (R) entonces $x = y$. Esto nos muestra que $\{x_n\}$ tiene un único punto límite x; por tanto $x_n \to x$, y así hemos mostrado que E es un espacio L-KR. ■

TEOREMA 3. *Sea* E *un espacio de Banach. Si* E* *posee la propiedad* (K-M), *entonces* E *satisface la propiedad* (S).

Demostración. Sean $x \in S_E$ y $\{\varnothing_n\}$ una sucesión en B_{E^*} y $\varnothing_n(x) \to 1$. Por el teorema de Banach, existe $\varnothing_0 \in S_{E^*}$ tal que $\varnothing_0(x) = 1$. Así,

$$\begin{aligned}k + 1 &= \lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} (\varnothing_{n_1} + \ldots + \varnothing_{n_k} + \varnothing_0)(x) \\ &\leq \lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \inf \|\varnothing_{n_1} + \ldots + \varnothing_{n_k} + \varnothing_0\| \, \|x\| \\ &\leq \lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \sup \|\varnothing_{n_1} + \ldots + \varnothing_{n_k} + \varnothing_0\| \\ &\leq k + 1,\end{aligned}$$

por tanto,

$$\lim_{n_1, \ldots, n_k \to \infty} \|\varnothing_{n_1} + \ldots + \varnothing_{n_k} + \varnothing_0\| = k + 1.$$

Como E* tiene la propiedad (K-M), entonces $\{\varnothing_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Esto nos muestra que E satisface la propiedad (S). ■

Ahora, si E* posee la propiedad (S), entonces E puede no satisfacer la propiedad (K-M), ver [4]. ■

Agradecimientos. Doy gracias al referee por sus comentarios respecto al presente trabajo.

REFERENCIAS

[1] FAN, K., and GLICKSBERG, I., *Fully convex normed linear spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 41 (1955), 947-953.

[2] LOVAGLIA, A. R., *Locally uniformly convex Banach Spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. 78, (1955), 225-238.

[3] MORALES, J. R., *Sobre los espacios L-KR,* Notas de Matemáticas, por aparecer.

[4] PANDA, B. B., and KAPOOR, O. P., *A generalization of local uniform convexity of the norm,* J. Math. Anal. Appl. 52, (1975) 300-308.

[5] CHAO-XUN, N., and JIAN-HUA, W., *On the LK-UR and L-KR spaces,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1988), 104, 521-526.

[6] VLASOV, L. P., *Chebyshev sets and approximately convex sets,* Mat. Zametki 2 (1967) 191-200.

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela.

(Recibido en noviembre de 1990, la versión revisada en noviembre de 1991)