Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 37 (2003), páginas 25–36

Soluciones no triviales para un problema de Dirichlet asintóticament lineal

Jorge Cossio
Carlos Vélez

Universidad Nacional de Colombia, Medellín

Abstract. We prove that a semilinear elliptic boundary value problem has at least three nontrivial solutions when the range of the derivative of the nonlinearity includes at least the first two eigenvalues. Two of them are of one sign (positive and negative, respectively), and the third solution changes sign. Extensive use is made of the Mountain Pass Theorem and the Leray-Schauder degree.

Keywords and phrases. Semilinear elliptic equation, sign-changing solutions, Leray-Scauder degree.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 35J20. Secondary: 35J25, 35J60.

Resumen. Se demuestra que un problema elíptico semilineal tiene por lo menos tres soluciones no triviales cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios. Dos de las soluciones son de un signo (positivo y negativo, respectivamente) y la tercera solución cambia de signo. En la demostración se usan, de manera esencial, el Teorema del Paso de la Montaña y la teoría de grado de Leray-Schauder.

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por Colciencias, Proyecto Código 1118-05-11412 Contrato 063-2002.

1. Introducción

En este trabajo se estudia la existencia de soluciones múltiples para el problema de Dirichlet no lineal

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ con frontera suave, Δ es el operador de Laplace y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y f es asintóticamente lineal, es decir,

$$f'(\infty) := \lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Sean $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ la sucesión de valores propios de $(-\Delta)$ con condición cero en la frontera de Ω y $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \cdots$ la sucesión de funciones propias correspondientes.

En este artículo se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Si $f'(0) < \lambda_1$ y $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, con k un entero par, $k \geq 2$, entonces el problema (1) tiene por lo menos tres soluciones no triviales, de las cuales una es positiva, otra es negativa y la tercera cambia de signo.*

La existencia de soluciones al problema (1) ha sido ampliamente estudiada por muchos autores (ver [4], [5], [6], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [18], [19], [20], [21]). A. Castro y J. Cossio en [9] estudian la existencia de soluciones en el caso radialmente simétrico cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los primeros j valores propios y Ω es la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$; allí se emplean técnicas de teoría de bifurcación y se utiliza el hecho de que la primera ecuación que aparece en (1) en el caso radialmente simétrico se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. Los mismos autores estudian el problema (1) en [10], cuando Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios y la derivada de la no linealidad está acotada, lo cual permite utilizar el método de reducción de Lyapunov-Schmidt (ver [7]) para reducir la solubilidad del problema (1) a un problema finito dimensional.

A diferencia del teorema principal de [10], el Teorema 1.1 no depende del acotamiento global de la derivada de la no linealidad. Su demostración usa el Teorema del Paso de la Montaña, debido a A. Ambrosetti y P. Rabinowitz (ver [5]), para probar la existencia de soluciones de un signo al problema (1) y la teoría de grado de Leray-Schauder para demostrar la existencia de una solución que cambia de signo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se demuestra la existencia de dos soluciones que no cambian de signo y en la Sección 3 se prueba la existencia de una solución que cambia de signo.

2. Existencia de dos soluciones que no cambian de signo

Sean $f^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f^+(t) := \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ f'(0)\, t, & t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

y $F^+(t) = \int_0^t f^+(s)\, ds$. Sean H el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (ver [1]) y $J^+ : H \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J^+(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F^+(u) \right) dx. \tag{3}$$

Como $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, f es sublineal. Por lo tanto J^+ es de la clase $C^1(H, \mathbb{R})$ (ver [19]) y

$$DJ^+(u)\, v = \int_\Omega \left(\nabla u . \nabla v - f^+(u)\, v \right) dx, \quad \forall u \in H, \ \forall v \in H. \tag{4}$$

Recordamos que $u \in H$ es una solución débil de (1), con f reemplazado por f^+, si

$$\int_\Omega (\nabla u . \nabla \varphi - f^+(u)\, \varphi)\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H.$$

Por lo tanto u es una solución débil de (1), con f reemplazado por f^+, si y sólo si u es un punto crítico J^+.

Para demostrar la existencia de un punto crítico de J^+ utilizaremos el Teorema del Paso de la Montaña (ver [5]). A continuación probaremos que se satisfacen las hipótesis del mencionado teorema. Claramente $J^+(0) = 0$.

Lema 2.1. *Existen $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ tales que*

$$\|u\|_H = \rho \Longrightarrow J^+(u) \geq \alpha. \tag{5}$$

Demostración. Como $f'(0) < \lambda_1$ existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$F^+(\xi) = \int_0^\xi f^+(t)\ dt \leq (\lambda_1 - \varepsilon) \frac{\xi^2}{2}, \quad \forall \xi \in (-\delta, \delta). \tag{6}$$

Como f es sublineal, existen constantes $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ tales que, si $\eta > 0$ entonces

$$|F^+(\xi)| \leq \left(\frac{a_1}{2\delta^\eta} + \frac{a_2}{\delta^{\eta+1}} \right) |\xi|^{2+\eta} =: P(\delta, \eta)\, |\xi|^{2+\eta}, \quad \text{si} \quad |\xi| \geq \delta. \tag{7}$$

Sea $u \in H$. Sean $A_1 := \{x \in \Omega \ / \ |u(x)| < \delta\}$ y $A_2 := \{x \in \Omega \ / \ |u(x)| \geq \delta\}$. Usando (6) y (7) se tiene que

$$\begin{aligned} J^+(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \int_{A_1} F^+(u)\ dx - \int_{A_2} F^+(u)\ dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} \int_\Omega u^2\, dx - P(\delta, \eta) \int_\Omega |u|^{2+\eta}\, dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Sea $0 < \eta \leq \frac{4}{N-2}$. De (8), usando la Desigualdad de Poincaré (ver [7]) y el Teorema de Encaje de Sobolev (ver [1]) de H en $L^{2+\eta}(\Omega)$ (ver [1]), existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J^+(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2\lambda_1}\|u\|_H^2 - C\,P(\delta,\eta)\|u\|_H^{2+\eta} \\ &= \|u\|_H^2\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda_1} - C\,P(\delta,\eta)\|u\|_H^{\eta}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

El Lema 2.1 se sigue de (9). ☑

Lema 2.2. *Existe $\hat{u} \in H$ tal que $\|\hat{u}\|_H > \rho$ y $J^+(\hat{u}) < 0$.*

Demostración. Como $f'(\infty) > \lambda_2$, existen constantes $a_3 > \lambda_2$ y a_4 tales que

$$F^+(\xi) \geq a_3\frac{\xi^2}{2} + a_4, \quad \forall \xi \geq 0. \tag{10}$$

Sea φ la primera función propia de $-\Delta$, con condición de Dirichlet cero en la frontera. Sea $t \geq 1$. Por la definición de J^+ y (10), se tiene

$$\begin{aligned} J^+(t\varphi) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\|\nabla(t\varphi)\|^2 - F^+(t\varphi)\right)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2 dx - \frac{t^2 a_3}{2}\int_\Omega \varphi^2 dx - a_4|\Omega| \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2 dx - \frac{t^2 a_3}{2}\int_\Omega \varphi^2 dx - a_4|\Omega|, \end{aligned} \tag{11}$$

Como

$$\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2 dx = \int_\Omega \lambda_1\,\varphi^2 dx. \tag{12}$$

De (11) y (12) se tiene

$$J^+(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a_3)\int_\Omega \varphi^2 dx - a_4|\Omega|. \tag{13}$$

Usando (13) y recordando que $a_3 > \lambda_1$ se obtiene

$$J^+(t\varphi) \to -\infty, \quad t \to +\infty,$$

de donde se sigue el lema. ☑

Demostraremos a continuación que el funcional J^+ satisface la condición de Palais-Smale.

Lema 2.3. *El funcional J^+ satisface la condición de Palais-Smale. Es decir, dada una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que $\{J^+(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $DJ^+(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que $\{J^+(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y

$$DJ^+(u_n) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Según la proposición B.35 en [19] basta probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para obtener la condición de Palais-Smale. Supóngase, razonando por el absurdo, que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada. Entonces, existe una subsucesión, que por abuso de notación llamaremos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\|u_n\|_H \to +\infty$. Defínase la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} f'(\infty)\ t, & t \geq 0, \\ f'(0)\ t, & t < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Claramente h es continua y, por la definición de f^+,

$$f^+(t) = h(t) + \gamma(t) \tag{15}$$

donde

$$\frac{\gamma(t)}{t} \to 0 \quad \text{cuando } |t| \to +\infty. \tag{16}$$

Como $\frac{DJ^+(u_n)}{\|u_n\|_H} \to 0$ cuando $n \to \infty$, de (4) y (15) se sigue que para cada $v \in H$,

$$\int_\Omega \left(\nabla \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H} \right) . \nabla v - \frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H} v - \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right) dx \longrightarrow 0. \tag{17}$$

A continuación se demuestra que

$$\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right) dx \longrightarrow 0, \quad \forall v \in H. \tag{18}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por (16), existe $M_2 > 0$ tal que si $|t| \geq M_2$ entonces

$$\left| \frac{\gamma(t)}{t} \right| < \varepsilon. \tag{19}$$

Por la continuidad de γ, existe $k > 0$ tal que

$$|\gamma(t)| \leq k, \quad \forall t \in [-M_2, M_2]. \tag{20}$$

Entonces, para $v \in H$ fijo, teniendo en cuenta (19), (20), la Desigualdad de Hölder y la continuidad del encaje $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right) dx \right| &\leq \int_{|u_n|>M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right| dx + \int_{|u_n|\leq M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|u_n\|_H} \|u_n\|_2 \|v\|_2 + \frac{k}{\|u_n\|_H} \|v\|_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \qquad (21) \\ &\leq \varepsilon\, C\ \|v\|_2 + \frac{k\ |\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\|u_n\|_H} \|v\|_2 . \end{aligned}$$

Como $\frac{k\ |\Omega|^{\frac{1}{2}}\ \|v\|_2}{\|u_n\|_H} \to 0$, $n \to \infty$, de (21) se sigue (18).

Por (17) y (18) se obtiene

$$\int_{\Omega}\left(\nabla\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right).\nabla v-\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}v\right)dx\longrightarrow 0,\quad \forall v\in H. \tag{22}$$

Puesto que $\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, existe una subsucesión, que por abuso de notación se escribirá igual, tal que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\rightharpoonup\omega \quad \text{en } H \tag{23}$$

para algún $\omega\in H$. Dado que el encaje $H\hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto,

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\longrightarrow\omega \quad \text{en } L^2(\Omega). \tag{24}$$

A continuación se demuestra que $\omega\neq 0$. Supóngase que $\omega=0$. Es claro que

$$\left|\frac{DJ^+(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right|\leq\frac{\|DJ^+(u_n)\|_{H^*}}{\|u_n\|_H}\longrightarrow 0. \tag{25}$$

Por lo tanto, por (4) y (25)

$$\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right\|_H^2-\int_{\Omega}\left[\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{u_n}{\|u_n\|_H}+\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right]dx\longrightarrow 0. \tag{26}$$

Razonando como en (18) se tiene

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)dx\longrightarrow 0. \tag{27}$$

De (24) y la hipótesis $\omega=0$ se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega}\left(\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)dx\right| \\
&\leq\left|\int_{u_n\geq 0}\left(\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)dx\right|+\left|\int_{u_n<0}\left(\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)dx\right| \\
&=|f'(\infty)|\int_{u_n\geq 0}\frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2}dx+|f'(0)|\int_{u_n<0}\frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2}dx \\
&\leq|f'(\infty)|\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right\|_2^2+|f'(0)|\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right\|_2^2\longrightarrow 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Combinando (26), (27) y (28) se llega a $1=0$. Esta contradicción demuestra que $\omega\neq 0$.

De (22), (24) y el Lema de Vainberg (ver [19]), se tiene

$$\int_{\Omega}(\nabla\omega.\nabla v-h(\omega)v)\,dx=0,\quad\forall v\in H. \tag{29}$$

Esto lleva a concluir que ω es solución débil no trivial del problema

$$\begin{cases} \Delta\omega + h(\omega) = 0, & \text{en } \Omega, \\ \omega = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

Por los resultados de S. Agmon en [2] se concluye que ω es solución clásica de (30). Si $\Omega_1 := \{x \in \Omega : \omega(x) < 0\}$, entonces $\omega = 0$ en $\partial\Omega_1$. Luego

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(0)\ \omega = 0, & \text{en } \Omega_1, \\ \omega = 0, & \text{en } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{31}$$

Puesto que cualquier valor propio de $-\Delta$ en cualquier subregión de Ω debe ser mayor o igual a λ_1 (ver [16]) y $f'(0) < \lambda_1$, se concluye que $\Omega_1 = \emptyset$. Así, $\omega \geq 0$ en Ω y de (30) se sigue que

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(\infty)\ \omega = 0, & \text{en } \Omega, \\ \omega = 0, & \text{en } \partial\Omega; \end{cases} \tag{32}$$

pero esto contradice la condición $f'(\infty) > \lambda_1$. Por lo tanto $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

☑

Por los lemas 2.1, 2.2 y 2.3 el funcional J^+ satisface las hipótesis del Teorema del Paso de la Montaña, con lo cual se concluye que (1) tiene una solución débil no trivial u. Por los resultados de S. Agmon en [2] esa solución débil es clásica.

Sea $\Omega' := \{x \in \Omega/u(x) < 0\}$. Por la definición de f^+ se tiene que

$$\begin{cases} \Delta u + f'(0)\ u = 0, & \text{en } \Omega', \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega'. \end{cases} \tag{33}$$

Como $f'(0) < \lambda_1$, se sigue que $\Omega' = \emptyset$. Así, $u \geq 0$ en Ω. Por lo tanto, $f^+(u) = f(u)$. Ahora (1) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \Delta(-u) + \frac{f_-(u)}{u}(-u) = \frac{f_+(u)}{u}u, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{34}$$

donde

$$\frac{f_+(\xi)}{\xi} := \frac{\max\{f(\xi), 0\}}{\xi}, \qquad \frac{f_-(\xi)}{\xi} := \frac{\min\{f(\xi), 0\}}{\xi}$$

para todo $\xi > 0$ y se define $\frac{f_\pm(\xi)}{\xi}(0) := \{f'(0)\}_\pm$. De esta forma, las funciones $\frac{f_\pm(\xi)}{\xi}$ son continuas en $[0, +\infty]$. Sea $c(x) := \frac{f_-(u(x))}{u(x)} \leq 0$. Como $u \in C(\bar{\Omega})$, u es acotada y, por lo tanto, c es acotada. Por el Principio del Máximo Fuerte se sigue que $u > 0$ en Ω. Se ha demostrado la existencia de una solución positiva de (1).

La existencia de la solución negativa se prueba de manera similar.

Nota: En esta sección el funcional J, definido a partir de la truncación (2), es de clase C^2. Sin embargo, en el Teorema del Paso de la Montaña sólo se usó el hecho de ser J de clase C^1. Si la truncación en (2) se hubiera definido como

$$f^+(t) := \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{35}$$

el funcional J resultaría de clase C^1. Dejamos al lector la tarea de demostrar que, en este caso, la correspondiente solución, obtenida via el Teorema del Paso de la Montaña, no cambia de signo.

3. Existencia de una solución que cambia de signo

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\gamma(t) := f(t) - f'(\infty)t.$$

Por lo tanto $\gamma(t) = o(t)$ cuando $|t| \to +\infty$.

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + f'(\infty)u + \lambda\gamma(u) = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{36}$$

donde $\lambda \in [0, 1]$.

Sean G la primitiva de γ con $G(0) = 0$ y $J_\lambda : H \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f'(\infty)\frac{u^2}{2} - \lambda G(u) \right) dx, \tag{37}$$

donde H denota el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Como $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, f es sublineal y por lo tanto $J_\lambda \in C^1(H, \mathbb{R})$ (ver [19]) y

$$\langle \nabla J_\lambda, v \rangle = DJ_\lambda(u)v = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - f'(\infty)uv - \lambda\gamma(u)v)\, dx, \qquad \forall v \in H. \tag{38}$$

Por lo tanto u es una solución débil del problema (36) si sólo si u es un punto crítico de J_λ.

A continuación demostraremos que para $R > 0$ suficientemente grande y cualquier $\lambda \in [0, 1]$ el funcional J_λ no tiene puntos críticos en la esfera de centro 0 y radio R.

Lema 3.1. *Existe $R > 0$ tal que si $\|u\| \geq R$ entonces $\nabla J_\lambda(u) \neq 0$.*

Demostración. Para demostrar el lema basta probar que las soluciones débiles del problema (36) están acotadas. Supongamos, por el absurdo, que existe una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de soluciones débiles de (36) tales que $\|u_n\| \to \infty$.

Como $DJ_\lambda(u_n) = 0$, usando (38), se sigue que para cada $v \in H$,

$$\int_\Omega \left(\nabla(\frac{u_n}{\|u_n\|}).\nabla v - f'(\infty)\frac{u_n}{\|u_n\|}\, v - \lambda\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|}\, v \right) dx = 0. \tag{39}$$

De manera similar a como se hizo en la prueba del Lema 2.3, se demuestra que

$$\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|}\, v \right) dx \to 0 \quad \forall v \in H. \tag{40}$$

De (39) y (40) se tiene que

$$\int_\Omega \left(\nabla(\frac{u_n}{\|u_n\|}).\nabla v - f'(\infty)\frac{u_n}{\|u_n\|}\, v \right) dx \to 0 \quad \forall v \in H. \tag{41}$$

Ahora como $\left\{ \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$ es una sucesión acotada en el espacio de Hilbert H, existe una subsucesión, que denotaremos igual, tal que $\left\{ \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$ converge débilmente a un elemento $w \in H$. Similarmente a como se hizo en la prueba del Lema 2.3 se demuestra que $w \neq 0$. Dado que el encaje de H en $L^2(\Omega)$ es compacto se tiene que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} \to w \quad \text{en } L^2(\omega). \tag{42}$$

Usando (41) y (42) se obtiene

$$\int_\Omega (\nabla w.\nabla v - f'(\infty) w\, v)\, dx = 0 \quad \forall v \in H. \tag{43}$$

Luego w es una solución débil no trivial del problema

$$\begin{cases} \Delta w + f'(\infty)w = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{44}$$

Por lo tanto $f'(\infty)$ es un valor propio del Laplaciano. Esta contradicción demuestra que las soluciones débiles del problema (36) están acotadas. Se concluye así la demostración del lema. ☑

En lo que sigue en esta sección, sea $R > 0$ como en el Lema 3.1.

Lema 3.2. *Si B_R es la bola en H de centro 0 y radio R entonces*

$$d(\nabla J_0, B_R, 0) = (-1)^k = 1,$$

donde $d(\nabla J_0, B_R, 0)$ denota el grado de Leray-Schauder.

Demostración. De (38) se sigue que

$$DJ_0(u)\, v = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - f'(\infty) u\, v)\, dx, \qquad \forall v \in H. \tag{45}$$

Como $f'(\infty)$ no es un valor propio de $-\Delta$, se concluye que $u = 0$ es el único punto crítico de J_0.

Para encontrar el grado de J_0 en la bola B_R con respecto a cero, se calcula el número de valores propios negativos de la segunda derivada de J_0 en cero. Sea λ un valor propio del operador segunda derivada de J_0 en cero. Entonces,

$$\langle D^2 J_0\,(0)\,\varphi, w\rangle = \langle \lambda\,\varphi, w\rangle = \lambda \int_\Omega \nabla\,\varphi.\nabla w, \qquad \forall \varphi, w \in H. \tag{46}$$

Usando los resultados de Castro y Lazer (ver [14]) se tiene

$$\langle D^2 J_0\,(0)\,\varphi, w\rangle = \int_\Omega \left(\nabla\,\varphi.\nabla w - f'(\infty)\,\varphi\,w\right), \qquad \forall \varphi, w \in H. \tag{47}$$

De (46) y (47) se obtiene

$$(1-\lambda) \int_\Omega \nabla\,\varphi.\nabla w = f'(\infty) \int_\Omega \varphi\,w \qquad \forall \varphi, w \in H. \tag{48}$$

Como la función propia φ_j ($j \in \mathbb{N}$) es solución débil del problema lineal

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_j u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{49}$$

Se sigue que

$$\int_\Omega \nabla\,\varphi_j.\nabla w = \lambda_j \int_\Omega \varphi_j\,w \qquad \forall w \in H. \tag{50}$$

reemplazando φ por φ_j en (48) y usando (50) se obtiene

$$(1-\lambda)\,\lambda_j = f'(\infty).$$

Luego

$$\lambda = 1 - \frac{f'(\infty)}{\lambda_j}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Como, por hipótesis, $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ se sigue de (51) que el número de valores propios negativos del operador segunda derivada de J_0 en cero es k. Por lo tanto

$$d(\nabla J_0, B_R, 0) = (-1)^k = 1,$$

lo que concluye la demostración del lema. ☑

Supongamos que el conjunto de puntos críticos de J es discreto. Usando el Lema 3.1 y la invarianza del grado de Leray-Schauder bajo homotopía (ver [8]) se tiene

$$d(\nabla J_1, B_R, 0) = d(\nabla J_0, B_R, 0).$$

Como $J_1 = J$, usando el Lema 3.2 se obtiene

$$d(\nabla J, B_R, 0) = 1.$$

Como 0 es un mínimo local aislado de J, se sigue que

$$d(\nabla J, B_\rho, 0) = 1,$$

donde B_ρ es una bola de centro 0 y radio ρ que no contiene ningún otro punto crítico de J (ver [3]).

Sea P una región acotada que contiene sólo las soluciones positivas de (1) y N una región acotada que contiene sólo las soluciones negativas de (1). Por los resultados de A. Castro y J. Cossio en [10] se tiene

$$d(\nabla J, P, 0) = -1 = d(\nabla J, N, 0).$$

Usando la propiedad de escisión del grado de Leray-Schauder (ver [8]) se sigue que

$$\begin{aligned} 1 &= d(\nabla J, B_R, 0) \\ &= d(\nabla J, B_\rho, 0) + d(\nabla J, P, 0) + d(\nabla J, N, 0) \\ &\qquad + d(\nabla J, B_R - (\overline{B_\rho \cup P \cup N}), 0) \\ &= 1 - 1 - 1 + d(\nabla J, B_R - (\overline{B_\rho \cup P \cup N}), 0)\,; \end{aligned} \tag{52}$$

por lo tanto

$$d(\nabla J, B_R - (\overline{B_\rho \cup P \cup N}), 0) \neq 0.$$

Por la propiedad de existencia del grado de Leray-Schauder (ver [8]) existe $u \in B_R - (\overline{B_\rho \cup P \cup N})$ tal que

$$\nabla J(u) = 0.$$

Hemos demostrado que existe una solución no trivial u que cambia de signo. Lo que concluye la demostración del Teorema 1.1.

Agradecimientos. Los autores desean expresar su gratitud al profesor Alfonso Castro por sus comentarios relacionados con el Teorema 1.1.

Referencias

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press ,1975.

[2] S. Agmon, *The L^p approach to the Dirichlet problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13**, (1959), 405–448.

[3] H. Amann, *A Note on Degree Theory for Gradient Mappings*, Proc. of the A.M.S., **85** no. 4 (1982), 591–595.

[4] A. Ambrosetti & G. Mancini, *Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems*, Nonlinear Anal., **3** no. 5 (1979), 635–645.

[5] A. Ambrosetti & P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory*, J. Funct. Anal., **14** (1973), 343–381.

[6] T. Bartsch & Z. Q. Wang, *On the Existence of Sign Changing Solutions for Semilinear Dirichlet Problems*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **7** (1996), 115–131.

[7] A. Castro, *Métodos de Reducción via Minimax*, Primer Simposio Colombiano de Análisis Funcional, Medellín, Colombia, 1981.

[8] A. Castro, *Non Linear Functional Analysis*, II Escuela de Verano en Geometría Diferencial, Análisis Numérico y Ecuaciones Diferenciales Parciales, Universidad Nacional, Medellín, Colombia, 1994.

[9] A. CASTRO AND J. COSSIO, *Multiple Radial Solutions for a Semilinear Dirichlet Problem in a ball*, Rev. Colombiana Math., **27** (1993), 15–24.

[10] A. CASTRO & J. Cossio, *Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem*, SIAM J. Math. Anal., **25** (1994), 1554–1561.

[11] A. CASTRO, J. COSSIO & J. M. NEUBERGER, *Sign-Changing Solutions for a Superlinear Dirichlet Problem*, Rocky Mountain J.M., **27** no. 4 (1997), 1041–1053.

[12] A. CASTRO, J. COSSIO & J. M. NEUBERGER, *On Multiple Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **30** no. 6 (1997), 3657–3662.

[13] A. CASTRO & A. KUREPA, *Radially Symmetric Solutions to a Superlinear Dirichlet Problem in a Ball with Jumping Nonlinearities*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** no. 1 (1989), 353–372.

[14] A. CASTRO & A. C. LAZER, *Critical Point Theory and the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, Ann. Mat. Pura Appl., **70** no. 4 (1979), 113–137.

[15] K. C. CHANG, *Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse Theory*, Comm. Pure Appl. Math., **34** no. 5 (1981), 693–712.

[16] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics, Volume I*, New York, John Wiley, 1989.

[17] H. HOFER, *The Topological Degree at a Critical Point of Mountain Pass Type*, Proc. Sympos. Pure Math., **45** (1986), 501–509.

[18] A. C. LAZER & J. P. MCKENNA, *Multiplicity Results for a Class of Semilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems*, J. Math. Anal. Appl., **107** (1985), 371–395.

[19] P. RABINOWITZ, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, Regional Conference Series in Mathematics, 65, Providence,R.I., AMS (1986).

[20] M. STRUWE, *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1990.

[21] Z. Q. WANG, *On a Superlinear Elliptic Equation*, Ann. Inst. H. Poincare Analyse Non Lineaire **8** (1991) 43-57.

(Recibido en julio de 2002)

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
APARTADO AÉREO 3840
MEDELLÍN, COLOMBIA.
e-mail: jcossio@perseus.unalmed.edu.co