Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 40 (2006), páginas 1–14

# Variantes du principe variationnel d'Ekeland et applications

Abdel Rachid El Amrouss
Université Mohamed I, Maroc

Abstract. In this note, we establish a variant of Ekeland's variational principle. This result suggests a generalization of the classical Palais-Smale condition. An example is provided showing how this is used to give the existence of a minimizer for functionals which do not satisfy the Palais-Smale condition and the one introduced by Cerami. We also prove a relation between the coercitivity of functional and the introduced compactness condition.

*Keywords and phrases.* Ekeland's principle variational, Palais-Smale condition.

*2000 Mathematics Subject Classification.* Primary : 58E05, 35J65. Secondary : 49B27.

Résumé. Dans cette note, nous établissons une variante du principe variationnel d'Ekeland. Ce résultat suggère d'introduire une généralisation de la condition de Palais-Smale classique. Un exemple montre comment ceci peut s'appliquer pour assurer l'existence d'un minimiseur pour des fonctions ne satisfaisent pas les conditions de Palais-Smale et de Cerami. Nous prouvons aussi une relation entre la coercivité de la fonction et la condition de compacité introduite.

## 1. Introduction

Soient $E$ un espace métrique complet muni d'une distance $d$ et $\Phi : E \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et non identique à $+\infty$. Le principe variationnel d'Ekeland permet pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $\delta > 0$ et chaque $x \in E$ tel que

$$\Phi(x) \leq \inf_E \Phi + \varepsilon,$$

de construire un élement $v \in E$ minimisant la fonctionnelle $\Phi_v$ donnée par

$$\Phi_v(x) = \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, v).$$

Si $E$ est un espace de Banach, si $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est dérivable au sens de Gâteaux semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, alors le principe variationnel d'Ekeland assure l'existence d'une suite minimisante $(u_n)$ telle que $\Phi'(u_n) \to 0$, quand $n \to \infty$. Il est connu que si $\Phi$ vérifie la condition de Palais-Smale alors $\Phi$ atteint son infimum. Mais, il est parfois possible de trouver une suite minimisante $(u_n)$ telle que $\Phi'(u_n) \to 0$, quand $n \to \infty$, n'ayant aucune sous-suite convergente. Prenons l'exemple de la fonction $\Phi(s) = arctg(s)$.

D'autre part, on dit que la fonction $\Phi : E \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Cerami en un point $c \in \mathbb{R}$, si toute suite $(u_n) \subset E$ telle que

$$(1 + \|u_n\|)\Phi'(u_n) \to 0, \Phi(u_n) \to c, \quad \text{quand n} \to \infty$$

admet une sous-suite convergente.

Dans [5], Ekeland a établit que si $\Phi$ est bornée inférieurement et vérifie la condition de Cerami pour tout $c \in \mathbb{R}$ alors $\Phi$ atteint son infimum.

Cette note vise à établir une variante du principe variationnel d'Ekeland. Au paragraphe 3, cette variante nous permet de donner une généralisation à la condition de Palais-Smale et celle introduite par Cerami (cf. [3]). Nous illustrons le théorème affirmant l'existence d'un minimum sur un exemple qui ne s'adapte pas aux modes de conditions connus dans la littérature.

Dans [2], Caklovic, Li et Willem ont établit que si la fonctionnelle $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est bornée inférieurement et satisfait la condition de Palais-Smale pour tout $c \in \mathbb{R}$ alors $\Phi$ est coercive. Dans ce travail, nous intéréssons aussi à généraliser le résultat, décrit précédemment, de [2] et d'autres dans (cf. [6], [4], [1]) en remplaçant la condition de Palais-Smale par la condition de compacité introduite au paragraphe 3.

## 2. Variantes du principe variationnel d'Ekeland

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, nous allons introduire la définition suivante.

**Définition 1.** *On dit que $\alpha : [0, \infty[ \to ]0, \infty[$ est une fonction de comparaison d'ordre $k$ si pour tout $q \geq k$ il existe $c, d \geq 0$ tels que*

$$\frac{\alpha((t+1)s)}{\alpha(t)} \leq cs^q + d, \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

**Exemples :**

(1) $\alpha(s) = (1+s)^k$

(2) $\alpha(s) = (1+s)^k Log(2+s)$

Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $u \in E$. Notons par :
$\bar{B}(u, r) = \{x \in E \mid d(u, x) \leq r\}$, la boule fermée de centre $u$ et de rayon $r$.
$B(u, r) = \{x \in E \mid d(u, x) < r\}$, la boule ouverte de centre $u$ et de rayon $r$.

**Théorème 1.** *Soient $(E, d)$ un espace métrique complet, $x_0 \in E$ fixé et $\Phi : E \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement, bornée inférieurement. Soit*

$\alpha : [0,\infty[\to]0,\infty[$ *une fonction de comparaison d'ordre k croissante continue. Alors pour chaque* $\varepsilon > 0$, *chaque* $\delta > 0$ *et chaque* $u \in E$ *tel que*

$$\Phi(u) \leq \inf_E \Phi + \varepsilon$$

*il existe une suite* $(z_n)_{n\geq 1}$ *de* $E$ *convergente ayant les propriétés suivantes :*

*i)* $z_1 = u, z_n \in \bar{B}(u,\gamma(u))$
*avec* $\gamma(u)$ *est une constante positive choisie de telle sorte que la fonction* $u \mapsto \frac{\gamma(u)}{1+d(x_0,u)}$ *est bornée sur* $E$.

*ii) la suite* $(d(x_0,z_n))_{n\geq 1}$ *est croissante,*

*iii)* $\sum_{n=1}^{j} \frac{d(z_n,z_{n+1})}{\alpha(d(x_0,z_{n+1}))} < 2\delta, \forall j \geq 1,$

*iv) pour* $v = \lim_{n\to\infty} z_n, \Phi(v) \leq \Phi(u),$

*v)* $d(u,v) \leq min\{\delta\alpha(d(x_0,v)),\gamma(u)\},$

*vi) pour tout* $w \in \bar{B}(u,\gamma(u)) \setminus B(u,d(x_0,u)),$

$$\Phi(w) \geq \Phi(v) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,w))}d(v,w).$$

*Démonstration.* La preuve est inspirée de celle du principe variationnel d'Ekeland. Pour tout couple $(r,s) \in E^2$, on définit $r \prec s$ par les deux conditions suivantes :

$$\Phi(r) \leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))}d(r,s) \tag{2.1}$$

et

$$d(x_0,r) \geq d(x_0,s). \tag{2.2}$$

Nous allons d'abord montrer que la relation $\prec$ est d'ordre. En effet,
$\prec$ est réflexive car $r \prec r$, pour tout $r \in E$ ;
$\prec$ est antisymétrique car si $r \prec s$ et $s \prec r$ alors $d(x_0,r) = d(x_0,s)$ et

$$\Phi(r) \leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))}d(r,s) \leq \Phi(r) - \frac{2\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))}d(r,s)$$

et par suite $d(r,s) = 0$ et $r = s$ ;
$\prec$ est transitive car si $r \prec s$ et $s \prec t$ alors $d(x_0,r) \geq d(x_0,s) \geq d(x_0,t)$ et

$$\begin{aligned}\Phi(r) &\leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))}d(r,s) \text{ et } \Phi(\text{s}) \\ &\leq \Phi(t) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,s))}d(t,s)\end{aligned} \tag{2.3}$$

puisque $d(t,s) \leq d(t,r) + d(r,s)$, (2.3) devient

$$\begin{aligned}\Phi(r) &\leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))}[d(t,r) - d(t,s)] \text{ et } \Phi(\text{s}) \\ &\leq \Phi(t) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,s))}d(t,s)\end{aligned} \tag{2.4}$$

ou encore

$$\Phi(r) \leq \Phi(t) + \left[\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))} - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,s))}\right] d(t,s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))} d(r,t)$$

comme $\alpha(.)$ est croissante et $d(x_0,r) \geq d(x_0,s)$, alors

$$\begin{aligned} r \prec s \text{ et } s \prec t \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} \Phi(r) & \leq \Phi(t) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))} d(r,t) \\ d(x_0,r) & \geq d(x_0,t) \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad r \prec t. \end{aligned}$$

Puisque $\Phi$ est semi-continue inférieurement alors $S_s = \{r \in E \mid r \prec s\}$ avec $s \in E$, est non vide et fermé.

Nous allons construire une suite d'ensembles fermés $S_n$ définis inductivement. Soient $\varepsilon$, $\delta$, $u$ et $\gamma(u)$ donnés par l'énoncé et soit $z_1 = u$. Posons

$$S_1 = \{w \in E \mid w \prec z_1\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u)),$$

et choisissons $z_2 \in S_1$ tel que

$$\Phi(z_2) \leq \inf_{S_1} \Phi + \frac{1}{\alpha(d(x_0, z_1))}.$$

Ensuite, nous posons

$$S_2 = \{w \in E \mid w \prec z_2\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u)),$$

alors $S_2 \subset S_1$. En supposant que $z_i$ est déterminé et

$$S_i = \{w \in H \mid w \prec z_i\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u))$$

pour $i \leq n$, et choisissons $z_{n+1} \in S_n$ tel que

$$\Phi(z_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{(n+1)\alpha(d(x_0, z_n))}. \tag{2.5}$$

Nous posons ensuite

$$S_{n+1} = \{w \in E \mid w \prec z_{n+1}\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u))$$

et nous avons $S_{n+1} \subset S_n$.

La suite $(S_n)_n$ ainsi construite est une suite décroissante de fermés non vides et $(d(x_0, z_n))_n$ est une suite croissante bornée et par conséquent, elle converge dans l'intervalle $[d(x_0,u), d(x_0,u) + \gamma(u)]$.

Par ailleurs, dire que $w \in S_{n+1}$ signifie que

$$\begin{aligned} \Phi(w) &\leq \Phi(z_{n+1}) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,w))} d(w, z_{n+1}) \text{ et } \mathrm{d(x_0, w)} \\ &\geq d(x_0, z_{n+1}) \end{aligned}$$

de (2.5), il vient

$$\Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{(n+1)\alpha(d(x_0, z_n))} - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,w))} d(w, z_{n+1}),$$

ce qui entraîne que

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} \frac{\alpha(d(x_0, w))}{\alpha(d(x_0, z_n))},$$

et puisque $w \in \bar{B}(u, \gamma(u))$, il suit

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} \frac{\alpha(\gamma(u) + d(x_0, u))}{\alpha(d(x_0, z_n))}. \tag{2.6}$$

Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{\gamma(u)}{1 + d(x_0, u)}$ est bornée alors il existe $M > 0$ tel que

$$\gamma(u) \leq M(1 + d(x_0, u)). \tag{2.7}$$

D'après (2.6), (2.7) et puisque $\alpha(.)$ est une fonction croissante, il résulte

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} \frac{\alpha((M+1)(1 + d(x_0, z_n)))}{\alpha(d(x_0, z_n))}. \tag{2.8}$$

Nous utilisons (2.8) et le fait que $\alpha(.)$ est une fonction de comparaison d'ordre $k$ il existe $c, d > 0$ tels que

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} (c(M+1)^k + d), n \in \mathbb{N}$$

ceci montre que le diamétre de $S_{n+1}$ tend vers 0, quand $n \to \infty$.

Puisque $E$ est complet, il existe un unique $v \in E$ tel que $\cap_n S_n = \{v\}$ et $z_n$ converge vers $v$. Comme $z_j \prec z_{j-1} \prec \ldots \prec z_1$ ; alors de (2.1), il résulte

$$\begin{aligned}
\Phi(z_{j+1}) &\leq \Phi(z_j) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, z_{j+1}))} d(z_j, z_{j+1}) \\
&\leq \Phi(z_1) - \sum_{n=1}^{j} \frac{\varepsilon d(z_j, z_{j+1})}{\delta\alpha(d(x_0, z_{j+1}))}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{j} \frac{\varepsilon d(z_j, z_{j+1})}{\delta\alpha(d(x_0, z_{j+1}))} &\leq \Phi(u) - \Phi(z_{j+1}) \\
&\leq \inf_E \Phi + \varepsilon - \Phi(z_{j+1}) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent l'assertion *iii*). Comme $v \in S_1$ nous avons $v \prec u$ est établie. Par suite, l'assertion *iv*) est satisfaite. Il en résulte aussi que

$$\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, v))} d(v, u) \leq \Phi(u) - \Phi(v) \leq \inf_E \Phi + \varepsilon - \Phi(v) \leq \varepsilon.$$

l'assertion *v*) est démontrée.

Pour *vi*), soit $w \in E$ tel que $w \prec v$ et $w \in \bar{B}(u, \gamma(u))$, alors nous avons $w \prec z_n$ pour tout $n$, ce qui implique que $w \in \cap_n S_n$ et alors $w = v$. Cela signifie que $v$ est un élément minimal dans $\bar{B}(u, \gamma(u))$, c'est à dire

$$w \in \bar{B}(u, \gamma(u)) \text{ et } w \prec v \Rightarrow w = v.$$

ce qui montre que

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, w))} d(v, w)$$

pour tout $w \in \bar{B}(u, \gamma(u)) \setminus B(x_0, d(x_0, v))$.
Ce qui achève la preuve. ☑

**Remarque 1.** *Dans le cas où $E$ est une partie complète d'un espace vectoriel normé, nous prenons $x_0 = 0$ dans le théorème 1.*

Dans le cas où $E$ est un espace de Hilbert et $\Phi$ dérivable au sens de Gâteaux, nous avons

**Théorème 2.** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement et dérivable au sens de Gâteaux sur $H$. Soit $\alpha : [0, \infty[ \to ]0, \infty[$ une fonction de comparaison d'ordre $k$ croissante continue. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $u \in H$ tel que $\Phi(u) \leq \inf_H \Phi + \varepsilon$ et chaque $\delta > 0$ tel que*

$$\delta \leq \frac{\|u\| + 1}{2\alpha(3(1 + \|u\|))}$$

*il existe $v \in H$ ayant les propriétés suivantes :*

*i)* $\Phi(v) \leq \Phi(u)$

*ii)* $\frac{\|v-u\|}{\alpha(\|v\|)} \leq \delta$

*iii)* $\|\Phi'(v)\|\alpha(\|v\|) \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$

*Démonstration.* Posons dans le théorème 1, $x_0 = 0, \gamma(u) = 2(\|u\| + 1)$ et $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in H$. Alors d'après *iv)* et *v)* du théorème 1, il existe $v \in H$ ( $v = \lim_{n\to\infty} z_n, (z_n)$ la suite construite dans le théorème 1) tel que

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) \quad \text{et } \|\mathrm{v} - \mathrm{u}\| \leq \delta\alpha(\|\mathrm{v}\|),$$

ce qui montre que *i)* et *ii)* sont satisfaites.
La relation *iii)* est établie en deux étapes :

(1) Pour tout $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et tout $t$ tel que $|t| \leq 1$ nous avons $v + th \in \bar{B}(u, \gamma(u))$. En effet, il suffit de montrer que $v \in \bar{B}(u, \|u\| + 1)$, car

$$\begin{aligned} \|v + th\| &\leq \|v\| + |t|\|h\| = \|v\| + |t| \\ &\leq 2\|u\| + 1 + 1 = \gamma(u) \end{aligned}$$

D'après *v)* du théorème 1, nous avons

$$\|v - u\| \leq \delta\alpha(\|v\|) \text{ et } \|\mathrm{v} - \mathrm{u}\| \leq \gamma(\mathrm{u}). \tag{2.9}$$

Maintenant, supposons que $v \notin \bar{B}(u, \|u\| + 1)$, donc

$$\|u\| + 1 < \|v - u\|$$

puisque $\alpha(.)$ est croissante, $\delta \le \frac{\|u\|+1}{2\alpha(3(1+\|u\|))}$ et d'après (2.9), il résulte

$$\|u\| + 1 < \|v - u\| \le \delta\alpha(\|v\|) \le \delta\alpha(3(1 + \|u\|))) \le \frac{\|u\| + 1}{2}.$$

Ce qui est absurde.

(2) La deuxième étape est consacrée à montrer que

$$| < \Phi'(v), h > | \le \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v\|)}, \forall h \in H, \|h\| = 1. \tag{2.10}$$

Soit $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$, nous allons distinguer deux cas.

Cas 1. Si $< v, h > \geq 0$ ($< .,. >$ désigne le produit scalaire associé à $H$), alors nous avons

$$\|v + th\| = [\|v\|^2 + \|th\|^2 + 2t < v, h >]^{\frac{1}{2}},$$

il est clair que, pour tout $t \ge 0$, $\|v + th\| \ge \|v\|$. Donc, pour $t \ge 0$ suffisamment petit on a $v+th \in \bar{B}(u, \gamma(u)) \setminus B(0, \|v\|)$ et par suite d'après *vi*) du théorème 1, il vient

$$\frac{\Phi(v + th) - \Phi(v)}{t} \ge -\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v + th\|)}, \qquad t > 0.$$

Comme $\Phi$ est Gâteaux dérivable, en faisant tendre $t$ vers 0, nous obtenons

$$< \Phi'(v), h > \geq -\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v\|)}.$$

Cas 2. Si $< v, h > \leq 0$ nous avons $\|v + th\| \ge \|v\|$ pour tout $t \le 0$. De même il résulte pour $t$ suffisamment petit

$$\frac{\Phi(v + th) - \Phi(v)}{-t} \ge -\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v + th\|)}, \qquad t < 0.$$

Faisons tendre $t$ vers 0, nous avons

$$< \Phi'(v), h > \leq \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v\|)}, \qquad \forall h, \|h\| = 1.$$

Ce qui démontre la relation (2.10) et par suite *iii*) est satisfaite.

☑

**Remarque 2.** *La démonstration du théorème reste valable si nous remplaçons $H$ par la région $D_R = \{u \in H \mid \|u\| \ge R\}$, où $R > 0$.*

Comme une conséquence, nous avons

**Corollaire 1.** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement bornée inférieurement et dérivable au sens de Gâteaux sur $H$. Soit $\alpha(.) : [0, \infty[ \to ]0, \infty[$ une fonction de comparaison d'ordre $k$ croissante continue. Alors pour toute suite minimisante $(u_n)_n$ de $\Phi$ vérifiant*

*$(u_n)$ est bornée ou bien* $0 < \liminf_{n\to\infty} \dfrac{\|u_n\|}{\alpha(\|u_n\|)}$ *il existe une suite minimisante $(v_n)_n$ de $\Phi$ telle que :*

*i)* $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$

*ii)* $\frac{\|v_n - u_n\|}{\alpha(\|v_n\|)} \to 0$, *quand* $n \to \infty$

*iii)* $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0$, *quand* $n \to \infty$.

*Démonstration.* Soit $\varepsilon_n$ tel que $\varepsilon_n^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{3^n} \liminf_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|}{\alpha(\|u_n\|)}$ et prenons $\delta_n = \varepsilon_n^{\frac{1}{2}}$, $\gamma(u_n) = 2(\|u_n\| + 1)$. Puisque $\alpha$ est une fonction de comparaison d'ordre $k$ alors les conditions du théorème 2 sont satisfaites et par suite pour tout $u_n$ il existe $v_n$ tel que

*i)* $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$

*ii)* $\frac{\|v_n - u_n\|}{\alpha(\|v_n\|)} \leq {\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$,

*iii)* $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \leq {\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$.

Faisons tendre $\varepsilon_n$ vers 0, quand $n \to \infty$, le corollaire découle. ☑

**Théorème 3.** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement, dérivable au sens de Gâteaux sur $H$ et soit $\alpha : [0,\infty[\to]0,\infty[$ une fonction de comparaison d'ordre $k$ croissante continue telle que $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $\delta > 0$ et chaque $u \in H$ tel que*

$$\Phi(u) \leq \inf_H \Phi + \varepsilon$$

*il existe $v \in H$ ayant les propriétés suivantes :*

*i)* $\Phi(v) \leq \Phi(u)$,

*ii)* $\|v - u\| \leq \delta\alpha(\|v\|)$,

*iii)* $\|\Phi'(v)\|\alpha(\|v\|) \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$.

*Démonstration.* Posons dans le théorème 1, $x_0 = 0$ et $d(x,y) = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in H$. Alors le théorème 1 assure l'existence d'une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ telle que la suite $(\|z_n\|)$ est croissante et

$$\sum_{n=1}^{j} \frac{\|z_n - z_{n+1}\|}{\alpha(\|z_{n+1}\|)} < 2\delta, \forall j \geq 1. \tag{2.11}$$

Puisque $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$ alors il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\delta \leq \frac{1}{2} \int_{\|u\|}^{\|u\|+\gamma} \frac{1}{\alpha(s)}\, ds. \tag{2.12}$$

Posons $v = \lim_{n\to\infty} z_n$ et $\gamma(u) = 2\|u\| + \gamma + 1$ (on rappele ici que $\gamma(u)$ est la constante donnée dans l'énoncé du théorème 1).

D'après *iv*) et *v*) du théorème 1, nous obtenons

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) \text{ et } \|v - u\| \leq \delta\alpha(\|v\|).$$

Pour établir l'assertion *iii*), il suffit de montrer que pour tout $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ nous avons $v + th \in \bar{B}(u, \gamma(u))$ pour tout $t$ est suffisamment petit.

Pour ceci, nous allons d'abord établir que

$$\|z_n\| \leq \|u\| + \gamma, \forall n \geq 1. \tag{2.13}$$

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $j \geq 1$ tel que $\|z_{j+1}\| > \|u\| + \gamma$. D'où, d'après (2.12) et puisque $\alpha$ est croissante, il vient

$$\begin{aligned} 2\delta &\leq \int_{\|z_1\|}^{\|z_{j+1}\|} \frac{1}{\alpha(s)}\, ds \\ &\leq \sum_{n=1}^{j} \int_{\|z_n\|}^{\|z_{n+1}\|} \frac{1}{\alpha(s)}\, ds \\ &\leq \sum_{n=1}^{j} \frac{\|z_{n+1}\| - \|z_n\|}{\alpha(\|z_{n+1}\|)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{j} \frac{\|z_n - z_{n+1}\|}{\alpha(\|z_{n+1}\|)}. \end{aligned}$$

Ce qui contredit (2.11). Utilisons (2.13), nous avons

$$\|v - u\| \leq 2\|u\| + \gamma. \tag{2.14}$$

Donc, pour $|t| \leq 1$ et $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et de (2.14) nous obtenons

$$\|v + th - u\| \leq 2\|u\| + \gamma + 1 = \gamma(u).$$

Finalement, la deuxième étape de la preuve du théorème 2 permet de conclure. Ce qui achève la preuve. ☑

**Remarque 3.** *Le résultat du théorème 3 reste valable si nous remplaçons* $H$ *par* $D_R = \{u \in H \mid \|u\| \geq R\}$ *où* $R > 0$.

**Corollaire 2.** *Sous les conditions du corollaire 1 avec* $\int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$, *pour toute suite minimisante* $(u_n)_n$ *de* $\Phi$ *il existe une suite minimisante* $(v_n)_n$ *de* $\Phi$ *vérifiant* $i), ii), iii)$ *du corollaire 1.*

## 3. Applications

Dans toute la suite nous supposons que $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement bornée inférieurement, dérivable au sens de Gâteaux sur H et $\alpha : [0, \infty[ \to ]0, \infty[$ une fonction de comparaison d'ordre $k$ croissante continue. Posons $\Phi^c = \{u \in H \mid \Phi(u) \leq c\}$.

**Définition 2.** *On dit que $\Phi$ satisfait $(C_c^\alpha)$ si toute suite $(u_n)_n \subset H$ telle que*

$$\Phi(u_n) \to c \text{ et } \Phi'(u_n)\alpha(\|u_n\|) \to 0,$$

*contient une sous-suite convergente.*

**Remarque 4.** *Notons que lorsque $\alpha(s) = cte$, la condition $(C_c^\alpha)$ est la condition de Palais-Smale et lorsque $\alpha(s) = s + 1$, la condition $(C_c^\alpha)$ est celle introduite par Cerami.*

Maintenant, nous donnons un exemple de fonctions qui ne s'adaptent pas aux modes de restrictions imposées dans les travaux connus.

**Exemple 1.** *Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\Phi(u) = \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{r-1}{2}}}, \qquad r > 1.$$

*Nous vérifions facilement que $\Phi$ satisfait la condition $(C_0^\alpha)$, avec $\alpha(s) = (s+1)^r$.*

Mais $\Phi$ ne satisfait pas ni la condition de Palais-Smale ni la condition de Cerami au point 0.

**Théorème 4.** *Soit $H$ un espace de Hilbert et $a = \inf_H \Phi$. Si $\Phi^{a+\varepsilon}$ rencontre l'ensemble $A_\delta = \left\{u \in H \mid \delta \leq \frac{\|u\|+1}{\alpha(3(1+\|u\|))}\right\}$ pour un certain $\delta > 0$, et pour tout $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < \delta$. De plus, si $\Phi$ vérifie la condition $(C_a^\alpha)$ alors $\Phi$ atteint son infimum sur $H$ en un point $u$ pour lequel $\Phi'(u) = 0$.*

*Démonstration.* Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, avec $n \geq 1$, il existe alors une suite $(u_n)$ telle que

$$\Phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \delta \leq \frac{\|u_n\|+1}{\alpha(3(1+\|u_n\|))}, \qquad \forall n \geq 1.$$

En conséquence, $(u_n)$ est une suite minimisante de $\Phi$ vérifiant $(u_n)$ est bornée ou $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|}{\alpha(1+\|u_n\|)}$.

Soit $(v_n)$ la suite donnée par le corollaire 1 vérifiant :

*i)* $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$,

*ii)* $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Puisque $\Phi$ satisfait $(C_a^\alpha)$, alors $(v_n)$ contient une sous-suite convergente notée aussi $(v_n)$ et qui est évidement minimisante pour $\Phi$. Soit $u = \lim_{n\to\infty} v_n$, d'après *i)* et *ii)* le résultat découle. ☑

Ensuite, nous illustrons le théorème 4 sur un exemple où la fonction $\Phi$ vérifie les conditions du théorème 4 sans que la condition de Palais-Smale et celle de Cerami ait lieu.

**Exemple 2.** *Posons*

$$f(s) = \begin{cases} arctg(s) & \text{si } s \leq 0 \\ sin(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 2\pi \\ arctg(s-2\pi) & \text{si } s \geq 2\pi. \end{cases}$$

*et* $\Phi(u) = f(2\pi + Log(\|u\|^2+1) - (\|u\|^2+1)^{\frac{1}{2}})$ *pour* $u \in H$. *Alors* $\Phi$ *est de classe* $C^1$ *puisque* $u \mapsto Log(\|u\|^2+1)$, $u \mapsto (\|u\|^2+1)^{\frac{1}{2}})$ *et* $f$ *sont de* $C^1$. *On a aussi* $a = inf_H \Phi = -1$ *et* $\Phi^{-1+\epsilon}$ *rencontre l'ensemble borné non vide* $A = \{u \in H \mid Log(\|u\|^2+1) - (\|u\|^2+1)^{\frac{1}{2}} \in [-2\pi, 0]\}$ *pour tout* $\varepsilon > 0$. *D'autre part,* $\Phi$ *vérifie* $(C_c^\alpha)$, *avec* $\alpha(s) = s^2+1$ *et par suite le théorème 4 assure que* $\Phi$ *atteint son infimum en un point* $u_0$ *pour lequel* $\Phi'(u_0) = 0$.

**Corollaire 3.** *Soit* $H$ *un espace de Hilbert et* $a = \inf_H \Phi$. *S'il existe un borné* $K$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ :

$$\Phi^{a+\epsilon} \cap K \neq \emptyset$$

*et si* $\Phi$ *vérifie la condition* $(C_a^\alpha)$ *alors* $\Phi$ *atteint son infimum sur* $H$ *en un point* $u$ *pour lequel* $\Phi'(u) = 0$.

*Démonstration.* Le résultat découle du théorème 4. ☑

**Remarque 5.** *Si pour tout* $\varepsilon > 0$ $\Phi^{a+\epsilon}$ *rencontre un ensemble borné* $K$, *alors* $\Phi$ *est coercive.*

**Théorème 5.** *Soit* $H$ *un espace de Hilbert et* $a = \inf_H \Phi$. *Si* $\alpha$ *vérifie* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\,ds = +\infty$, *et si* $\Phi$ *vérifie la condition* $(C_a^\alpha)$ *alors* $\Phi$ *atteint son infimum sur* $H$ *en un point* $u$ *pour lequel* $\Phi'(u) = 0$.

*Démonstration.* Posons dans le théorème 3, $\varepsilon = (\frac{1}{n})^2, \delta = \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$, et choisissons une suite $(u_n)$ telle que

$$\Phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n}.$$

Il est clair que $(u_n)$ est une suite minimisante de $\Phi$.

Soit $(v_n)$ la suite donnée par le théorème 3 vérifiant :

*i)* $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$

*ii)* $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Par $(C_a^\alpha)$, $(v_n)$ contient une sous-suite convergente notée aussi $(v_n)$. Posons $u = \lim_{n\to\infty} v_n$ et d'après *i)* et *ii)* le résultat découle. ☑

**Remarque 6.** *La condition* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\,ds = +\infty$ *est nécessaire dans le théorème 5. En effet, prenons l'exemple de la fonction* $\Phi(u) = arctg(u)$ *et posons* $a = \inf \Phi$. *Il est immédiat de vérifier que* $\Phi$ *vérifie* $(C_a^\alpha)$ *pour* $\alpha(s) = (s+1)^2$ *et* $\Phi$ *n'atteint pas son infimum. Notons ici que* $\int_1^\infty \frac{1}{(s+1)^2}\,ds < +\infty$.

L'objectif du théorème suivant est de généraliser les résultas donnés dans [2] et [4].

**Théorème 6.** *Si* $\Phi$ *est bornée inférieurement, alors*

(1) *Si* $\liminf_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = d < \infty$ *alors pour que* $\Phi$ *vérifie* $(C_d^\alpha)$ *il est nécessaire que* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\,ds < +\infty$.

(2) *Si* $\alpha(s) = (1+s)\beta(1+Log(1+s))$, *avec* $\beta : [0,\infty[\to]0,\infty[$ *une fonction de comparaison d'ordre* $k$ *croissante continue vérifiant* $\int_1^\infty \frac{1}{\beta(s)}\, ds = +\infty$, *et* $\Phi$ *satisfait* $(C_c^\alpha)$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$ *alors* $\Phi$ *est coercive.*

*Démonstration.* Pour la première assertion, raisonnons par l'absurde. Il est clair que la suite de terme général $m(n) = \inf_{\|u\|\geq n} \Phi$ est croissante et tend vers $d$ quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon_n > 0$ et choisissons $u_n$ tel que

$$\|u_n\| \geq 2n, \Phi(u_n) \leq m(2n) + \varepsilon_n^2 \leq d + \varepsilon_n^2.$$

Appliquons le théorème 3 et la remarque 3 dans $D_n = \{u \in H \mid \|u\| \geq n\}$, avec $\delta_n = \varepsilon_n$, il existe $v_n$ tel que

$$\|v_n\| \geq n, \Phi(v_n) \leq \Phi(u_n) \text{ et } \|\Phi'(\mathrm{v_n})\|\alpha(\|\mathrm{v_n}\|) \leq \frac{\varepsilon_{\mathrm{n}}^2}{\delta_{\mathrm{n}}} = \varepsilon_{\mathrm{n}} \qquad (3.1)$$

Comme $\varepsilon_n$ est arbitraire on peut supposer $\varepsilon_n \to 0$, quand $n \to +\infty$ et faisons tendre $n$ vers $\infty$ dans (3.1), il résulte

$$\|v_n\| \to \infty, \Phi(v_n) \to d, \|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0 \text{ quand n} \to \infty.$$

Ce qui contredit la définition de $(C_d^\alpha)$.

Maintenant, nous allons établir l'assertion 2. Supposons par l'absurde que $\liminf_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = d < \infty$. Considérons la distance géodésique

$$d(x,y) = \inf\{\ell(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{1+\|c(t)\|}\, dt \mid c \in C^1([0,1],H), c(0) = x, c(1) = y\}.$$

On rappele ici que $\ell$ est la longueur d'un chemin joignant $x$ et $y$. Nous vérifions aisément que $d$ est une distance sur $H$. Comme $H$ est un espace de Hilbert la plus petite longueur d'un chemin joignant $x$ et $y$ est celle du segment $[x,y]$. Donc, l'infimum de $\{\ell(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{1+\|c(t)\|}\, dt \mid c \in C^1([0,1],H), c(0) = 0, c(1) = x\}$ est atteint pour le segment joignant les points 0 et $x$ à savoir : $c(t) = tx$. Par suite, $d(0,x) = Log(1+\|x\|)$ pour tout $x \in H$. Soient $\varepsilon_n$ et $u_n$ tels que

$$\|u_n\| \geq 2n, \Phi(u_n) \leq d + \varepsilon_n^2.$$

alors il existe une suite $(v_n)$ tel que $\|v_n\| \geq n$ vérifiant les propriétés *i)* à *vi)* du théorème 1.

Utilisons les mêmes arguments de la démonstration du théorème 2 pour montrer que

$$d(0, v_n + th) = Log(1 + \|v_n + th\|) \geq d(0, v_n) = Log(1 + \|v_n\|) \qquad (3.2)$$

si $t \geq 0$ et $< v_n, h > \geq 0$.

Posons $\gamma(u_n) = 2d(0,u_n) + \gamma + 1$, [$\gamma(u_n)$ est la constante prise dans le théorème 1], et d'une façon analogue pour avoir (2.14), nous obtenons aussi

$$d(u_n, v_n) \leq 2d(0, u_n) + \gamma. \qquad (3.3)$$

Par suite, pour $t$ suffisamment petit, $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et d'après (3.3), nous avons

$$d(u_n, v_n + th) \leq 2d(0, u_n) + \gamma + 1.$$

Dans ces conditions, nous appliquons $vi)$ du théorème 1 et on a donc pour $t$ suffisamment petit

$$\Phi(v_n + th) \geq \Phi(v_n) - \frac{\varepsilon_n^2}{\delta_n \beta(1 + Log(1 + \|v_n + th\|))} d(v_n, v_n + th), \qquad (3.4)$$

Puisque $d(v_n, v_n + th) \leq \|h\| \int_0^t \frac{ds}{1+\|v_n+sh\|}$ si $t \geq 0$ et divisons dans (3.4) les deux membres par $t$ suffisamment petit positif, nous obtenons

$$\frac{1}{t}[\Phi(v_n + th) - \Phi(v_n)] \geq -\frac{\varepsilon_n \|h\|}{\beta(Log(1 + \|v_n + th\|))} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{ds}{1 + \|v_n + sh\|}.$$

Posons $\delta_n = \varepsilon_n$ et faisons tendre $t$ vers 0, il résulte

$$< \Phi'(v_n), h > \geq -\frac{\varepsilon_n \|h\|}{(1 + \|v_n\|)\beta(1 + Log(1 + \|v_n\|))}, \qquad \text{si } < v_n, h > \geq 0.$$

Changeons $h$ par $-h$ si $< v_n, h > \leq 0$, il suit

$$< \Phi'(v_n), h > \leq \frac{\varepsilon_n \|h\|}{(1 + \|v_n\|)\beta(1 + Log(1 + \|v_n\|))}.$$

Pour $\varepsilon_n \to 0$, quand $n \to \infty$, nous obtenons

$$\|v_n\| \to \infty, \Phi(v_n) \to d \text{ et } \Phi'(\mathrm{v_n})\alpha(1 + \|\mathrm{v_n}\|) \to 0, \text{ quand n} \to \infty.$$

Ce qui est absurde et ce qui achève la démonstration. ☑

**Remarque 7.** *La condition* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)} ds < +\infty$ *n'est pas suffisante dans la première assertion du théorème 6 comme le montre l'exemple suivant :*
**Exemple.** *Soient* $r > 1$ *et* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\Phi(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^{\frac{r}{2}}}.$$

*Nous vérifions facilement que* $\liminf\limits_{|u| \to \infty} \Phi(u) = 0$, $\int_1^\infty \frac{1}{(s+1)^r} ds < +\infty$ *et* $\Phi$ *ne satisfait pas la condition* $(C_0^\alpha)$, *avec* $\alpha(s) = (s + 1)^r$.

## Références


[1] H. Brezis & L. Nirenberg, Remarks on finding critical points, *Comm. Pure Appl. Math.*, **64** (1991) 939–963.

[2] L. Caklovic, S. J. Li & M. Willem, A note on Palais–Smale condition and coercivity, *Diff. Int. Eqn.*, **3** (1990) 799–800.

[3] G. Cerami, Un criterio de esistenza per i punti critici su varietá ilimitate, *Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett*, **121** (1978) 332–336.

[4] D. G. Costa & eSilva Elves De B., The Palais-Smale condition versus coercivity, *Nonlinear Analysis*, **16** (1991) 371–381.

[5] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Springer, Berlin, 1990.

[6] I. Ekeland, On the variational principle, *J. Math. Anal. Applic.*, **47** (1974) 324–357.

(Recibido en abril de 2005. Aceptado en febrero de 2006)

Département de Mathématiques et D'informatique
Faculté des Sciences
Université Mohamed I
Oujda, Maroc
*e-mail :* amrouss@sciences.univ-oujda.ac.ma