Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXVI (1992) pgs. 69- 94

LOS ESPACIOS ${}^1C_n^*$ (UNA CLASE DE ESPACIOS CONFORMES-EUCIDEOS) Y SU MODELACIÓN EN ESPACIOS EUCLIDEOS

por

José Ricardo Arteaga Bejarano

RESUMEN. Este artículo trata de una clase de espacios conforme-euclídeos de dimensión n y codimensión 1, donde se define el factor conforme como resultado de una exigencia de tipo geométrico. Para este propósito se definió una relación entre rectas del plano proyectivo de dimensión n + 1 y los factores conformes. Luego se establecen los siguientes resultados: Existe una relación entre las superficies de nivel del factor conforme y las superficies de Ricci. Estas superficies relacionadas son de la misma clase, es decir, tienen la misma curvatura y las mismas características geométricas. Para que las superficies de nivel asociadas al factor conforme sean ombílicas es necesario y suficiente que satisfagan una condición muy especial en el espacio proyectivo. Se encuentran los grupos fundamentales para algunos representantes de esta clase.

§1. Espacios conformes

1.1. Espacios conformes pseudoeuclídeos de dimensión n y codimensión uno, como son los que vamos a tratar, son espacios pseudoeuclídeos a los cuales se les ha agregado puntos o rectas o planos o espacios de dimensión n - 1 al infinito, denominados también impropios; en este artículo los llamaremos complementarios. Los elementos geométricos fundamentales son las esferas.

Por ejemplo, para n = 3, una circunferencia es el corte o línea de intersección de dos esferas, una recta es una circunferencia que pasa por un punto impropio del plano complementario, un plano es una esfera que contiene un punto impropio y un punto puede considerarse como una esfera de radio nulo, es decir, un cono isotrópico. En otras palabras un espacio conforme y un espacio proyectivo guardan una estrecha relación.

1.2. La relación existente entre los espacios proyectivos y los espacios conformes fue establecida por F. Klein [4], cuando mostró que el grupo fundamental de la geometría conforme es isomorfo a un subgrupo del grupo fundamental de la geometría proyectiva.

1.3. Escogiendo coordenadas conformes (cartesianas) en un espacio conforme euclídeo de dimensión n y codimensión 1, ${}^1C_n$, el elemento lineal (cuadrado de la distancia) se puede escribir así:

$$ds^2 = \theta^{-2} \overset{0}{g}_{ij}\, dx^i dx^j \tag{1}$$

$$ds^2 = e^{-2\mu} \overset{0}{g}_{ij}\, dx^i dx^j \tag{2}$$

donde
a) θ es una función de $X(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n)$, la cual se llama el *factor conforme*, al igual que μ, del espacio ${}^1C_n$.
b) $\overset{0}{g}_{ij}$ es el tensor métrico del espacio pseudoeuclídeo ${}^1C_n$.
NOTA. En todo el artículo a no ser que se especifique lo contrario los índices latinos varían entre 1 y n.

§2. Relación entre el tensor de curvatura del espacio ${}^1C_n$ y las superficies de segundo orden del espacio de Lobatchevski L_{N-1}

2.1. El tensor de curvatura de un espacio ${}^1C_n$ tiene la siguiente estructura:

$$R_{ijkl} = 4g_{[i/[k}S_{l]/j]} \tag{3}$$

donde g_{ij} es el tensor métrico del espacio ${}^{1}C_n$. Los corchetes [ ] significan la operación alternación: $a_{[ij]} = (1/2)(a_{ij} - a_{ji})$ y las barras significan que lo que está en su interior permanece fijo cuando actúa la alternación. Además S_{ij} es un tensor simétrico definido por:

$$S_{ij} = -(\mu_{j;i} - \mu_i\mu_j) - \frac{1}{2}\overset{0}{\Delta}_1 \mu \overset{0}{g}_{ij}, \tag{4}$$

$\mu_{j,i}$ es la derivada covariante $\overset{0}{\nabla}_i \mu_j$ respecto a la métrica $\overset{0}{g}_{ij}$,

$\overset{0}{\Delta}_1 \mu$ es el parámetro diferencial de Beltrami de primer orden:

$$\overset{0}{\Delta}_1 \mu = \overset{0}{g}{}^{ij} \mu_i \mu_j. \tag{5}$$

2.2. Observación. En un espacio de Riemann, si el tensor de curvatura satisface (3) para algún tensor S_{ij}, que tiene la estructura (4), para poder hallar las componentes de S_{ij}, es necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (4). Para el caso de n = 3, los tensores R y S tienen sólo seis componentes representativas y considerando (3) como un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas, es lógico esperar que tal tensor S_{ij} siempre se puede encontrar. Estas componentes necesariamente satisfacen:

$$S_{ij} = -R_{ij} + \frac{R}{4} g_{ij} \tag{6}$$

en donde R_{ij} es el tensor de Ricci y R es la curvatura escalar. Por esta razón para n = 3 fuera de la condición (3), para que el espacio sea conforme, se debe agregar la condición de integrabilidad de (4):

$$\nabla_{[i} S_{j]k} = 0. \tag{7}$$

Para n > 3 la condición (3) es suficiente y necesaria para que el espacio sea conforme, ya que la condición (7) es consecuencia de (3), [7].

2.3. En adelante n toma sólo los valores de 3 y 4. Mostraremos que el estudio del tensor de curvatura del espacio ${}^1C_n$ está estrechamente relacionado con el estudio de todos los tipos de superficies de segundo orden (o curvas en el caso n = 3) del espacio de Lobatchevski L_{n-1}. El espacio tangente $T_x({}^1C_n)$ del espacio ${}^1C_n$ en el punto $X(x^1, x^2, x^3, ..., x^n)$ no es otra cosa que la proyectivización del espacio de Lobatchevski L_{n-1} en el cual se ha tomado como absoluto la cuadrática:

$$\overset{0}{g}_{ij}\, dx^i dx^j = 0 \tag{8}$$

y dx^i se consideran las coordenadas homogéneas del modelo proyectivo de L_{n-1}.

2.4. DEFINICION. El tensor de *modelación conforme* del espacio ${}^1C_n$ se define según la fórmula:

$$M_{ij} = (n-2)\,[\mu_{i;j} - \mu_i \mu_j]. \tag{9}$$

En $T_x({}^1C_n) = L_{n-1}$ definimos además las siguientes superficies:

$R_{ij}\, dx^i dx^j = 0$, la superficie de Ricci,

$M_{ij}\, dx^i dx^j = 0$, la superficie de la modelación conforme, (10)

$S_{ij}\, dx^i dx^j = 0$, la S-superficie,

donde:

a) R_{ij} es el tensor de Ricci, que en coordenadas cartesianas se expresa así:

$$R_{ij} = (n-2)\,[\mu_{j;i} - \mu_i \mu_j] + [\overset{0}{\Delta}_2 \mu + (n-2)\,\overset{0}{\Delta}_1 \mu]\,\overset{0}{g}_{ij}, \tag{11}$$

$\overset{0}{\Delta}_2 \mu$ es el parámetro diferencial de Beltrami de segundo orden, definido según la fórmula:

$$\overset{0}{\Delta}_2 \mu = \overset{0}{g}{}^{ij} \mu_{ij}. \tag{12}$$

b) M_{ij} es el tensor de modelación conforme, que satisface junto con el tensor de Ricci la siguiente relación:

$$M_{ij} = R_{ij} - [\overset{0}{\Delta}_2 \mu + (n-2)\,\overset{0}{\Delta}_1 \mu]\,\overset{0}{g}_{ij} \tag{13}$$

Por lo tanto, el estudio del tensor de curvatura está estrechamente ligado con el estudio de todos los tipos de superficies (o curvas para n = 3) del espacio de Lobatchevski, las cuales pertenecen a un haz absoluto definido por los tensores g_{ij} y S_{ij}:

$$\alpha g_{ij} + \beta S_{ij}.$$

2.5. El tensor de modelación conforme sólo se puede calcular una vez se haya establecido tanto el factor conforme, como el tensor métrico del espacio pseudoeuclídeo. Por este motivo, a diferencia de los tensores de R_{ij} y S_{ij} los cuales expresan la naturaleza interna del espacio ^1C_n, el tensor M_{ij} está relacionado sólo con la posibilidad de modelar el espacio ^1C_n en el espacio ^1E_n. Por ejemplo, y esto se mejorará más adelante, para n = 3, en la interpretación conforme de Poincarè, el tensor de modelación conforme de todo espacio conforme con curvatura constante es nulo, en el caso que el absoluto sea un plano, pero es proporcional al métrico, si el absoluto es una esfera.

Es cierto, que el tensor de modelación conforme no refleja todos los detalles de la posibilidad de modelación; por ejemplo, tratando de diferenciar la clase de modelos conformes de espacios de curvatura constante, cuando el absoluto es un plano, de la clase de los modelos de estos espacios cuando el absoluto es una esfera, el tensor M_{ij} no lo permite, pues no permite inmediatamente diferenciar en cual de estas clases está el modelo de los espacios de curvatura nula. Sin embargo para este propósito se pueden utilizar, con buen éxito, los tensores R_{ij} o S_{ij}.

Si el tensor métrico g_{ij} se expresa en coordenadas cartesianas (1), entonces el tensor M_{ij} se expresa así:

$$M_{ij} = (-1/\theta)\,\theta_{ij}; \tag{14}$$

los tensores R_{ij} y S_{ij} se relacionan:

$$S_{ij} = -\frac{1}{n-2} R_{ij} + \frac{R}{2(n-2)(n-1)} g_{ij}. \tag{15}$$

§3. Los espacios ${}^1C_n^*$

3.1. La relación existente entre los espacios conformes y los espacios proyectivos, los cuales se construyen con base en los espacios euclídeos, la encontró F. Klein [4]. De manera análoga utilizaremos este principio para modelar los espacios conformes ${}^1C_n$.
Consideremos el espacio proyectivo P_{n+1} la hipercuádrica Ω con ecuación:

$$a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \overset{0}{g}_{ij}\,\xi^i\xi^j + (\xi^{n+1})^2 - (\xi^{n+2})^2 = 0. \qquad (16)$$

Observación. Los índices latinos toman valores de 1 a n, mientras que los griegos de 1 a n + 2. Esta regla se mantendrá hasta el final del trabajo, si no se especifica otra cosa.

3.1.1. La aplicación F: P $\to$ ${}^1C_n$ se define de la siguiente manera:
a) Por medio de la proyección estereográfica con centro en el punto N(0:0: ... :0:1:1), llamado polo norte, establecemos una correspondencia entre puntos ξ de Ω y puntos X pertenecientes al hiperplano $\xi^{n+1} = 0$, el cual se considera como un espacio pseudoeuclídeo, que es donde modelaremos el espacio conforme ${}^1C_n$. Al punto N sobre Ω le hacemos corresponder un punto complementario de ${}^1C_n$.
b) A cada punto $A(a^1; a^2; \dots ; a^{n+2}) \in P_{n+1}$, que esté fuera de Ω le corresponde una polar (hiperplano) con relación a Ω. Esta polar intersecta la hipercuádrica Ω en una hiperesfera la cual se proyecta por medio de la proyección estereográfica F en una esfera del hiperplano $\xi^{n+1} = 0$. En adelante diremos simplemente ${}^1C_n$, en lugar del hiperplano $\xi^{n+1} = 0$ y esferas en lugar de hiperesferas.
De esta forma la aplicación F establece una relación biunívoca entre puntos de P_{n+1} que están sobre Ω o fuera de ella y esferas de ${}^1C_n$. En particular, los puntos de ${}^1C_n$, se pueden considerar como

esferas de radio cero o conos isotrópicos.

3.2. Veamos en coordenadas lo expresado en 3.1.
F establece una relación entre las coordenadas homogéneas ξ^α de un punto sobre Ω y las no homogéneas x^i del espacio ^1C_n, que se puede expresar así:

$$\begin{aligned} \xi^i &= 2x^i \\ \xi^{n+1} &= \Sigma - 1 \\ \xi^{n-2} &= \Sigma + 1 \end{aligned} \tag{17}$$

donde:

$$\Sigma = \overset{0}{g}_{ij}\, x^i x^j.$$

A las coordenadas ξ^α les llamaremos policíclicas del punto $X \in {}^1C_n$. Esta es una generalización de las coordenadas tetracíclicas y pentacíclicas definidas en [4] y [2] respectivamente. A un punto $A(a^1; a^2; \dots ; a^{n+2}) \in P_{n+1}$ le corresponde una polar con relación a Ω (16), la cual en coordenadas policíclicas tiene ecuación:

$$a_\alpha \xi^\alpha = 0 \tag{18}$$

donde:

$$a_\alpha = a_{\alpha\beta}\, a^\beta.$$

Reemplazando (17) en (18), obtenemos la ecuación de la esfera que es la proyección de la intersección de la polar de A con Ω. Esta esfera de ^1C_n tiene ecuación:

$$(a_{n+1} + a_{n+2})\, \Sigma + 2a_i x^i + (a_{n+2} - a_{n+1}) = 0. \tag{19}$$

De esta forma cada punto $A(a^1; a^2; \dots ; a^{n+2}) \in P_{n+1}$, le corresponde una esfera en ^1C_n.

Observaciones:

a) Si el punto $A \in \Omega$, entonces no vamos a encontrar la polar de este punto, simplemente lo proyectamos a ^1C_n mediante F, imagen

que será una esfera de radio cero.
b) Si el punto A está en el hiperplano tangente al polo norte N, es decir, si $a_{n+1} - a_{n+2} = 0$, entonces su imagen mediante F será una esfera que pasa por un punto complementario.

3.3. Mostremos ahora, cómo se puede obtener un espacio de curvatura constante cuyo elemento lineal es:

$$ds^2 = \frac{\overset{0}{g}_{ij}\, dx^i dx^j}{(\Sigma - 1)^2} \qquad (20)$$

Normalicemos la hipercuádrica Ω por el método Norden [7].
Como normal I (de primer género) tomamos la recta que pasa por el punto $\xi \in \Omega$ y por el vértice ideal del poliedro absoluto (marco proyectivo) $e_{n+1}(0; ...;0 ; 1; 0)$, es decir, la normal I pasa por un punto cualquiera de la hipercuádrica Ω y por el polo del hiperplano $\xi^{n+1} = 0$. Denotemos este último vértice $e_{n+1}(0; ...;0 ; 1; 0)$ con la letra Ξ. Aquí se excluyen los puntos de intersección del hiperplano ${}^1C_n$ con Ω. Como normal II (de segundo género) tomamos la intersección del hiperplano tangente en el punto ξ con el hiperplano ${}^1C_n$.
Consideremos ahora las rectas en el espacio tangente $T_x({}^1C_n) = L_{n-1}$ en el punto ξ, que pasen por el punto ξ y que tengan direcciones $\partial_i \xi = \partial\xi/\partial x^i$, es decir, las rectas tangentes a las líneas coordenadas en el punto $\xi \in \Omega$. Estas rectas intersectan la normal II de segundo género en los puntos:

$$\eta_i = \partial_i \xi - L_i, \quad \partial_i \xi = \frac{\partial\xi}{\partial x^i} \qquad (21)$$

donde L_i son las coordenadas del normalizador (bajo las transformadas de las coordenadas curvilíneas, ellos se transforman según las leyes tensoriales).
Por lo tanto tenemos el marco proyectivo $\{\xi, \eta_i, \Xi\}$, y cualquier punto del espacio proyectivo P_{n+1} se puede expresar como una combinación lineal en términos de los puntos de este marco. Descomponiendo las derivadas de estos nuevos puntos ξ, η_i, Ξ, en

términos de ellos mismos, obtenemos las ecuaciones diferenciales fundamentales de la hipercuádrica Ω.

$$\partial_i \xi = L_i \xi + \eta_i \tag{22}$$

$$\nabla_i \eta_i = L_i \eta_j + \pi_{ij} \xi + b_{ij} \Xi \tag{23}$$

$$\partial_j \Xi = \gamma_j^k \eta_k + \gamma_j \xi - L_j \Xi \tag{24}$$

La fórmula (23) se puede escribir así:

$$\partial_i \eta_j = \Gamma_{ij}^k \eta_k + L_i \eta_j + \pi_{ij} \xi + b_{ij} \Xi . \tag{25}$$

Diferenciando cada una de las coordenadas ξ^α, definidas en (17) y utilizando (21), se encuentran las coordenadas η_i. Luego exigiendo que η_i pertenezca a ${}^1C_n$, encontramos:

$$L_i = \frac{-2 \overset{()}{g}_{ip} x^p}{1 - \Sigma}. \tag{26}$$

Diferenciando las coordenadas de los puntos η_i y comparándolas con la fórmula (25) encontramos las componentes de la conexión:

$$\Gamma_{ij}^s = \frac{2 \overset{()}{g}_{ip} x^p}{1 - \Sigma} \delta_j^s + \frac{2 \overset{()}{g}_{ip} x^p}{1 - \Sigma} \delta_i^s + \frac{-2 \overset{()}{g}_{ij} x^s}{1 - \Sigma}. \tag{27}$$

Llamando:

$$\mu_i = \frac{2 \overset{()}{g}_{ip} x^p}{1 - \Sigma}$$

encontramos que las componentes de la conexión de la superficie normalizada según el método de Norden se pueden expresar así:

$$\Gamma_{ij}^s = \mu_i \delta_j^s + \mu_j \delta_i^s - \mu^s \overset{()}{g}_{ij}; \quad (\mu^s = \overset{()}{g}{}^{sp} \mu_p) \tag{28}$$

es decir, son iguales a las componentes de la conexión de Riemann del espacio (20) ([3] §8).

3.4. DEFINICION. Supongamos que el punto $A(a^1; a^2; \dots ; a^{n+2}) \in P_{n+1}$, se mueve sobre una recta, entonces la esfera (19) se mueve describiendo un haz de esferas o familia de esferas.

Llamaremos *haz fundamental* a un haz de esferas asociado a una recta en el espacio P_{n+1}. Los espacios ${}^1C^*_n$ los definimos como espacios ${}^1C_n$ (1), para los cuales las superficies de nivel del factor conforme θ, θ = constante, coinciden con un haz fundamental.

3.5. TEOREMA 1. *Un haz fundamental del espacio* ${}^1C^*_n$ *es un haz de superficies ombílicas si y solamente si, la recta asociada al haz fundamental pasa por el punto* N (*centro de la proyección estereográfica*).

Demostración. Antes que todo, hallemos una expresión para la diferencial absoluta del vector normal (ortonormal) en cada uno de los puntos de la esfera que es una superficie de nivel del espacio ${}^1C^*_n$.

La función μ de la fórmula:

$$g_{ij} = e^{2\mu} \overset{0}{g}_{ij}$$

la consideraremos como una función de la otra función f, es decir,

$$\mu = \mu(f), \text{ donde } f = f(x^i). \qquad (32)$$

Consideremos ahora las superficies de nivel del espacio ${}^1C^*_n$, f = constante. Con estos supuestos el vector normal (orto) en el punto $x = (x^i)$, tiene como componentes:

$$n^i = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{\overset{0}{\Delta}_1 f}} \overset{0}{g}{}^{ip} f_p \qquad (33)$$

donde $f_j = \partial_j f$ y $\overset{0}{\Delta}_1 f$ es el parámetro diferencial de Beltrami de primer orden:

$$\overset{0}{\Delta}_1 f = \overset{0}{g}{}^{ij} f_i f_j. \qquad (34)$$

Sea $\vec{t}$ un vector tangente unitario en el punto $x = (x^i)$ de la superficie de nivel f = constante, encontramos las componentes de la forma de conexión:

$$\omega^i_j = \mu_j t^i - \mu^i t_j \qquad (35)$$

donde,

$$t_j = \overset{0}{g}_{ij} t^i \quad y \quad \mu^i = \overset{0}{g}{}^{ij} \mu_j. \tag{36}$$

El diferencial absoluto del vector $\vec{n}$ en la dirección de $\vec{t}$ se define así:

$$\delta n^i(\vec{t}) = dn^i(\vec{t}) + \omega^i_s(\vec{t})\, n^s. \tag{37}$$

En nuestro caso, los sumandos de la derecha de (37) tienen la siguiente expresión:

$$\omega^i_s(\vec{t})\, n^s = \sqrt{\overset{0}{\Delta}_i f}\; \mu\, e^{-\mu} t^i \tag{38}$$

$$dn^i(\vec{t}) = \left(\overset{0}{\Delta}_i f\right)^{3/2} e^{-\mu} \overset{0}{g}{}^{im} \overset{0}{g}{}^{rs} [f_r f_s f_{mk} - f_m f_r f_{sk}]\, t^k. \tag{39}$$

Ahora sí demostraremos el teorema.
Haremos la demostración para n = 3, pero todos los cálculos pueden ser generalizados para n = 4.

Suficiencia. Sea L una recta en P_4 que pasa por los puntos: $A(a^1: a^2: a^3: a^4: a^5)$ y $B(b^1: b^2: b^3: b^4: b^5)$. El punto genérico de esta recta es C = A + tB y tiene como coordenadas:

$$c^i = a^i + t b^i. \tag{40}$$

A este punto según (19) le corresponde la esfera:

$$\left[(a_4 + a_5) + t\left(b_4 + b_5\right)\right]\Sigma + 2\left(a_i + t b_i\right)x^i + \left[(a_5 - a_4) + t\left(b_5 - b_4\right)\right] = 0. \tag{41}$$

Es decir,

$$t = \frac{(a_4 + a_5)\Sigma + 2a_i x^i + (a_5 - a_4)}{\left(b_4 + b_5\right)\Sigma + 2b_i x^i + \left(b_5 - b_4\right)} \tag{42}$$

donde $a^\sigma = a_{\alpha\sigma} a^\sigma$, definido en (16) para n = 3.
Subiendo índices en (42), obtenemos la ecuación del haz de esferas:

$$t = \frac{\left(a^4 - a^5\right)\Sigma + 2a^1 x^1 + a^2 x^2 - a^3 x^3 - \left(a^4 + a^5\right)}{\left(b^4 - b^5\right)\Sigma + 2b^1 x^1 + b^2 x^2 - b^3 x^3 - \left(b^4 + b^5\right)}. \tag{43}$$

Si la recta L pasa por el punto N(0: 0: 0: 1: 1), queda completamente determinada definiendo las coordenadas del segundo punto, por ejemplo: $A(a^1: a^2: a^3: a^4: 0)$. Reemplazando las coordenadas de N y A en (43) obtenemos la ecuación de la familia de esferas:

$$a^4 - 2t = (a^4)\,\Sigma + 2a^1x^1 + a^2x^2 - a^3x^3. \tag{44}$$

Llamando $f = a^4 - 2t$, la ecuación (44) la podemos escribir así:

$$f = a_4\Sigma + 2a_ix^i. \tag{45}$$

De la definición de espacios ${}^1C_n^*$ se deduce entonces que la función factor conforme $\mu = -\ln\theta$ debe tener la estructura:

$$\mu = \mu(f) \tag{46}$$

donde f está definida en (45).
En la fórmula (46), para $a_4 \neq 0$, cambiando las coordenadas

$$x^i = x^i - \frac{2a_i}{a_4}$$

obtenemos:

$$\mu = \mu(\Sigma). \tag{47}$$

Y en el caso en que $a_4 = 0$, entonces:

$$\mu = \mu(a_ix^i). \tag{48}$$

En el caso (47) calculando la diferencial absoluta del vector $\vec{n}$ en la dirección de $\vec{t}$ y utilizando (37), (38) y (39), obtenemos:

$$\delta n^i(\vec{t}) = K_n t^i \tag{49}$$

donde:

$$K_n = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{\Sigma}}(1 + 2\mu'\Sigma). \tag{50}$$

Y en el caso (48), también la diferencial absoluta tiene la misma estructura (49), pero con curvatura normal:

$$K_n = -e^{-\mu}. \tag{51}$$

Las fórmulas obtenidas (49), (50) y (51), muestran que la familia de esferas asociada a la recta L, que pasa por el punto N (centro de la proyección estereográfica), es una familia de superficies ombílicas con curvatura normal constante.

Observación. La curvatura normal en general es diferente para superficies diferentes.

Necesidad. Si la recta L en el espacio proyectivo P_4 no pasa por el punto N, mediante ayuda de movimientos (transformaciones de P_4 en si mismo que dejan invariante la hipercuádrica Ω), podemos siempre obtener una de las siguientes situaciones:
i) La recta L no tiene puntos comunes con Ω y se encuentra fuera de ella. Para este caso podemos elegir los puntos A y B como los vértices ideales e_1 y e_2 del tetraedro absoluto. Entonces utilizando (43), μ tiene la siguiente estructura:

$$\mu = \mu\left(\frac{x^1}{x^2}\right). \tag{52}$$

Calculando el diferencial absoluto (37), encontramos:

$$\delta n^i(\vec{t}) = K_n t^i \tag{53}$$

donde:

$$K_n = e^{-\mu} \mu \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x^1}{x^2}\right)}}{x^2}. \tag{54}$$

ii) La recta L no tiene puntos comunes con Ω y se encuentra dentro de ella. Para este caso podemos elegir los puntos $A = e_3$, $B = e_5$ y obtenemos entonces:

$$\mu = \mu\left[\left(\frac{\Sigma + 1}{x^3}\right)\right].$$

Calculando la diferencial absoluta (37), obtenemos una expresión equivalente a (53), pero con curvatura normal:

$$K_n = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{\overset{0}{\Delta}_1 f}}\left(\frac{2}{x^3} + \mu' \overset{0}{\Delta}_1 f\right). \tag{55}$$

Aquí:

$$\overset{0}{\Delta}_1 f = -\frac{1}{(x^3)^2}\left[4 + \left(\frac{\Sigma + 1}{x^3}\right)\right].$$

iii) La recta L y la hipercuádrica Ω se cortan en dos puntos. Para este caso podemos elegir los puntos $A = e_1 + e_3$, $B = e_2 + e_3$ y obtenemos entonces:

$$\mu = \mu\left[\left(\frac{x^1 + x^3}{x^2 + x^3}\right)\right]$$

Calculando la diferencial absoluta (37), obtenemos una expresión equivalente a (53), pero con curvatura normal:

$$K_n = \frac{\sqrt{2f}}{x^2 + x^3}\mu' e^{-\mu}$$

donde

$$f = \frac{x^1 + x^3}{x^2 + x^3}. \tag{56}$$

iv) La recta L y la hipercuádrica Ω son tangente. Para este caso podemos elegir los puntos $A = e_5 - e_4$, $B = e_1$, y obtenemos entonces:

$$\mu = \mu\left(\frac{\Sigma}{x^1}\right).$$

Calculando la diferencial absoluta (37), obtenemos una expresión equivalente a (53), pero con curvatura normal:

$$K_n = e^{-\mu}\left(\frac{2}{(x^1)^2 \Sigma} - \mu' \frac{\Sigma}{x^1}\right). \tag{57}$$

v) La recta L es una recta generatriz de la hipercuádrica Ω. Para este caso podemos elegir los puntos $A = e_5 - e_4$, $B = e_1 + e_3$, y obtenemos entonces:

$$\mu = \mu\left(\frac{\Sigma}{x^1 - x^3}\right). \qquad (58)$$

En los casos i) al iv) las fórmulas de la (53) a la (57), muestran que la curvatura normal no es una cantidad constante para todos los puntos de una misma superficie de nivel f = constante, pero la superficie en cada punto es ombílica.

Observación: Aunque todo punto de la superficie de nivel f = constante es ombílico, es decir, cualquier dirección es principal, la curvatura normal puede cambiar de punto en punto en una misma superficie.

En el caso v) no tiene sentido hablar de la curvatura normal de la superficie, ya que en este caso, cuando la recta L es una recta generatriz, la polar de cada punto en la recta es un hiperplano tangente a Ω y la superficie de nivel es un cono isotrópico, y su vector normal no representa algo en este cono. ■

Mostraremos ahora que las superficies de Ricci (o curvas en el caso n = 3 se pueden utilizar para dividir el espacio conforme euclídeo en regiones con diferentes características geométricas.

3.6. TEOREMA 2. *Si el espacio* ${}^1C_n^*$ *tiene el factor conforme asociado a una recta que pase por el punto* N(0:0:0:1:1), *entonces la curva de Ricci (o superficie de Ricci, para el caso* n = 4) *en el plano tangente del espacio* ${}^1C_n^*$, *es una curva de curvatura constante con centro en algún punto.*

Demostración. Sea el espacio ${}^1C_n^*$ (n = 3), con tensor métrico (1). La curva de Ricci en el espacio tangente de este espacio en el punto X está definida por:

$$R_{ij}\,dx^i dx^j = 0 \qquad (59)$$

donde el tensor de Ricci R_{ij}, se expresa según:

$$R_{ij} = -\left(\frac{1}{\theta}\right)\theta_{ij} + \lambda \overset{0}{g}_{ij}, \quad \theta_{ij} = \partial_{ij}\theta. \qquad (60)$$

Aquí:

$$\lambda = 2\left(\frac{\overset{0}{\Delta}_1 \theta}{\theta^2}\right) - \left(\frac{\overset{0}{\Delta}_2 \theta}{\theta^2}\right) \tag{61}$$

donde $\overset{0}{\Delta}_1 \theta$ y $\overset{0}{\Delta}_2 \theta$ son parámetros diferenciales de Beltrami de primer y segundo orden en (6) y (12) respectivamente.

Llamando $\theta = \theta(f)$ donde $f = f(x^1, x^2, x^3)$, entonces el tensor de Ricci se expresa así:

$$R_{ij} = \left(\frac{\theta' f_{ij} + \theta'' f_i f_j}{\theta}\right) + \lambda \overset{0}{g}_{ij} \tag{62}$$

donde:

$$\lambda = \left(\frac{2(\theta')^2}{\theta^2} - \frac{\theta''}{\theta}\right)\overset{0}{\Delta}_1 f - \frac{\theta'}{\theta}\overset{0}{\Delta}_2 f \tag{63}$$

Hacemos aquí un análisis similar al que se hizo para demostrar la suficiencia del teorema 3.1.

Primer caso. Sea $f = \Sigma$, es decir el factor conforme $\theta = \theta(\Sigma)$, donde $\Sigma = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2$.
Utilizando las coordenadas covariantes $x_i = \overset{0}{g}_{ij} x^j$ el tensor de Ricci se expresa así:

$$R_{ij} = \left(\lambda + \frac{\theta'}{\theta}\right)\overset{0}{g}_{ij} + \left(\frac{4\theta''}{\theta}\right) x_i x_j$$

donde:

$$\lambda = 8\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \Sigma - \left(\frac{4\theta''}{\theta}\right)\Sigma - 6\left(\frac{\theta'}{\theta}\right).$$

Sea el tensor:

$$a_{ij} = R_{ij} - \left(\lambda + \frac{\theta'}{\theta}\right)\overset{0}{g}_{ij},$$

entonces la curva $a_{ij}dx^i dx^j = 0$ pertenece al haz absoluto definido por los tensores métrico y de Ricci. Si $\theta'' \neq 0$ entonces la curva

$a_{ij}dx^i dx^j = 0$ se puede expresar como:

$$x_i x_j dx^i dx^j = 0$$

es decir, como un par de rectas dobles, con polo, respecto al absoluto

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = 0.$$

Existen entonces tres posibilidades:

a) Si el punto X está fuera del absoluto, entonces la curva de Ricci es una línea equidistante, es decir una circunferencia con centro en el punto X.

b) Si el punto X está dentro del absoluto, entonces la curva de Ricci es una circunferencia con centro en el punto X.

c) Si el punto X está sobre el absoluto, entonces la curva de Ricci es un orificio, es decir una circunferencia con centro en el punto X.

De esta forma el espacio $^1C_n^*$, con factor conforme (47) y absoluto cono isotrópico, se divide en tres partes, cada una de las cuales tiene propiedades geométricas diferentes.

Observación. Si $\theta'' = 0$, entonces el espacio $^1C_n^*$, con factor conforme (47) es un espacio de curvatura constante y además la curva de Ricci coincide con el absoluto del plano de Lobatchevski, es decir, es un espacio de Einstein con curvatura constante.

Segundo Caso. Si $f(a_i x^i)$, es decir, si el factor conforme es igual a: $\theta = \theta(a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3)$, entonces , el tensor de Ricci es igual a:

$$R_{ij} = \lambda \overset{0}{g}_{ij} - \frac{\theta''}{\theta} a_i a_j \tag{66}$$

donde:

$$\lambda = \left(\frac{2(\theta')^2}{\theta^2} - \frac{\theta''}{\theta} \right) \left[a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \right].$$

Llamando $a_{ij} = R_{ij} - \lambda \overset{0}{g}_{ij}$, tenemos que la curva $a_{ij}dx^i dx^j = 0$, cuando $\theta'' \neq 0$ es:

$$a_i a_j dx^i dx^j = 0. \tag{67}$$

Estudiemos por separado el caso cuando $a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0$, es decir cuando la recta L es una recta generatriz de la hipercuádrica Ω. En este caso la curva $a_{ij}dx^i dx^j = 0$ y la curva de Ricci coinciden y si además $\theta'' \neq 0$, entonces ellas son un par de rectas que son tangentes al absoluto $(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = 0$, del plano de Lobatchevski.
En los casos donde $(a^1)^2 + (a^2)^2 - (a^3)^2 \neq 0$ y $\theta'' \neq 0$, la curva de Ricci es una circunferencia o una línea equidistante, dependiendo si $(a^1)^2 + (a^2)^2 - (a^3)^2$ es mayor o menor que cero respectivamente.

Observación. Si $\theta'' = 0$ entonces el espacio ${}^1\overset{*}{C}_n$ es un espacio de curvatura constante, que es en este caso un espacio de Einstein con curvatura constante. ■

3.7. EJEMPLO 1. En calidad de ejemplo, tomemos ahora el caso cuando la recta L no pase por el punto N y mostraremos que así es posible obtener otros tipos de curvas de Ricci, cuya curvatura no es constante. Supongamos que la recta L pase por los puntos $A = e_1$, $B = e_1 - e_3$, entonces el factor conforme es:

$$\theta = \theta\left[\frac{x^2}{x^1 + x^3}\right]$$

y el tensor de Ricci:

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda + A & B & A \\ B & \lambda & B \\ A & B & A - \lambda \end{pmatrix}$$

donde:

$$A = -\frac{2\theta' x^2}{\theta(x^1 + x^3)^2} - \frac{\theta''(x^2)^2}{\theta(x^1 + x^3)^4}$$

$$B = \frac{\theta'}{\theta(x^1 + x^3)^2} - \frac{\theta'' x^2}{\theta(x^1 + x^3)^3}$$

$$\lambda = \left(\frac{2(\theta')^2}{\theta^2} - \frac{\theta''}{\theta}\right)\left[x^1 + x^3\right]^{-2}.$$

Entonces la curva de Ricci (59) tiene ecuación:

$$\lambda\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2\right) + (dx^1 + dx^3)\left[A(dx^1 + dx^3) + 2B\,dx^2\right] = 0$$

es decir, la ecuación de una parábola osculadora. ■

3.8. EJEMPLO 2. Veamos ahora el espacio ${}^{1}C_{n}^{*}$ con factor conforme (58), donde $\theta'' = 0$. Para este caso tenemos que el tensor de Ricci es:

$$\left(R_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \lambda + \lambda A^2 & -\lambda A & -\lambda A^2 \\ -\lambda A & 2\lambda & \lambda A \\ -\lambda A^2 & \lambda A & \lambda A^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

donde:

$$\lambda = -2\frac{\theta'}{\theta}\left[\frac{1}{x^1 - x^3}\right]$$

$$A = \frac{x^2}{x^1 - x^3}.$$

La Curva de Ricci (59) en el punto $X(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ es una parábola osculadora con ecuación:

$$\lambda\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2\right) + \lambda(dx^1 - dx^3)\left[A(dx^1 - dx^3) + 2\,dx^2\right] = 0.$$

■

3.9. Conclusiones

a) Las hiperesferas que componen el haz absoluto del espacio ${}^{1}C_{n}^{*}$, para n = 3, o, n = 4, aunque son superficies ombílicas no necesariamente tienen curvatura normal constante. Esta propiedad sólo se cumple cuando el factor conforme tiene la forma:

$$\theta = \theta\left(a_{n+1} \overset{0}{g}_{ij} x^i x^j + 2 a_i x^i\right) \tag{68}$$

donde a_{n+1} y a_i son cantidades constantes.

b) Además las superficies (curvas para n = 3) de Ricci para los espacios ${}^1C_n^*$ (68) son superficies con curvatura constante.

c) Si el factor conforme satisface la condición $\theta'' = 0$, entonces el espacio ${}^1C_n^*$ (68) es un espacio *simétrico.*

§4. El grupo de movimientos de algunos espacios ${}^1C_n^*$

4.1. Para la clasificación de espacios ${}^1C_n^*$ según el grupo de movimientos debemos definir para cada espacio, un subgrupo del grupo G_m de transformaciones conformes del espacio pseudo-euclídeo ${}^1E_n$ donde m = 10 para n = 3 y m = 15 para n = 4.
El grupo de transformaciones conformes G_m de ${}^1E_n$ tiene los siguientes operadores [1]:

a) Para n = 3:

$$X_1 = \partial_1 \qquad X_2 = \partial_2 \qquad X_3 = \partial_3$$
$$X_4 = x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + x^3\partial_3 \qquad X_5 = x^2\partial_1 - x^1\partial_2 \qquad X_6 = x^3\partial_1 - x^1\partial_3$$
$$X_7 = x^3\partial_2 - x^2\partial_3$$
$$X_8 = \left[-(x_1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2\right]\partial_1 - 2x^1x^2\partial_2 - 2x^1x^3\partial_3$$
$$X_9 = -2x^1x^2\partial_1 + \left[(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\right]\partial_2 - 2x^2x^3\partial_3$$
$$X_{10} = 2x^1x^3\partial_1 + 2x^2x^3\partial_2 + \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right]\partial_3.$$

b) Para n = 4:

$$X_1 = \partial_1 \qquad X_2 = \partial_2 \qquad X_3 = \partial_3 \qquad X_4 = \partial_4$$
$$X_5 = x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + x^3\partial_3 + x^4\partial_4$$
$$X_6 = x^2\partial_1 - x^1\partial_2 \qquad X_7 = x^3\partial_1 - x^1\partial_3 \qquad X_8 = x^4\partial_1 + x^1\partial_4$$
$$X_9 = x^3\partial_2 - x^2\partial_3 \qquad X_{10} = x^4\partial_2 + x^2\partial_4 \qquad X_{11} = x^4\partial_3 + x^3\partial_4$$
$$X_{12} = \left[-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]\partial_1 - 2x^1x^2\partial_2 - 2x^1x^3\partial_3 - 2x^1x^4\partial_4$$

$$X_{13} = -2x^1x^2\partial_1 + \left[(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]\partial_2 - 2x^2x^3\partial_3 - 2x^2x^4\partial_4$$

$$X_{14} = -2x^1x^3\partial_1 - 2x^2x^3\partial_2 + \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2\right]\partial_3 - 2x^3x^4\partial_4$$

$$X_{15} = 2x^1x^4\partial_1 + 2x^2x^4\partial_2 + 2x^3x^4\partial_3 + \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\right]\partial_4$$

Si llamamos $\bar{\xi}$ a la siguiente combinación lineal:

$$\bar{\xi} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m = \xi^i \partial_i$$

y suponiendo que :

$$X_a = \frac{\partial \xi^i}{\partial \lambda_a}\partial_i \qquad (69)$$

donde a = 1, ..., 10 si n = 3, y , a = 1, ..., 15 si n = 4; entonces para n = 3 obtenemos:

$$\xi^1 = \lambda_1 + x^1\lambda_4 + x^2\lambda_5 + x^3\lambda_6 + \left[-(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2\right]\lambda_8 - 2x^1x^2\lambda_9 + 2x^1x^3\lambda_{10}$$

$$\xi^2 = \lambda_2 + x^2\lambda_4 - x^1\lambda_5 + x^3\lambda_7 + 2x^1x^2\lambda_8 + \left[(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\right]\lambda_9 + 2x^2x^3\lambda_{10}$$

$$\xi^3 = \lambda_3 + x^3\lambda_4 + x^1\lambda_6 + x^2\lambda_7 - 2x^1x^3\lambda_8 + 2x^2x^3\lambda_9 + \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right]\lambda_{10}$$

y para n = 4:

$$\xi^1 = \lambda_1 + x^1\lambda_5 + x^2\lambda_6 + x^3\lambda_7 + x^4\lambda_8 + \left[-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]\lambda_{12} - 2x^1x^2\lambda_{13} - 2x^1x^3\lambda_{14} + 2x^1x^4\lambda_{15}$$

$$\xi^2 = \lambda_2 + x^2\lambda_5 - x^1\lambda_6 + x^3\lambda_9 + x^4\lambda_{10} - 2x^1x^2\lambda_{12} + \left[(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\right]\lambda_{13} - 2x^2x^3\lambda_{14} + 2x^2x^4\lambda_{15}$$

$$\xi^3 = \lambda_3 + x^3\lambda_5 - x^1\lambda_7 - x^2\lambda_9 + x^4\lambda_{11} - 2x^1x^3\lambda_{12} - 2x^2x^3\lambda_{13} + \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2\right]\lambda_{14} + 2x^3x^4\lambda_{15}$$

$$\xi^4 = \lambda_4 + x^4\lambda_5 + x^1\lambda_8 + x^2\lambda_{10} + x^3\lambda_{11} - 2x^1x^4\lambda_{12} - 2x^2x^4\lambda_{13} - 2x^3x^4\lambda_{14} + \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\right]\lambda_{15}.$$

4.2. Los operadores $X_a = (\partial\xi^i/\partial\lambda_a)\,\partial_i$ del grupo de movimientos G_r, que es un subgrupo (grupo de Lie) del grupo G_m de transformaciones conformes del espacio pseudoeuclídeo ${}^1E_n$, ($m = 10$, para $n = 3$ y $m = 15$, para $n = 4$), se determinan encontrando los ξ^i que satisfagan la ecuación de Killing [26],

$$\xi_{(i;j)} = 0$$

donde el subíndice i;j representa la derivada covariante y los paréntesis representan la operación simetrización $a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$. Es decir, desarrollando tenemos:

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik}\partial_j \xi^k + g_{jk}\partial_i \xi^k = 0. \tag{70}$$

Lo anterior es equivalente a encontrar los valores de λ_i en las fórmulas para ξ^i que satisfagan la ecuación (70).

4.3. A continuación siguiendo el método expresado en 4.2 damos algunos ejemplos de espacios ${}^1\overset{*}{C}_n$, expresando su grupo de movimientos.

4.3.1. $n = 3$:

Recta L en P_4 que pasa por:	Elemento Lineal $ds^2 = \ldots$ ($\theta'' \neq 0$)	Curva de Ricci G_r	Operadores del grupo de movimientos
e_4; e_5	$\dfrac{(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2}{\theta\left[(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2\right]}$	Circunferencia con centro en X	X_5; X_6; X_7
e_1; $e_5 + e_4$	Línea $\dfrac{(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2}{\theta\left[(x^1)\right]^2}$	Equidistante	X_4
$e_1 - e_3$; $e_4 + e_5$	$\dfrac{(dx^1)^2+(dx^2)^2-(dx^3)^2}{\theta\left[(x^1+x^3)\right]^2}$	Par de rectas coincidentes, tangentes al absoluto	X_2; $X_1 - X_3$

4.3.2. n = 4:

Factor conforme θ	Operadores del grupo de movimientos G_r	a) El espacio es ... b) En ${}^1E_4$ obtenemos un modelo del espacio con absoluto ... c) La superficie de Ricci es ...
$\sigma\left[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2\right]-1$ σ = constante > 0	$X_6; X_7; X_8; X_9;$ $X_{10}; X_{11};$ $(1/\sigma)X_1+X_{12};$ $(1/\sigma)X_2+X_{13};$ $(1/\sigma)X_3+X_{14};$ $(1/\sigma)X_4+X_{15}$	a) de curvatura constante, b) una esfera con radio real, c) coincide con el absoluto.
$\sigma\left[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2\right]+1$ σ = constante > 0	$X_6; X_7; X_8; X_9;$ $X_{10}; X_{11};$ $X_{12}-(1/\sigma)X_1;$ $X_{13}-(1/\sigma)X_2;$ $X_{14}-(1/\sigma)X_3;$ $X_{15}-(1/\sigma)X_4$	a) de curvatura constante, b) una esfera con radio imaginario, c) coincide con el absoluto.
$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2$	$X_6; X_7; X_8; X_9;$ $X_{10}; X_{11}; X_{12};$ $X_{13}; X_{14}; X_{15}$	a) plano (flat), b) un cono isotrópico, c) coincide con el absoluto.

x^4	$X_1; X_2; X_3; X_5; X_6; X_7; X_9; X_{12}; X_{13}; X_{14}$	a) de curvatura constante, b) el plano $x^4 = 0$, c) coincide con el absoluto.
x^1	$X_2; X_3; X_4; X_5; X_9; X_{10}; X_{11}; X_{13}; X_{14}; X_{15}$	a) de curvatura constante, b) el plano $x^1 = 0$, c) coincide con el absoluto.
$x^1 + x^4$.	$X_2; X_3; X_5; X_9; X_{13}; X_{14}; X_1 - X_4; X_{10} - X_6; X_{11} - X_7; X_{13} - X_{14}$	a) de curvatura constante, b) plano isotrópico $x_1 + x_4 = 0$, c) coincide con el absoluto.
$\theta = \theta(x^4)$ $\theta'' \neq 0$	$X_1; X_2; X_3; X_6; X_7; X_9$	a) de curvatura no constante, b) el plano $x^4 =$ constante, c) una esfera.
$\theta = \theta\left[x^4;(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right]$	$X_6; X_7; X_9$	a) de curvatura no constante, b) depende de θ, c) una esfera.
$(1+\alpha)(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(\alpha-1)(x^4)^2+2\alpha x^1 x^4$ $\alpha =$ contante $\neq 0$	$X_{10} - X_6; X_{11} - X_7$	a) de curvatura no constante, b) un cono no isotrópico, c) una oriesfera.

$(x^1)^2+(x^2)^2+\lambda(x^3)^2-(x^4)^2$ $\lambda \neq 1$	X_6; X_8; X_{10}	a) de curvatura no constante, b) un cono no isotrópico, c) una superficie equidistante.
$\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$	X_4; X_5; X_6; X_7; X_9; X_{15}	a) de curvatura constante, b) un cono imaginario.
$\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^4)^2}$	X_3; X_5; X_6; X_{10}; X_{11}; X_{15}	a) de curvatura no constante, b) un cono real.

REFERENCIAS

[1] BILIALOV, R. F., *Los grupos de movimiento en los espacios conformes planos gravitacionales,* Rev. Gravitación y Teoría General de la gravedad. Kazán, Ed. Uni-Kazán. 1965, Seg. Ed (en ruso).

[2] BUSHMANOVA, G. B. y NORDEN, A. P., *Elementos de la Geometría Conforme,* Kazán, Ed. Uni-Kazán, 1972. (en ruso).

[3] IBRAGUIMOV, N. J., *Los Grupos de Transformación en la Física Matemática,* Moscú, Ed. Nauka, 1983, (en ruso).

[4] KLEIN, F., *Geometría Superior,* Moscú, Leningrado, Ed. Gonti, 1939. (en ruso trad.).

[5] KLEIN, F., *Geometría no Euclidiana,* Moscú, Leningrado, Ed. Onti-NKTP, 1936, (en ruso, trad.).

[6] KRAMER, J., SHTEFANI, H. y MACLAUM, M., *Soluciones Exactas de las Ecuaciones de Einstein,* Moscú, Ed. Energoizdat, 1982, (en ruso, trad.).

[7] NORDEN, A. P., *Espacios de Conexión Afín,* Moscú, Ed. Nauka, 1976, (en ruso).

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Bogotá Colombia

(Recibido en junio de 1991)