Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXVI (1992) pgs. 147 - 162

SOBRE EL PROBLEMA PARABÓLICO PERIÓDICO $L[u] = f(x,t,u,Du)$

por

Beatriz Elena Villa

ABSTRACT. Sufficient conditions are obtained for the existence of solutions of the nonlinear periodic problem:

$$L[u] = f(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)) \text{ on } \Omega \times \mathbb{R}$$
$$u(x, t+T) = u(x, t) \text{ on } \Omega \times \mathbb{R},\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times \mathbb{R}$$

where L is a second order uniformly parabolic differentital operator.

Introducción

En este artículo probaremos un Teorema de comparación para las soluciones clásicas del problema parabólico:

$$\begin{cases} L[u](x, t) = f(x, t, u(x, t), \nabla_x u(x, t)) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, t+T) = u(x, t) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R},\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.1}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ es un dominio acotado, cuya frontera $\partial\Omega$ es una variedad de clase $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, L es un operador lineal uniformemente parabólico en $\Omega \times \mathbb{R}$, T es un número real fijo. $\nabla_x u$ es el gradiente respecto a x y f es una función suficientemente regular, definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Aplicaremos los resultados acerca de (0, 1) al estudio de la existencia y unicidad de soluciones clásicas del problema:

$$\begin{cases} L[u] \equiv g(\cdot, \cdot, u) + G(\nabla_x u) + h & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u(x, t+T) = u(x, t) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}, & u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.2}$$

donde h, g y G son funciones suficientemente regulares, cuyas propiedades serán especificadas en esta misma sección.

El problema (0, 1) ha sido estudiado, para el caso elíptico, por S. I. Pohozaev [10], Amann y Crandall [2] y por Kazdan y Kramer [5], entre otros.

El Teorema 1 de este artículo es el resultado que se conoce con el nombre: Método de las Super y Subsoluciones para soluciones periódicas. Este resultado aparece, sin demostración en un artículo de Ju S. Kolesov en 1966, [6]. En 1978, en [1], H. Amann demostró este resultado utilizando la Teoría Abstracta de la ecuación no lineal de Evolución. En este artículo se utilizan técnicas completamente distintas en su demostración.

El problema (0.2) fue estudiado por Alan Lazer en [8], para el caso $G \equiv 0$. Nuestra meta es obtener un resultado similar al de Lazer en [8].

Preliminares

En este artículo D denotará al conjunto $\Omega \times [0, T]$. Se introducen los siguientes espacios de Banach sobre los reales: $\mathbb{F} = \{u \in C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : u(x, t)$ es T-periódica en t$\}$, con la norma

$\|\cdot\|_{\mathbb{F}} = \|\cdot\|_{C^{\alpha,\alpha\ 2}(\overline{D})} = \|\cdot\|_{\alpha}^{\overline{D}}$, $\quad E = \{u \in C^{2+\alpha,\ 1+(\alpha/2)}(\Omega \times \mathbb{R}): u(x, t)$ es T-periódica en t, $u \equiv 0$ en $\partial\Omega \times \mathbb{R}\}$, con la norma

$\|\cdot\|_{\mathbb{E}} = \|\cdot\|_{C^{2+\alpha,\ 1+\alpha\ 2}(\overline{D})} = \|\cdot\|_{2+\alpha}^{\overline{D}}$, $\quad E_1 = \{u \in C^{1+\alpha,\ \alpha/2}(\Omega \times \mathbb{R}): u(x, t+T) = u(x, t)$ en $\Omega \times \mathbb{R}$, $u \equiv 0$ en $\partial\Omega \times \mathbb{R}\}$ y

$$E_2 = \{u \in E_1 : u \in C^{1+\sigma, \sigma/2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})\}$$

$\sigma \in (\alpha, 1)$, con las respectivas normas :

$$\|\cdot\|_{E_i} = \|\cdot\|_{C^{1+\gamma_i, \gamma_i/2}(\overline{D})} = \|\cdot\|_{1+\gamma_i}^{\overline{D}}, \quad i = 1, 2, \quad \gamma_1 = \alpha \quad y \quad \gamma_2 = \alpha$$

Para mayor información acerca de estos espacios de funciones ver [8] y [3].

Para una función $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [a, b])$, denotaremos con $\|u\|_{2,p}^{D_0}$ la norma:

$$\|u\|_{2,p}^{D_0} = \left[\int_a^b \int_\Omega \left[|u|^p + \sum_{i=1}^N |D_i u|^p + \sum_{i,j=1}^N |D_{ij} u|^p + |D_t u|^p \right] dx\, dt \right]^{1/p}$$

para $1 < p < \infty$, $D_0 = \overline{\Omega} \times [a, b]$. La norma $\|\cdot\|_{2,p}^{D_0}$ es la norma del espacio de Sobolev $W_p^{2,1}(D_0)$, (ver [7], p.5).

Una *solución clásica* de (0, i), i = 1, 2, es una función $u \in E$, la cual satisface (0, i).

En lo que sigue L denotará un operador de la forma:

$$L[u] = D_t u - \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^N b_i D_i u + c_0 u \right), \tag{0.3}$$

cuyos coeficientes a_{ij}, b_i y c_0 pertenecen a $\mathbb{F}$, $a_{ij} = a_{ji}$ y $c_0 \leq 0$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Los resultados de este artículo son válidos si L es uniformemente elíptico y las funciones involutivas en (0, 1) y (0, 2) son independientes de t.

La función $f(x, t, u, \vec{y})$ satisface las siguientes hipótesis:

(A_1) f es T-periódica en t, es continua y tiene derivadas continuas con respecto a la variable $\vec{y}$.

(A_2) $f(\cdot, \cdot, u, v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{F}$ para todo $u, v_1, \dots, v_N \in \mathbb{F}$.
(A_3) Existe una función $\overline{c} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\left|f(x, t, u, \vec{y})\right| \leq \overline{c}(r)\,(1 + |\vec{y}|^2), \quad \text{si } |u| \leq r.$$

La condición (A_2) se satisface por ejemplo, si f es Hölder continua en t y x, y es localmente Lipschitziana en las variables u y $\vec{y}$.

Una *Supersolución* de (0,1) es una función $\overline{u} \in \mathbb{E}$, tal que: $L[\overline{u}] \geq f(x, t, \overline{u}, \nabla_x \overline{u})$ en $\Omega \times \mathbb{R}$. Una *Subsolución* se define análogamente, cambiando el sentido de la desigualdad.

Nuestro resultado principal sobre (0, 1) es el siguiente:

TEOREMA 1. (Teorema de comparación). *Supongamos que* f *satisface* (A_1) - (A_3) *y que existen* $\overline{u}$ *y* $\underline{u}$, *una supersolución y una subsolución, respectivamente, de* (0, 1) *tales que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *en* $\Omega \times \mathbb{R}$. *Entonces* (0, 1) *admite una solución* $u \in \mathbb{E}$, *tal que*:

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \overline{u}(x, t) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

En la sección 2 estudiamos el problema (0.2). Sobre las funciones h, g y G imponemos las siguientes condiciones:
(C_1) La función $h \in \mathbb{F}$.
(C_2) La función $G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es no negativa, de clase C^1, con la restricción de crecimiento: $|G(\vec{y})| \leq C^*(1 + |\vec{y}|^2)$, para todo $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$, C^* es una constante positiva.
(C_3) La función $g(x, t, u) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es T-periódica en t, g y $\partial g/\partial u$ son continuas y $g(\cdot, \cdot, u) \in \mathbb{F}$ cuando $u \in \mathbb{F}$. También suponemos una condición de tipo Kazdan-Warner:

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{g(x, t, s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s \to -\infty} \frac{g(x, t, s)}{s} \tag{0.4}$$

donde λ_1 es el valor propio principal del problema:

$$L[u] = \lambda u,\ u > 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R},\ u \in \mathbb{E}. \text{ (Ref. [8], Teorema 1).}$$

§1. En esta sección probaremos el Teorema 1. En su demostración utilizaremos los Lemas 1.1 - 1.6. El Lema 1.1 se refiere al problema lineal asociado a (0.1), ver [9], [12]. Posponemos la prueba de los Lemas 1.2 - 1.6 hasta después de la del Teorema 1.

LEMA 1.1. *Para cada* $v \in \mathbb{F}$, *existe una única función* $u \in \mathbb{E}$ *tal que* $L[u] = v$ *en* $\Omega \times \mathbb{R}$. *Además existen dos constantes* $k_1 > 0$ *y* $k_2 > 0$ *tales que:*

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq k_1 \, \|L[u]\|_{\mathbb{F}}, \quad \text{para todo } u \in \mathbb{E} \tag{1.01}$$

$$\|u\|_{C^{1+\sigma,\sigma/2}(\overline{\Omega}\times[0,T])} \leq k_2 \, \|L[u]\|_{\infty}, \text{ para todo } u \in \mathbb{E} \tag{1.02}$$

(k_2 depende de $\sigma \in (\alpha, 1)$).

LEMA 1.2. *Si* $f_0(x, t, u, \vec{y}) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *es una función que satisface:*

(B_1) f_0 *es* T-*periódica en* t *y acotada en su dominio.*

(B_2) $f_0(\cdot, \cdot, u, v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{F}$ *para todo* $u, v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{F}$,

entonces (0.1) *admite una solución* $u \in \mathbb{E}$, *para* f *reemplazada por* f_0.

La condición de ser f acotada en su dominio es muy exigente. Mostraremos que las hipótesis (A_1) - (A_3) y la existencia de una super y una subsolución de (0.1), permiten restringir f a un dominio adecuado en el cual es acotada.

LEMA 1.3. *Supongamos que* f *satisface* (A_1) - (A_3) *y que existen* $\overline{u}$ *y* $\underline{u}$ *como en el Teorema 1. Sea* $u \in \mathbb{E}$ *una solución del problema*

$$L[u] = f(\cdot, \cdot, \rho u, \nabla_x u) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}$$

donde el operador $\rho: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ *se define así:*

$$\rho(u)\ (x,t) = \begin{cases} \overline{u}(x,t) & \text{si} \quad u(x,t) > \overline{u}(x,t) \\ u(x,t) & \text{si} \quad \underline{u}(x,t) \leq u(x,t) \leq \overline{u}(x,t) \\ \underline{u}(x,t) & \text{si} \quad \underline{u}(x,t) < u(x,t). \end{cases}$$

Entonces $\underline{u}(x,t) \leq u(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$. *Así* $u = \rho u$ *en* $\Omega \times \mathbb{R}$ *y* u *solución de* (0.1).

Del Lema 1.3 obtenemos una forma de restringir la tercera variable de f. Los lemas siguientes son técnicos y serán utilizados para determinar un dominio adecuado para el gradiente $\nabla_x u$ de las posibles soluciones u de (0.1).

LEMA 1.4. *Sea* $p > N$. *Entonces existe una constante* $\overline{k_1} > 0$, $\overline{k_1} = \overline{k_1}(\Omega, N, p, T)$ *tal que si* $u \in \mathbb{E}$ *entonces:*

$$\left\| |\nabla_x u|^2 \right\|_p^{\overline{D}} \leq \overline{k_1}\ \|u\|_\infty^{\overline{D}} \|u\|_{2,p}^{\overline{D}}. \tag{1.03}$$

En lo que sigue haremos uso de un resultado clásico de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (Ref. [7], p. 343): *Si* $p > (N + 2)/(1 - \alpha)$: $\sigma \in (\alpha, 1 - (N + 2)/p)$, existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{1+\sigma}^{\overline{D}} \leq C_1 \|u\|_{2,p}^{\overline{D}}, \text{ para todo } u \in \mathbb{E}. \tag{1.04}$$

Observación 1.1. Si $u \in \mathbb{E}$ es solución de (0.1), entonces si definimos $b(x,t) := (f(x,t,u,\nabla_x u) + u(x,t))/(1 + |\nabla_x u|^2)$, u satisface la ecuación:

$$(L + 1)[u] = b(x,t)\left(1 + |\nabla_x u(x,t)|^2\right) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

LEMA 1.5. *Sean* $b, h \in \mathbb{F}$ *y* $n_1, n_2, s \in [0,1]$, $n_2 \geq n_1$, $p > N$. *Sea* $u_i \in \mathbb{E}$, $i = 1, 2$ *una solución del problema:*

$$(L + 1)[u_i] = s\,b(n_i + |\nabla_x u_i|^2) + h \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}$$

y sea $v = u_2 - u_1$. *Entonces*

i) $\|v\|_\infty^{D} \leq s\|b\|_\infty^{\overline{D}}(n_2 - n_1)$.

ii) *Existe una constante* $k_3(\Omega, T, p, N)$ *tal que*

$$\|v\|_{2,p}^{D} \leq sk_3 \|b\|_{\infty}^{\overline{D}} \Big(2s\overline{k_1} \, \|b\|_{\infty}^{\overline{D}} \, (n_2 - n_1) \, \|v\|_{2,p}^{\overline{D}} + \overline{k_1} \, \|u_1\|_{2,p}^{\overline{D}} \, \|u_1\|_{\infty}^{\overline{D}} + (n_2 - n_1) \, |D|^{1/p} \Big) \tag{1.05}$$

donde $|D|$ *es la medida de Lebesgue de* D, $\overline{k_1}$ *es la constante del Lema 1.4.*

LEMA 1.6. Dado $b \in \mathbb{F}$, para todo $s > 0$ y $n \in [0, 1]$, existe una solución $u^{s,n}$ del problema:

$$(L + 1)\left[u^{s,n}\right] = sb(n + |\nabla_x u^{s,n}|^2) \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}, \; u^{s,n} \in \mathbb{E} \tag{1.06}$$

y para todo $s_0 > 0$ existe una función $\gamma_{s_0}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, creciente y continua, la cual depende de L, Ω, T, N, p y s_0, $(p > (N + 2)/(1 - \alpha))$ tal que:

$$\|u^{s,n}\|_{2,p}^{\overline{D}} \leq \gamma_{s_0}\left(\|b\|_{\infty}^{\overline{D}}\right), \text{ para todo } n \in [0, 1] \text{ y } s \in [0, s_0). \tag{1.07}$$

Prueba del Teorema 1. Sean $p > (N + 2)/(1 - \alpha)$, $\sigma \in (\alpha, 1 - \frac{N+2}{p})$, $\gamma = \gamma_s$, $(s = 1)$, $M = \max\{\|\overline{u}\|_{\infty}^{\overline{D}}, \|\underline{u}\|_{\infty}^{\overline{D}}\}$, $M_1 = \max\{C_1 N \gamma(M + \overline{c}(M)), \|\nabla_x \overline{u}\|_{\infty}^{\overline{D}}, \|\nabla_x \underline{u}\|_{\infty}^{\overline{D}}\} + 1$ y $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ una función tal que $\phi(\vec{y}) \in [0, 1]$, $\phi(\vec{y}) = 1$ si $|\vec{y}| < M_1$ y $\phi(\vec{y}) = 0$ si $|\vec{y}| > M_1 + 1$.

Definimos las funciones f_1 y f_2: $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, así:

$$f_1(x, t, u, \vec{y}) := f(x, t, u, \phi(\vec{y})\vec{y}) \text{ y}$$

$$f_2(x, t, u, \vec{y}) = \begin{cases} f_1(x, t, \overline{u}(x,t), \vec{y}) & \text{si } u > \overline{u}(x,t) \\ f_1(x, t, u, \vec{y}) & \text{si } \underline{u}(x,t) \leq u \leq \overline{u}(x,t) \\ f_1(x, t, \underline{u}(x,t), \vec{y}) & \text{si } \underline{u}(x,t) > u \end{cases}$$

Por el Lema 1.2, existe $u \in \mathbb{E}$, solución del problema

$$\begin{aligned} L[u] &= f_2(\cdot, \cdot, u, \nabla_x u) = f_1(\cdot, \cdot, \rho u, \nabla_x u) \\ &= f_1(\cdot, \cdot, u, \nabla_x u). \end{aligned} \tag{1.08}$$

La última igualdad en (1.08) se sigue del Lema 1.3 y así $\|u\|_{\infty}^{\overline{D}} \leq M$. Observemos que f_1 satisface (A_1) - (A_3), en particular la función $\overline{c}$ de (A_3) es la misma que para f. Entonces por (1.04) la observación 1.1 y (1.07): $\|u\|_{1+\alpha}^{\overline{D}} \leq C_1\, \gamma(M + \overline{c}(M))$ y $\|\nabla_x u\|_{\infty}^{\overline{D}} < M$. Finalmente por la definición de ϕ y (1.08), u es solución de (0.1).

Prueba del Lema 1.2. Sean $\sigma \in (\alpha, 1)$ y $T: \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_1$ el operador compacto definido así: $T[u] = i \circ L^{-1}(f_0(\cdot, \cdot, u, \nabla_x u))$, para todo $u \in \mathbb{E}_1$. T es compacto por (1.02) y la compacidad de la inclusión $i: \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_1$ Además Existe una constante $k_0 > 0$ tal que

$$\left\|T[u]\right\|_{1+\alpha}^{\overline{D}} \leq k_0 \left\|T[u]\right\|_{1+\sigma}^{\overline{D}} \leq k_0 k_2 \sup_{u \in \mathbb{E}_2} \left|f_0(\cdot, \cdot, u, \nabla_x u)\right| = \overline{R}$$

Entonces por el Teorema de Punto Fijo de Schauder, existe $u \in \mathbb{E}_1$, $\|u\|_{1+\alpha}^{\overline{D}} \leq \overline{R}$ tal que $u = T[u]$, es decir, $L[u] = f_0(\cdot, \cdot, u, \nabla_x u)$ en $\Omega \times \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{E}$.

Prueba del Lema 1.3. Supongamos que $u(x_0, t_0) > \overline{u}(x_0, t_0)$ para algún $(x_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Sean $Q := \{(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : u(x, t) > \overline{u}(x, t)\}$ y A la componente conexa en Q que contiene a (x_0, t_0). Si denotamos con $w := \overline{u} - u$, entonces $w = 0$ en $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ y puesto que para todo $(x, t) \in A$

$$\begin{aligned} L[w](x, t) &\geq f(x, t, \overline{u}, \nabla_x u) - f(x, t, \overline{u}, \nabla_x u) \\ &= \sum_{i=1}^{N} D_{y_i} f(x, t, \overline{u}, \xi(x, t))\, D_{x_i} w(x, t), \end{aligned}$$

donde $\xi(x, t)$ está en el segmento que une a $\nabla_x u(x, t)$ y $\nabla_x \overline{u}(x, t)$, por el Principio del Máximo para Ecuaciones Diferenciales Parabólicas (Ref. [11]), $\overline{u} \geq u$ en A. En contradicción con la suposición sobre (x_0, t_0). Similarmente probamos que $\underline{u} \leq u$ en $\Omega \times \mathbb{R}$.

Prueba del Lema 1.4. Sea $u \in C^{2+\alpha,\, 1+(\alpha/2)}(\overline{D}_0)$. Para cada $t \in [a, b]$, si definimos $u^t(x) := u(t, x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, entonces $u^t \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$. Por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (ver [4], Teorema 1.10.1), existe constante $C_2 = C_2(\Omega, N, p)$ tal que

$$\int_\Omega \left|D_{x_i} u^t\right|^{2p} dx$$
$$\leq C_2^{2p} \left\|u^t\right\|_\infty^\Omega \int_\Omega \left(\left|u(x, t)\right|^p + \sum_{i=1}^N \left|D_{x_i} u(x, t)\right|^p + \sum_{i,j=1}^N \left|D_{x_i x_j} u(x, t)\right|^p \right) dx$$

para todo $t \in [a, b]$. Entonces integrando sobre $[a, b]$ y sumando obtenemos (1.03).

Prueba del Lema 1.5. Sean $v := u_2 - u_1$, $m = s\|b\|_\infty^{\overline{D}} (n_2 - n_1)$ y $\tilde{v} := m - v$. Entonces v satisface la ecuación

$$\begin{aligned}(L + 1)\, v &= sb(n_2 - n_1) + \left|\nabla_x u_2\right|^2 - \left|\nabla_x u_1\right|^2 \\ &= sb(n_2 - n_1) + \sum_{i=1}^N sbg_i D_i v\end{aligned} \tag{1.09}$$

donde

$$g_i(x, t) = \int_0^1 2\left(\theta D_{x_i} v(x, t) + D_{x_i} u_1(x, t)\right) d\theta.$$

Puesto que

$$(L + 1)(\tilde{v}) - \sum_{i=1}^N sbg_i D_{x_i} \tilde{v} \geq L(m) \geq 0 \ \text{ en } \Omega \times \mathbb{R} \text{ y } \tilde{v}/\partial\Omega \times \mathbb{R} = m,$$

el Principio del Máximo implica que $\tilde{v} \geq 0$ en $\Omega \times \mathbb{R}$. Similarmente probamos que $v \geq -m$.

Prueba de ii). Puesto que v satisface (1.09) y $v = 0$ en $\Omega \times \mathbb{R}$ se sigue de un conocido resultado (ver [7], Teorema 4.9.1) que existe una constante $k_3 = k_3(\Omega, N, p, T)$ tal que

$$\|v\|_{2,p}^{\overline{D}} \leq k_3 \left\|(L + 1)[v]\right\|_p^{\overline{D}}.$$

Por un simple cálculo y utilizando (1.03) obtenemos (1.05)

Prueba del Lema 1.6. Sean $b \in F$ y $\overline{A} = \{\overline{s}$: el problema (1.06) tiene solución para todo $s \in [0, \overline{s}]$ y $n \in [0, 1]\}$, Probaremos que $\overline{A}$ es no vacío y no es acotado. Sea $\sigma \in (\alpha, 1 - (N + 2)/p)$,

definimos $H : \mathbb{R} \times \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ así: $H(s, u) = i \circ (L + 1)^{-1} (sb(n + \|\nabla_x u\|^2)$ donde
$i : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_2$ es la inyección natural. Sea $s^* \leq (2k_2 \|b\|_\infty^{\overline{D}} (1 + N))^{-1}$, entonces por (1.02), tenemos que $\|H(s, u)\|_{\mathbb{E}_2} \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{E}_2$ tal que $\|u\|_{\mathbb{E}_2} \leq 1$, $s \in [0, s^*]$ y $n \in [0, 1]$. Puesto que el operador $H(s, \cdot)$: $\mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ es completamente continuo, se sigue del Teorema de Punto Fijo de Schauder que $s^* \in \overline{A}$.

Sean $s_0 > 0$, $\bar{s} \in (0, s_0)$ y $n_0 = 0 < n_1 < \ldots n_j = 1$ con $n_k - n_{k-1} \leq (4 s_0^2 k_3 \overline{k_1} (\|b\|_\infty^{\overline{D}})^2)^{-1}$. ($k_3$ es la constante dada en el Lema 1.5). Supongamos que existen $u_0, u_1, \ldots, u_j \in \mathbb{E}$, soluciones de (1.06) para $s = \bar{s}$ y $n = n_k$, $k = 0, \ldots, j$, respectivamente. Denotemos con $v_k := u_k - u_{k-1}$. De (1.05) obtenemos:

$$\|v_k\|_{2,p}^{\overline{D}} \leq 2 k_3 s_0 \|b\|_\infty^{\overline{D}} \left(\overline{k_1} \, \|u_{k-1}\|_{2,p}^{\overline{D}} \|u_{k-1}\|_\infty^{\overline{D}} + |D|^{1/p} \right). \qquad (1.10)$$

Construimos γ_{s_0} por recurrencia. Observemos que $u_1 = v_1$ y que

$$\|u_1\|_{2,p}^{\overline{D}} \leq 2 k_3 s_0 \|b\|_\infty^{\overline{D}} |D|^{1/p} = \gamma_1 \|b\|_\infty^{\overline{D}}.$$

Utilizando (1.10) j veces obtenemos $\gamma_{s_0} := \gamma_j$ y γ_{s_0} satisface (1.07).

Para probar que $\overline{A}$ es no acotado, usamos un argumento de continuación. Supongamos que $\overline{A}$ es acotado y sea $s_1 := \sup \overline{A}$. Probaremos primero que $s_1 \in \overline{A}$. Sea $\{s_k\}_{k=1}^\infty$, una sucesión en $(0, s_1)$ que converge hacia s_1 y sea $\{u_k\}$ una sucesión en $\mathbb{E}$ tal que u_k satisface (1.06) para $s = s_k$ y $n = 1$. Por (1.07) y (1.04) la sucesión $\{|\nabla_x u_k|^2\}$ es acotada en $C^{\sigma, \sigma/2}(\overline{D})$. Entonces de (1.01) obtenemos que para una subsucesión:

$$\|u_k - u_m\|_{2+\alpha}^{\overline{D}} \leq k_1 \|b\|_\alpha^{\overline{D}} \Big(|s_k - s_m| + s_k \big\| |\nabla_x u_k|^2 - |\nabla_x u_m|^2 \big\|_\alpha$$

$$+ |s_k - s_m| \, \big\| |\nabla_x u_m|^2 \big\|_\alpha \Big) \to 0 \text{ cuando } k, m \to \infty.$$

Por tanto existe $\bar{u} \in \mathbb{E}$ tal que $u_k \to \hat{u}$ en $\mathbb{E}$ y $\hat{u}$ satisface (1.06) para $s = s_1$ y $n = 1$ y por tanto $s_1 \in \overline{A}$.

Si $\partial H/\partial u$ es la derivada de Frechet del operador $u \to H(s, u)$, por un simple cálculo obtenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial u}(s, u)v = i \circ (L+1)^{-1}\left(2sb\sum_{i=1}^{N} D_i u D_i v\right),$$

para todo $v \in \mathbb{E}_2$. Denotaremos con $F(s, u) := u - H(s, u)$. A partir de (1.04) obtenemos que $\partial F/\partial u$ es continuo y puesto que $\frac{\partial F}{\partial u}(s, \hat{u})$ es un operador lineal inyectivo y $\frac{\partial H}{\partial u}(s_1, \hat{u})$ es compacto, por la alternativa de Fredholm, $\frac{\partial F}{\partial u}(s_1, \hat{u})$ es un automorfismo sobre $\mathbb{E}_2$. Entonces por el teorema de la Función Implícita existe una vecindad G de s_1 tal que para todo $\hat{u} \in G$, el problema (1.06) tiene solución para $s = \hat{u}$ y $n = 1$. Esto contradice al escogencia de s_1 y por tanto $\bar{A}$ no es acotado.

COROLARIO 1.1. *Dados* $\bar{b}$ *y* $h \in \mathbb{F}$, *para todo* $s > 0$ *y* $n \in [0, 1]$ *existe una solución* $v^{s,n}$ *del problema:*

$$(L+1)v^{s,n} = s\bar{b}\left(n + \left|\nabla_x v^{s,n}\right|^2\right) + h \text{ en } \Omega \times \mathbb{R},\ v^{s,n} \in \mathbb{E}. \quad (1.11)$$

Demostración. Si v es solución de (1.11) para

$$b = \bar{b} + h\left(\left(n + \left|\nabla_x v\right|^2\right)s\right)^{-1},$$

por el Lema (1.6) se tiene que:

$$\|v\|_{2,p}^{\bar{D}} \leq \gamma\left(\|b\|_{\infty}^{\bar{D}} + \|h\|_{\infty}^{\bar{D}}\right).$$

Con un argumento similar al utilizado en el Lema 1.6 se demuestra este corolario.

§2. En esta sección estudiaremos el problema (0.2). Este generaliza el problema (16) en [8], en el sentido de que la no linealidad depende de $\nabla_x u$. En nuestra prueba aplicamos básicamente el Teorema 1.1, siguiendo el procedimiento presentado por Lazer en

[8].

Con el fin de definir el operador adjunto L^* de L en $L_2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, suponemos que los coeficientes de L, adicionalmente satisfacen:

$$a_{ij} \in C^{2+\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) \text{ y } b_i \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}), i, j = 1, \dots N.$$

El operador L^* está dado por:

$$L^*[u] = -\left(D_t u + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} \left(b_i^* D_i u \right) + c^* u \right),$$

donde

$$b_i^* = -b_i + 2 \sum_{j=1}^{N} D_i a_{ij} \quad \text{y} \quad c^* = c - \sum_{i=1}^{N} \left(D_i b_i \right) + \sum_{i,j=1}^{N} \left(D_{ij} a_{ij} \right).$$

La condición (0.4) puede ser reescrita en la forma equivalente: Existen $\overline{c}_1, \overline{c}_2 > 0$ con $\lambda_1 > \overline{c}_1 > 0$ tales que

$$g(x, t, s) - \lambda_1 s \geq \overline{c}_1 |s| - \overline{c}_2 \text{ para todo } (x, t, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \quad (2.01)$$

Sean ϕ la solución del problema $L[\phi] = \lambda_1 \phi$, $\phi > 0$, en $\Omega \times \mathbb{R}$, $\phi \in \mathbb{E}$ tal que $\|\phi\|_{L_2}^{D} = 1$ y ϕ^* la solución del problema $L^* \phi^* = \lambda_1 \phi^*$, $\phi^* > 0$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $\phi^* \in \mathbb{E}$,

$$\int_0^T \int_\Omega \phi^* \phi \, dx \, dt := \left\langle \phi^*, \phi \right\rangle_2 = 1.$$

(ver [8], teorema 2). Si $N^* := \{\xi \in \mathbb{F} : \langle \xi, \phi^* \rangle_2 = 0\}$, entonces toda función h en $\mathbb{F}$ puede ser escrita como $h = s\phi + h_1$, donde $s = \langle h, \phi^* \rangle_2$ y $h_1 \in N^*$. Así, el problema (0.2) puede reescribirse como:

$$L[u] = g(\cdot, \cdot, u) + G(\nabla_x u) + s\phi + h_1 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}, u \in \mathbb{E}$$

con $h_1 \in N^*$. El principal resultado de esta sección está contenido en el siguiente Teorema.

TEOREMA 2.1. *Para cada,* $h_1 \in N^*$, *existe un número real* $s^*(h_1)$ *tal que el problema* (2.02) *tiene solución si* $s < s^*(h_1)$ *y no tiene solución si* $s > s^*(h_1)$.

La prueba de este teorema es consecuencia directa de los lemas siguientes. Por simplicidad, para $h_1 \in N^*$ denotaremos con $\overline{B} := \{s^* \in \mathbb{R} : (2.02)$ tiene solución para $s = s^*\}$.

LEMA 2.1. *Si* $\overline{s} \in \overline{B}$, *entonces* $s \in \overline{B}$ *para todo* $s < \overline{s}$.

LEMA 2.2. *El conjunto* $\overline{B}$ *es no vacío.*

LEMA 2.3. $\overline{B}$ *es acotado.*

Es evidente que $s^*(h_1) = \sup B$.

Prueba del Lema 2.1. Suponemos que $\overline{s} \in \overline{B}$. Entonces la solución $\overline{u} \in \mathbb{E}$ de (2.02) correspondiente a $\overline{s}$ es una supersolución de este mismo problema, para todo $s \leq \overline{s}$. Así. de acuerdo al Teorema 1.1 es suficiente encontrar una subsolución $\underline{u}_s$ de (2.02) para cada $s \leq \overline{s}$, tal que $\underline{u}_s \leq \overline{s}$ en $\Omega \times \mathbb{R}$. Sean $s < \overline{s}$, $m = \min\{h_1(x, t) + s\phi(x, t) : (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}\}$ y $\hat{\lambda} = \lambda_1 - \overline{c}_1$. Es conocido (ver [8], Teorema 3) que existe una solución $\underline{u}_s \in \mathbb{E}$ del problema:

$$L[u] = \hat{\lambda} u + (m - 1 - \overline{c}_2) \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, u \in \mathbb{E},$$

la cual a su vez por la desigualdad (2.01) es una solución de (2.02). Finalmente por el Principio del Máximo $\overline{u} \geq \underline{u}_s$ en $\Omega \times \mathbb{R}$, puesto que

$$L\left[\overline{u} - \underline{u}_s\right] \geq (\lambda_1 - c_1)\,(\overline{u} - \underline{u}_s) + (\overline{s} - s)\phi \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}..$$

Prueba del Lema 2.2. Denotaremos con v la solución del problema:

$$\begin{cases} (L + 1)v = c^* \left(1 + \left|\nabla_x v\right|^2\right) + g(x, t, 0) + h_1(x, t) + c^* & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ v \in \mathbb{E}, \end{cases}$$

la cual existe por el Corolario 1.1 (c^* es la constante en (C_2)).

Para todo $s \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\tilde{F}(x, t) := g(x, t, 0) - g(x, t, v) + c^* - v,$$

satisface

$$\tilde{F}(x, t) - s\phi \leq L[v] - g(\cdot, \cdot, v) - G(\nabla_x v) + h_1 - s\phi, \qquad (2.03)$$

en $\Omega \times \mathbb{R}$. Puesto que $\tilde{F}$ es continua, T-periódica en $\Omega \times \mathbb{R}$ y positiva en $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, existe una vecindad $\mathcal{O}$ de $\partial\Omega$ tal que $\tilde{F}(x, t) > 0$ sobre $(\mathcal{O} \cap \overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$. Por otra parte existe $s_0 < 0$ tal que $\tilde{F}(x, t) - s_0\phi(x, t) > 0$ en $(\overline{\Omega} - \mathcal{O}) \times \mathbb{R}$. Entonces de (2.03) se sigue que v es una supersolución de (2.02) para $s = s_0$. Podemos encontrar una subsolución para este caso, similarmente a como lo hicimos en la prueba del Lema 2.1, tomando $m = \min\{h_1(x, t) + s_0\phi(x, t)\}$. Consecuentemente por el Teorema 1.1, $s_0 \in \overline{B}$.

Prueba del Lema 2.3. Supongamos que $u \in \mathbb{E}$ satisface (2.02) para algún $s \in \mathbb{R}$. Entonces $L[u](x, t) - g(x, t, u) \geq h_1(x, t) + s\phi$ en $\Omega \times \mathbb{R}$. Multiplicando a ambos lados de esta desigualdad por ϕ^* e integrando sobre $\Omega \times [0, T]$, obtenemos usando (2.01) que

$$s = \int_0^T \int_\Omega (h_1 + s\,\phi)\,\phi^*\, dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega (\lambda_1 u - g(x,t,u)\phi^*\, dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega \overline{c}_2\, \phi^* dxdt$$

Consecuentemente $\overline{B}$ es acotado.

REFERENCES

[1] AMANN, H., *Periodic Solutions of Semilinear Parabolic Equations,* Nonliear Analysis, a volume in honor of E. H. Rothe, Academic Press, 1-29, 1978.

[2] AMANN, H. Y CRANDALL, M. G., *On some existence theorems for semi-linear elliptic equations,* Indiana University Mathematics Journal, Vol. 27, N° 5, (1978).

[3] FRIEDMAN, A., *Partial Differencial Equations, of Parabolic*

Type, Prentice Hall, Inc. Englewood, Cliffs, N. J., 1964.

[4] FRIEDMAN, A., *Partial Differencial Equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, 1969.

[5] KAZDAN, J. L. Y KRAMER, R. J., *Invariant criteria for existence of solutions to second order quasilinear elliptic equations*, Comm, Pure Appl. Math. XXXI (1978), 619-645.

[6] KOLESOV, JU S., *A test for the existence of periodic solutions to parabolic equations*, Sovieth Math. Dokl. 7 (1966), 1318-1320.

[7] LADYZENSAKAJA, O. A., SOLONNIKOV, V. A. AND URALCEVA, N. N., *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1968, (Translated from the Russian).

[8] LAZER, A. C., *Some Remarks on Periodic Solutions of Parabolic Differential Equations*, Dynamical Systems II, ed. Bednarek-Cesari, Academic Press, 1982, p. 227-246.

[9] ORTEGA, L., *Sobre las soluciones periódicas del problema de Dirichlet para ecuaciones de tipo parabólico*, Rev. Colombiana de Matemáticas. Vol. XIX, (1985), 233-250.

[10] POHOZAEV, S. I., *On equations of the form $\Delta u = f(x, u\ Du)$.* Math. USSR Sbornik. 41, (1982), N°2.

[11] PROTTER, M. AND WEINBERGER, H., *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood, Cliffs, N. J., 1967.

[12] SMULEV, I., *Periodic solutions of the first boundary problem for parabolic equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (216-229), (1969), UDC 517. 94.1.9.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Santafé de Bogotá, D. C., Colombia

(Recibido en agosto de 1991, la versión revisada en marzo de 1992).