Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 40 (2006), páginas 87–103

Una generalización de Λ_s-conjuntos y V_s-conjuntos mediante operadores asociados a una topología y funciones asociadas

José Sanabria
Ennis Rosas
Carlos Carpintero
Universidad de Oriente, Venezuela

Resumen. En este trabajo se definen las nociones de (α,β)-semi-kernel y (α,β)-semi-cokernel de un subconjunto $A \subseteq X$ por medio de los conjuntos (α,β)-semiabiertos descritos en [12]. Usando estas nociones se introducen y se estudian nuevas clases de conjuntos denominados: (α,β)-Λ_s-conjunto, (α,β)-V_s-conjunto, (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto y (α,β)-$g.V_s$-conjunto, mediante los cuales caracterizamos a los espacios (α,β)-semi T_1 y (α,β)-semi $T_{1/2}$ estudiados en [12]. Además usando tales conjuntos y la noción de operador asociado a una topología, se introducen y se estudian nuevas clases de funciones que generalizan a las funciones $g.\Lambda_s$-irresolutas y $g.\Lambda_s$-abiertas, véase [2] y [3].

Palabras claves. (α,β)-V_s-conjunto, (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto, funciones $g.\Lambda_s$-abiertas.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 54A05. Secondary: 54D10.

Abstract. In this work the notions of (α,β)-semi-kernel and the (α,β)-semi-cokernel of a subset $A \subseteq X$ are defined, by utilizing the (α,β)-semiopen sets described in [12]. Also using such sets, we introduce and study new classes of sets called: (α,β)-Λ_s-set, (α,β)-V_s-set, (α,β)-$g.\Lambda_s$-set and (α,β)-$g.V_s$-set, Using these notions, we characterize the (α,β)-semi T_1 and (α,β)-semi $T_{1/2}$ spaces studied in [12]. Also using such sets and the notion of associated operator on a topology, we introduce and study a new class of functions that generalize the functions $g.\Lambda_s$-irresolute and $g.\Lambda_s$-open, see [2] and [3].

Research Partially Suported by Consejo de Investigación UDO.

1. Introducción

Los conjuntos semiabiertos y semicerrados fueron introducidos por N. Levine [7] y N. Biswas [1], respectivamente. En años recientes muchos autores han utilizado estas nociones para definir nuevas clases de conjuntos que poseen cierta analogía con clases de conjuntos definidos en términos de conjuntos abiertos y cerrados. Tal es el caso, de las nociones de Λ-conjunto [9] y Λ_s-conjunto [4] definidas de la siguiente manera: Un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ) se dice Λ-conjunto (resp. Λ_s-conjunto) si $A = Ker(A)$ (resp. $A = sKer(A)$), donde $Ker(A)$ (resp. $sKer(A)$) es la intersección de todos los conjuntos abiertos (resp. semiabiertos) que contienen al conjunto A. Los complementos de Λ-conjuntos y Λ_s-conjuntos son denominados V-conjuntos y V_s-conjuntos, respectivamente. De igual manera, en [9] y [4], se introducen generalizaciones de tales conjuntos: Un subconjunto A de (X,τ) se dice $g.\Lambda$-conjunto (resp. $g.\Lambda_s$-conjunto) si $Ker(A) \subseteq F$ (resp. $sKer(A) \subseteq F$) siempre que $A \subseteq F$ y F es cerrado (resp. semicerrado). Mediante el uso de los conjuntos mencionados anteriormente se caracterizan algunos de los axiomas de separación definidos en [8]. En otro contexto, C. Carpintero, E. Rosas y J. Vielma [5] introducen nociones tales como la de operador asociado a una topología τ sobre un conjunto X, conjunto α-semiabierto, las cuales se generalizan en [12], en donde se definen los conjuntos (α,β)-semiabiertos y (α,β)-semicerrados, así como también se estudian nuevos axiomas de separación denominados axiomas de (α,β) semi separación. La idea principal de este trabajo es obtener una noción mucho más amplia que la de los Λ-conjunto y Λ_s-conjuntos, en términos de dos operadores α,β asociados a la topología τ de un espacio X y de esta manera caracterizar algunos de los axiomas de (α,β) semi separación tratados en [12]. También, definimos nuevas clases de funciones que nos permiten estudiar las relaciones existentes entre estas nociones de conjuntos y de esta manera obtener resultados más amplios que los mostrados por M. Caldas en [3].

2. Preliminares

En esta sección estudiamos cierta terminología y algunos resultados básicos, los cuales se emplearán a lo largo de todo este trabajo.

Definición 2.1. [5] *Sea (X,τ) un espacio topológico, se dice que $\alpha : P(X) \to P(X)$ es un operador asociado a la topología τ de X si α satisface $V \subseteq \alpha(V)$ para todo $V \in \tau$.*

Definición 2.2. [5] *Sean (X,τ) un espacio topológico y α un operador asociado a la topología τ de X. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice que es α-semiabierto si existe $U \in \tau$ tal que $U \subseteq A \subseteq \alpha(U)$. El complemento de un conjunto α-*

La colección de todos los conjuntos α-semiabiertos en X, se denotará por α-SO(X,τ) y la colección de todos los conjuntos α-semicerrados en X, por α-SC(X,τ).

Definición 2.3. [12] *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\alpha,\beta : P(X) \to P(X)$ operadores asociados a τ. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice (α,β)-semiabierto si para cada $x \in A$, existe un conjunto β-semiabierto V tal que $x \in V$ y $\alpha(V) \subseteq A$. El complemento de un conjunto (α,β)-semiabierto es (α,β)-semicerrado.*

La colección de todos los conjuntos (α,β)-semiabiertos en X, se denotará por (α,β)-SO(X,τ) y la colección de todos los conjuntos (α,β)-semicerrados en X, por (α,β)-SC(X,τ). Observe que si β es un operador monótono (i.e. $\beta(U) \subseteq \beta(V)$ siempre que $U \subseteq V$) y $\alpha = id$, entonces la colección (α,β)-SO(X,τ) coincide con la colección de los conjuntos β-semiabiertos, β-SO(X,τ).

En los siguientes lemas se recogen algunas propiedades fundamentales de los conjuntos (α,β)-semiabiertos (resp. (α,β)-semicerrados).

Lema 2.1. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\alpha,\beta : P(X) \to P(X)$ operadores asociados a la topología τ sobre X. Si $\{A_i : i \in I\}$ es una colección de conjuntos (α,β)-semiabiertos, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es (α,β)-semiabierto.*

Demostración. Sea $x \in \bigcup_i A_i$, entonces $x \in A_j$ para algún $j \in I$. Luego existe $V_j \in \beta$-SO(X,τ) tal que $x \in V_j$ y $\alpha(V_j) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_i A_i$. En consecuencia, para cada $x \in \bigcup_i A_i$, existe $V_j \in \beta$-SO(X,τ) tal que $\alpha(V_j) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Lo que nos dice que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es (α,β)-semiabierto. ☑

Corolario 2.1. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\alpha,\beta : P(X) \to P(X)$ operadores asociados a la topología τ sobre X. Si $\{A_i : i \in I\}$ es una colección de conjuntos (α,β)-semicerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es (α,β)-semicerrado*

Estas dos últimas proposiciones nos permiten definir de manera natural, la (α,β)-semiclausura y el (α,β)-seminterior de un subconjunto $A \subseteq X$, denotados por (α,β)-sCl(A) y (α,β)-sInt(A), respectivamente. De esta manera, para cada $A \subseteq X$ tenemos

$$(\alpha,\beta) - s\mathrm{Cl}(A) = \left\{\bigcap F : A \subset F \; y \; F \; es \; (\alpha,\beta)\text{-semicerrado}\right\},$$

$$(\alpha,\beta) - s\mathrm{Int}(A) = \left\{\bigcup V : V \subset A \; y \; V \; es \; (\alpha,\beta)\text{-semiabierto}\right\}.$$

Definición 2.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\alpha,\beta : P(X) \to P(X)$ operadores asociados a τ. Para cada $A \subseteq X$ se define el (α,β)-semi-kernel de A, denotado (α,β)-$sKer(A)$, como la intersección de todos los conjuntos (α,β)-semiabiertos que contienen a A.*

Definición 2.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\alpha,\beta : P(X) \to P(X)$ operadores asociados a τ. Para cada $A \subseteq X$ se define el (α,β)-semi-cokernel de A, denotado (α,β)-$sCok(A)$, como la unión de todos los conjuntos (α,β)-semicerrados que están contenidos en A.*

El (α,β)-semi-kernel y el (α,β)-semi-cokernel de un conjunto $A \subseteq X$ satisfacen las siguientes propiedades.

Lema 2.2. *Sean A, B y $\{B_\lambda : \lambda \in I\}$ subconjuntos de un espacio topológico (X,τ). Consideremos α, β operadores asociados a la topología τ sobre X. Entonces:*

(a) $A \subseteq (\alpha,\beta) - sKer(A)$;

(b) $(\alpha,\beta) - sKer(A) \subseteq (\alpha,\beta) - sKer(B)$ *si* $A \subseteq B$;

(c) $(\alpha,\beta) - sKer\left((\alpha,\beta) - sKer(A)\right) = (\alpha,\beta) - sKer(A)$;

(d) $(\alpha,\beta) - sKer\left(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in I}(\alpha,\beta) - sKer(B_\lambda)$;

(e) $A = (\alpha,\beta) - sKer(A)$ *si* $A \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$;

(f) $(\alpha,\beta) - sKer\left(X \backslash B\right) = X\backslash(\alpha,\beta) - sCok(B)$;

(g) $(\alpha,\beta) - sCok(A) \subseteq A$;

(h) $A = (\alpha,\beta) - sCok(A)$ *si* $A \in (\alpha,\beta)\text{-}SC(X,\tau)$;

(i) $(\alpha,\beta) - sKer\left(\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda\in I}(\alpha,\beta) - sKer(B_\lambda)$;

(j) $(\alpha,\beta) - sCok\left(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda\right) \supseteq \bigcup_{\lambda\in I}(\alpha,\beta) - sCok(B_\lambda)$.

Demostración. (a) Sea $x \in A$, entonces $x \in U$ para todo $U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$ tal que $A \subseteq U$. Luego, $x \in \bigcap\{U : A \subseteq U \text{ y } U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)\}$. Es decir, $x \in (\alpha,\beta)\text{-}sKer(A)$.
(b) Supongamos que $x \notin (\alpha,\beta)\text{-}sKer(B)$. Entonces, existe un subconjunto $U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$ tal que $B \subseteq U$ y $x \notin U$. Como $A \subseteq B \subseteq U$, tenemos que $x \notin (\alpha,\beta)\text{-}sKer(A)$. Por lo tanto, $(\alpha,\beta)\text{-}sKer(A) \subseteq (\alpha,\beta)\text{-}sKer(B)$.
(c) Por la propiedad (a) siempre se tiene que $(\alpha,\beta)\text{-}sKer(A) \subseteq (\alpha,\beta)\text{-}sKer((\alpha,\beta)\text{-}sKer(A))$. Supongamos que $x \in (\alpha,\beta)\text{-}sKer((\alpha,\beta)\text{-}sKer(A))$. Entonces $x \in U$ para todo $U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$ tal que $(\alpha,\beta)\text{-}sKer(A) \subseteq U$. Puesto que $A \subseteq (\alpha,\beta)\text{-}sKer(A)$, entonces $x \in U$ para todo $U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$ tal que $A \subseteq U$. Es decir, $x \in (\alpha,\beta)\text{-}sKer(A)$.
(d) Sea $x \notin (\alpha,\beta)\text{-}sKer\left(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda\right)$, entonces existe un subconjunto $U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$ tal que $\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda \subseteq U$ y $x \notin U$. Puesto que $B_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda \subseteq U$, entonces para cada $\lambda \in I$ se tiene que $x \notin (\alpha,\beta)\text{-}sKer(B_\lambda)$. Por lo tanto, $x \notin \bigcup_{\lambda\in I}(\alpha,\beta)\text{-}sKer(B_\lambda)$. Recíprocamente, supongamos que existe un punto $x \in X$ tal que $x \notin \bigcup_{\lambda\in I}(\alpha,\beta)\text{-}sKer(B_\lambda)$. Entonces, para cada $\lambda \in I$, existen subconjuntos $U_\lambda \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$ tal que $x \notin U_\lambda$ y $B_\lambda \subseteq U_\lambda$. Definamos, $V = \bigcup_{\lambda\in I} U_\lambda$.

Así, tenemos que $x \notin \bigcup_{\lambda\in I} U_\lambda$, $\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda \subseteq V$ y $V \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$. Por lo tanto, $x \notin (\alpha,\beta)\text{-}sKer\left(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda\right)$.

(e) Supongamos que A es un conjunto (α,β)-semiabierto. Entonces: $(\alpha,\beta)\text{-}sKer(A) = \bigcap\{U : A \subseteq U, U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)\} \subseteq A$, puesto que $A \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$. Por aplicación de (a), siempre se tiene que $A \subseteq (\alpha,\beta)\text{-}sKer(A)$.

(f) $X\backslash(\alpha,\beta)\text{-}sCok(B) = X\backslash\bigcup\{F : B \supseteq F, F \in (\alpha,\beta)\text{-}SC(X,\tau)\} = \bigcap\{X\backslash F : B \supseteq F, F \in (\alpha,\beta)\text{-}SC(X,\tau)\} = \bigcap\{X\backslash F : X\backslash B \subseteq X\backslash F, X\backslash F \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)\} = (\alpha,\beta) - sKer(X\backslash B)$.

(g) Sea $x \in (\alpha,\beta)\text{-}sCok(A)$, entonces $x \in F$ para algún $F \in (\alpha,\beta)\text{-}SC(X,\tau)$ tal que $A \supseteq F$. Por lo tanto, $x \in A$.

(h) Supongamos que A es un conjunto (α,β)-semicerrado. Entonces: $(\alpha,\beta)\text{-}sCok(A) = \bigcup\{F : A \supseteq F, F \in (\alpha,\beta)\text{-}SC(X,\tau)\} \supseteq A$, puesto que $A \in (\alpha,\beta)\text{-}SC(X,\tau)$. Por aplicación de (g), siempre se tiene que $A \supseteq (\alpha,\beta)\text{-}sCok(A)$.

(i) Supongamos que $x \notin \bigcap_{\lambda\in I}(\alpha,\beta)\text{-}sKer(B_\lambda)$. Entonces, existe $\lambda \in I$ tal que $x \notin (\alpha,\beta)\text{-}sKer(B_\lambda)$. Por lo tanto, existe $\lambda \in I$ y $U \in (\alpha,\beta)\text{-}SO(X,\tau)$ tal que $B_\lambda \subseteq U$ y $x \notin U$. Puesto que $\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda \subseteq B_\lambda \subseteq U$, se concluye que $x \notin (\alpha,\beta)\text{-}sKer(\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda)$.

(j) Para $B \subseteq X$, denotemos $X\backslash B$ por B^c. Aplicando condiciones (f) e (i), tenemos que

$$\begin{aligned}
(\alpha,\beta)\text{-}sCok\left(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda\right) &= \left[\left[(\alpha,\beta)\text{-}sCok\left(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda\right)\right]^c\right]^c \\
&= \left[(\alpha,\beta)\text{-}sKer\left(\left[\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda\right]^c\right)\right]^c \\
&= \left[(\alpha,\beta)\text{-}sKer\left(\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda^c\right)\right]^c \supseteq \left[\bigcap_{\lambda\in I}(\alpha,\beta)\text{-}sKer\,(B_\lambda^c)\right]^c \\
&= \left[\bigcap_{\lambda\in I}[(\alpha,\beta) - sCok\,(B_\lambda)]^c\right]^c \\
&= \bigcup_{\lambda\in I}[[(\alpha,\beta)\text{-}sCok\,(B_\lambda)]^c]^c \\
&= \bigcup_{\lambda\in I}(\alpha,\beta)\text{-}sCok\,(B_\lambda).
\end{aligned}$$

☑

El siguiente ejemplo muestra que, en general, el (α,β)-$sKer(A\cap B)\neq$ (α,β)-$sKer(A)\cap(\alpha,\beta)$-$sKer(B)$.

Ejemplo 2.1. *Sea $X=\{a,b,c\}$ y $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Definamos los operadores:*

$$\alpha(A)=\begin{cases} A, & si\ b\in A,\\ Cl(A), & si\ b\notin A.\end{cases}$$
$$\beta(A)=\begin{cases} Cl(A), & si\ b\in A,\\ A, & si\ b\notin A.\end{cases}$$

Entonces, tenemos que:

$$\beta-SO(X,\tau)=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\},$$
$$(\alpha,\beta)-SO(X,\tau)=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}.$$

Sea $A_1=\{a\}$ y $A_2=\{b\}$, entonces (α,β)-$sKer(A_1\cap A_2)=(\alpha,\beta)$-$sKer(\emptyset)=\emptyset$ y (α,β)-$sKer(A_1)\cap(\alpha,\beta)$-$sKer(A_2)$=$(\alpha,\beta)$-$sKer(\{a\})\cap(\alpha,\beta)$-$sKer(\{b\})$= $\{a,b\}\cap\{b\}$= $\{b\}$.

3. (α,β)-Λ_s-conjuntos y (α,β)-V_s-conjuntos

En esta sección usamos las Definiciones 2.4 y 2.5 para introducir las clases de los (α,β)-Λ_s-conjuntos y (α,β)-V_s-conjuntos, las cuales son más amplias que las clases de los Λ_s-conjuntos y V_s-conjuntos introducidas por Caldas y Dontchev [4]. Además usando estos conjuntos caracterizaremos los espacios (α,β)-semi T_1 [12].

Definición 3.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β: $P(X)\to P(X)$ operadores asociados a τ. Un subconjunto $A\subseteq X$ se dice (α,β)-Λ_s-conjunto si $A=(\alpha,\beta)$-$sKer(A)$.*

Definición 3.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β: $P(X)\to P(X)$ operadores asociados a τ. Un subconjunto $A\subseteq X$ se dice (α,β)-V_s-conjunto si $A=(\alpha,\beta)$-$sCok(A)$.*

Es de observar que cuando $\alpha=\beta=id$, tenemos que:

1. A es (α,β)-Λ_s-conjunto si y sólo si A es Λ-conjunto.
2. A es (α,β)-V_s-conjunto si y sólo si A es V-conjunto.

En el caso que $\alpha=id$ y $\beta=Cl$, entonces:

1. A es (α,β)-Λ_s-conjunto $\Longleftrightarrow$ A es Λ_s-conjunto.
2. A es (α,β)-V_s-conjunto $\Longleftrightarrow$ A es V_s-conjunto.

Proposición 3.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β: $P(X)\to P(X)$ operadores asociados a la topología τ sobre X. Entonces:*

(a) *$\emptyset$ y X son (α,β)-Λ_s-conjuntos y (α,β)-V_s-conjuntos.*
(b) *Un subconjunto B es un (α,β)-Λ_s-conjunto si y sólo si $X\backslash B$ es un (α,β)-V_s-conjunto.*
(c) *Toda unión de (α,β)-Λ_s-conjuntos (resp. (α,β)-V_s-conjuntos) es un (α,β)-Λ_s-conjunto (resp. (α,β)-V_s-conjunto).*
(d) *Toda intersección de (α,β)-Λ_s-conjuntos (resp. (α,β)-V_s-conjuntos) es un (α,β)-Λ_s-conjunto (resp. (α,β)-V_s-conjunto).*

Demostración. (a) y (b) se obtienen inmediatamente de las Definiciones 3.1 y 3.2 y el Lema 2.2.
(c) Sea $\{B_\lambda : \lambda \in I\}$ una colección de (α,β)-Λ_s-conjuntos en X. Por la Definición 3.1 y el Lema 2.2 (d), tenemos

$$\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda = \bigcup_{\lambda\in I}(\alpha,\beta) - sKer(B_\lambda) = (\alpha,\beta) - sKer(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda).$$

(d) Sea $\{B_\lambda : \lambda \in I\}$ una colección de (α,β)-Λ_s-conjuntos en X. Entonces por la Definición 3.1 y el Lema 2.2 (i), tenemos

$$(\alpha,\beta) - sKer(\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda\in I}(\alpha,\beta) - sKer(B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda.$$

Por otra parte, aplicando el Lema 2.2 (a) obtenemos que

$$\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda \subseteq (\alpha,\beta) - sKer(\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda).$$

☑

Recordemos que si (X,τ) es un espacio topológico y α,β son operadores asociados a la topología τ sobre X, se dice que X es un espacio (α,β)-semi T_1 [12] si para cada par de puntos distintos $x,y \in X$ existe un par de conjuntos (α,β)-semiabiertos, uno de ellos contiene a y pero no a x y el otro contiene a x pero no a y. En [12] se mostró que un espacio X es (α,β)-semi T_1 si y solo si cada conjunto unitario es (α,β)-semi cerrado.

Proposición 3.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α,β operadores asociados a la topología τ sobre X. El espacio topológico X es (α,β)-semi T_1 si y sólo si cada subconjunto de X es un (α,β)-Λ_s-conjunto (o equivalentemente un (α,β)-V_s-conjunto).*

Demostración. Suficiencia: Sea X un espacio (α,β)-semi T_1 y B un subconjunto de X. Supongamos que existe un punto $x \in X$ tal que $x \notin B$. Entonces, $X\backslash\{x\}$ es un conjunto (α,β)-semiabierto que contiene a B. Luego, (α,β)-$sKer(B) \subseteq X\backslash\{x\}$. Esto implica que $x \notin (\alpha,\beta)$-$sKer(B)$. De esta manera, tenemos que (α,β)-$sKer(B) \subseteq B$. Por el Lema 2.2 (a) se tiene que $B \subseteq (\alpha,\beta)$-$sKer(B)$.
Necesidad: Sea $D(x) = \{S : x \in S$ y S es (α,β)-semiabierto$\}$. Según la hipótesis, $\{x\} = \bigcap_{S\in D(x)} S$, por lo tanto si $y \neq x$ entonces $y \notin \bigcap_{S\in D(x)} S$ y así existe

un conjunto (α,β)-semiabierto S tal que $x \in S$ y $y \notin S$. En forma análoga, $y \notin \bigcap_{S' \in D(y)} S'$ y existe un conjunto (α,β)-semiabierto S' tal que $y \in S'$ y $x \notin S'$. Esto nos dice que X es un espacio (α,β)-semi T_1. ☑

4. (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjuntos y (α,β)-$g.V_s$-conjuntos

Introducimos en esta sección las clases de (α,β)-Λ_s-conjuntos generalizados y (α,β)-V_s-conjuntos generalizados de una manera natural al caso de los conjuntos introducidos por Maki [9] y Caldas & Dontchev [4], respectivamente. Usando estas nuevas clases de conjuntos, caracterizamos los espacios (α,β)-semi $T_{1/2}$ [12].

Definición 4.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α,β operadores asociados a τ. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto si (α,β)-$sKer(A) \subseteq F$ siempre que $A \subseteq F$ y $F \in (\alpha,\beta)$-$SC(X,\tau)$.*

Definición 4.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β: $P(X) \rightarrow P(X)$ operadores asociados a τ. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice (α,β)-$g.V_s$-conjunto si su complemento $X \backslash A$ es un $(\alpha,\beta) - g.\Lambda_s$-conjunto.*

Observe que:

1. A es (α,β)-semiabierto $\Rightarrow$ A es (α,β)-Λ_s-conjunto $\Rightarrow$ (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto.
2. A es (α,β)-semicerrado $\Rightarrow$ A es (α,β)-V_s-conjunto $\Rightarrow$ (α,β)-$g.V_s$-conjunto.

Nótese además que cuando $\alpha = \beta = id$, entonces:

1. A es (α,β)-g.Λ_s-conjunto $\Longleftrightarrow$ A es g.Λ-conjunto.
2. A es (α,β)-g.V_s-conjunto $\Longleftrightarrow$ A es g.V-conjunto.

Cuando $\alpha = id$ y $\beta = Cl$, entonces:

1. A es (α,β)-g.Λ_s-conjunto $\Longleftrightarrow$ A es g.Λ_s-conjunto.
2. A es (α,β)-g.V_s-conjunto $\Longleftrightarrow$ A es g.V_s-conjunto.

En el siguiente ejemplo, se muestra que existen (α,β)-g.Λ_s-conjuntos que no son (α,β)-Λ_s-conjuntos.

Ejemplo 4.1. *Sea $X = \{a,b,c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a\}\}$. Definamos los operadores:*

$$\alpha(A) = \begin{cases} A, & si\ b \in A, \\ Cl(A), & si\ b \notin A. \end{cases}$$

$$\beta(A) = \begin{cases} Cl(A), & si\ c \notin A, \\ A, & si\ c \in A. \end{cases}$$

Entonces, tenemos que:

$$\beta - SO(X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\},$$

$$(\alpha,\beta) - SO(X,\tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}.$$

La colección de los (α,β)-Λ_s-conjuntos es:

$$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\},$$

mientras que la colección de los (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjuntos es:

$$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}.$$

Nótese que $\{b\}, \{c\}, \{a,b\}$ y $\{a,c\}$ son (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjuntos, pero no son (α,β)-Λ_s-conjuntos.

Proposición 4.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β dos operadores asociados a τ. Entonces:*

(*i*) *Para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto (α,β)-semiabierto o $X\backslash\{x\}$ es un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en X.*

(*ii*) *Para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto (α,β)-semiabierto o $\{x\}$ es un (α,β)-$g.V_s$-conjunto en X.*

Demostración. (*i*) Supongamos que $\{x\}$ no es (α,β)-semiabierto. Entonces el único conjunto (α,β)-semicerrado F que contiene al conjunto $X\backslash\{x\}$ es X. Luego, (α,β)-$sKer\,(X\backslash\{x\}) \subseteq F = X$ y así $X\backslash\{x\}$ es un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en X.
(*ii*) Se obtiene inmediatamente de (*i*). ☑

Proposición 4.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β dos operadores asociados a τ. Un subconjunto A de X es un (α,β)-$g.V_s$-conjunto si y sólo si $U \subseteq (\alpha,\beta)$-$sCok(A)$ siempre que $U \subseteq A$ y $U \in (\alpha,\beta)$-$SO(X,\tau)$.*

Demostración. Suficiencia: Sea A un (α,β)-$g.V_s$-conjunto en X y sea U un conjunto (α,β)-semiabierto en X tal que $U \subseteq A$, entonces $X\backslash U$ es un (α,β)-semicerrado en X y $X\backslash A \subseteq X\backslash U$. Luego, $X\backslash A$ es un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto y así (α,β)-$sKer(X\backslash A) \subseteq X\backslash U$. Por aplicación del Lema 2.2 (f), tenemos que $X\backslash(\alpha,\beta)$-$sCok(A) \subseteq X\backslash U$. De esta manera, $U \subseteq (\alpha,\beta)$-$sCok(A)$.
Necesidad: Sea F un conjunto (α,β)-semicerrado en X tal que $X\backslash A \subseteq F$. Puesto que, $X\backslash F$ es (α,β)-semiabierto y $X\backslash F \subseteq A$, por la hipótesis tenemos que $X\backslash F \subseteq (\alpha,\beta) - sCok(A)$. Entonces, $X\backslash(\alpha,\beta) - sCok(A) = (\alpha,\beta) - sKer(X\backslash A) \subseteq F$ por el Lema 2.2 (f), y $X\backslash A$ es un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto. Por lo tanto, A es un (α,β)-$g.V_s$-conjunto. ☑

Seguidamente introduciremos algunas terminologías y resultados adicionales para continuar desarrollando este trabajo, recordemos algunas definiciones y resultados básicos.

Definición 4.3. [10] *Sea (X,τ) un espacio topológico y α,β dos operadores asociados a τ. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice (α,β)-sg-cerrado si (α,β)-$sCl(A) \subseteq U$ para todo $U \in (\alpha,\beta)$-$SO(X,\tau)$ tal que $A \subseteq U$.*

Claramente todo conjunto (α,β)-semicerrado es (α,β)-sg-cerrado pero el reciproco no es cierto [10].

Proposición 4.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α,β dos operadores asociados a τ. Para cada $x \in X$, $\{x\}$ es (α,β)-semicerrado o $X\backslash\{x\}$ es (α,β)-sg-cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que $\{x\}$ no es (α,β)-semicerrado. Entonces el único conjunto (α,β)-semiabierto U que contiene al conjunto $X\backslash\{x\}$ es X. Por lo tanto, (α,β)-$sCl\,(X\backslash\{x\}) \subseteq X$ y así $X\backslash\{x\}$ es un (α,β)-sg-cerrado en X. ☑

Definición 4.4. [12] *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β dos operadores asociados a τ. Se dice que X es un espacio (α,β)-semi $T_{1/2}$ si todo conjunto (α,β)-sg-cerrado es un conjunto (α,β)-semicerrado.*

Teorema 4.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α,β dos operadores asociados a τ. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*i*) *X es un espacio (α,β)-semi $T_{1/2}$.*
(*ii*) *Cada (α,β)-g.V_s-conjunto es un $(\alpha,\beta) - V_s$-conjunto.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que existe un (α,β)-g.V_s-conjunto A que no es un $(\alpha,\beta) - V_s$-conjunto. Puesto que (α,β)-$sCok(A) \subsetneq A$ ((α,β)-$sCok(A) \neq A$), entonces existe un punto $x \in X$ tal que $x \notin (\alpha,\beta)$-$sCok(A)$. Entonces el conjunto unitario $\{x\}$ no es (α,β)-semicerrado. En virtud de la Proposición 4.3, $X\backslash\{x\}$ es un conjunto (α,β)-sg-cerrado. Por otra parte, tenemos que $\{x\}$ no es (α,β)-semiabierto (puesto que A es un (α,β)-g.V_s-conjunto, $x \notin (\alpha,\beta)$-$sCok(A)$ y la Proposición 4.2). Por lo tanto, $X\backslash\{x\}$ no es (α,β)-semicerrado pero el es un conjunto (α,β)-sg-cerrado. Esto contradice el supuesto que X es un espacio (α,β)-semi $T_{1/2}$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que X no es un espacio (α,β)-semi $T_{1/2}$. Entonces, existe un conjunto (α,β)-sg-cerrado A que no es (α,β)-semicerrado. Puesto que A no es (α,β)-semicerrado, existe un punto x tal que $x \notin A$ y $x \in (\alpha,\beta)$-$sCl(A)$. Por la proposición 4.1, tenemos que el conjunto unitario $\{x\}$ es un conjunto (α,β)-semiabierto o es un (α,β)-g.V_s-conjunto. Si $\{x\}$ fuese (α,β)-semiabierto, entonces tenemos que $\{x\} \bigcap A \neq \emptyset$ puesto que $x \in (\alpha,\beta)$-$sCl(A)$. Pero esto es contradictorio. Ahora, consideremos el caso cuando $\{x\}$ es un (α,β)-g.V_s-conjunto. Si $\{x\}$ no es (α,β)-semicerrado, entonces tenemos que (α,β)-$sCok(\{x\}) = \emptyset$ y por lo tanto $\{x\}$ no es un (α,β)-V_s-conjunto. Esto contradice la condición (*ii*). Ahora, si $\{x\}$ es (α,β)-semicerrado, tenemos que $X\backslash\{x\} \supseteq (\alpha,\beta)$-$sCl(A)$ (i.e., $x \notin (\alpha,\beta)$-$sCl(A)$). En efecto, el conjunto (α,β)-semiabierto $X\backslash\{x\}$ contiene al conjunto A que es un conjunto (α,β)-sg-cerrado. Entonces, esto contradice el hecho de que $x \in (\alpha,\beta)$-$sCl(A)$. ☑

5. Funciones asociadas a los (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjuntos y (α,β)-$g.V_s$-conjuntos

A continuacón se introducen ciertas clases de funciones que tienen importantes conexiónes con la nociones de (α,β)-g.Λ_s-conjunto y (α,β)-g.V_s-conjunto descritas anteriormente.

Definición 5.1. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados.*

1. *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\psi)$ se dice $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semiabierta si para cada conjunto V (α,β)-semiabierto en (X,τ), $f(V)$ es un (σ,θ)-semiabierto en (Y,ψ)* [11].
2. *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\psi)$ se dice $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semicerrada si para cada conjunto V (α,β)-semicerrado en (X,τ), $f(V)$ es un (σ,θ)-semicerrado en (Y,ψ)* [12].
3. *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\psi)$ se dice $(\alpha,\beta),(\sigma,\theta)$-irresoluta si $f^{-1}(V)$ es (α,β)-semiabierto en (X,τ) para cada subconjunto V (σ,θ)-semiabierto en (Y,ψ)* [11].
4. *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\psi)$ se dice $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua si $f^{-1}(V)$ es (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en (X,τ) para cada subconjunto V (σ,θ)-semiabierto en (Y,ψ).*
5. *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\psi)$ se dice $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-irresoluta si $f^{-1}(V)$ es (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en (X,τ) para cada subconjunto V (σ,θ)-$g.\Lambda_s$-conjunto en (Y,ψ).*
6. *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\psi)$ se dice $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.V_s$-semicerrada si para cada conjunto V (α,β)-semicerrado en (X,τ), $f(V)$ es un (σ,θ)-$g.V_s$-conjunto en (Y,ψ).*
7. *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\psi)$ se dice $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta si para cada conjunto V (α,β)-semiabierto en (X,τ), $f(V)$ es un (σ,θ)-$g.\Lambda_s$-conjunto en (Y,ψ).*

Observe que si:

1. En la Definición 5.1.4 $\alpha=\sigma=\theta=id$ y $\beta=Cl$, entonces obtenemos la definición de función g.Λ_s-continua dada en [2].
2. Si en la Definición 5.1.5 tomamos $\alpha=\sigma=id$ y $\beta=\theta=Cl$, entonces obtenemos la definición de función g.Λ_s-irresoluta dada en [2].
3. En las Definiciones 5.1.6 y 5.1.7 tomamos $\alpha=\beta=\sigma=id$ y $\theta=Cl$, entonces obtenemos la definiciones de función g.V_s-cerrada [2] y función g.Λ_s-abierta [3], respectivamente.

Lema 5.1. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados y sea $g:X\to Y$ una función. Las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) Si g es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta, entonces para todo subconjunto B de Y, (α,β)-sKer$(g^{-1}(B))\subseteq g^{-1}((\sigma,\theta)$-sKer$(B))$.

(ii) Si g es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semiabierta y biyectiva, entonces para todo subconjunto A de X, (σ,θ)-sKer$(g(A))=g((\alpha,\beta)$-sKer$(A))$.

Demostración. (i) Supongamos que $g:X\to Y$ es una función $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta y sea B un subconjunto de Y. Sea $x\in(\alpha,\beta)$-sKer$(g^{-1}(B))$, entonces $x\in U$ para todo $U\in(\alpha,\beta)$-SO(X,τ) tal que $g^{-1}(B)\subseteq U$. Consideremos $\mathcal{O}\in(\sigma,\theta)$-SO$(Y,\psi)$ tal que $B\subseteq\mathcal{O}$, entonces $g^{-1}(B)\subseteq g^{-1}(\mathcal{O})$ y $g^{-1}(\mathcal{O})\in(\alpha,\beta)$-SO$(X,\tau)$, puesto que g es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta. Luego, por la hipótesis $x\in$

$g^{-1}(\mathcal{O})$. Esto implica que $g(x) \in \mathcal{O}$ para todo $\mathcal{O} \in (\sigma,\theta)$-SO$(Y,\psi)$ tal que $B \subseteq \mathcal{O}$. Es decir, $x \in g^{-1}(\sigma,\theta)$-sKer$(B)$.
(ii) Supongamos que $g : X \to Y$ es una función $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semiabierta y biyectiva. Entonces, para cada subconjunto A de X se tiene que:

$$\begin{aligned} g((\alpha,\beta)\text{-sKer}(A)) &= g\left(\bigcap\{U \in (\alpha,\beta)\text{-SO}(X,\tau) : A \subseteq U\}\right) \\ &= \bigcap\{g(U) \in (\sigma,\theta)\text{-SO}(Y,\psi) : g(A) \subseteq g(U)\} \\ &= \bigcap\{V \in (\sigma,\theta)\text{-SO}(Y,\psi) : g(A) \subseteq V\} \\ &= (\sigma,\theta)\text{-sKer}(g(A)). \end{aligned}$$

☑

Teorema 5.1. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ), (Z,φ,γ,η) tres espacios con operadores asociados. Sean f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ dos funciones tales que $g \circ f$: $X \to Z$ es una función $((\alpha,\beta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta. Entonces:*

(i) g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta, si f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta y sobreyectiva.

(ii) f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta, si g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-irresoluta, $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-semicerrada y biyectiva.

Demostración. (i) Sea B un conjunto (σ,θ)-semiabierto en Y. Entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto (α,β)-semiabierto en X, puesto que f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta. Usando la hipótesis de que $g \circ f$ es una función $((\alpha,\beta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta se tiene que $(g \circ f)(f^{-1}(B))$ es un (γ,η)-g.Λ_s-conjunto en Z y puesto que g es sobreyectiva se concluye que $g(B)$ es un (γ,η)-g.Λ_s-conjunto en Z. Por lo tanto, g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta.
(ii) Sea A un conjunto (α,β)-semiabierto en X, entonces $(g \circ f)(A)$ es un (γ,η)-g.Λ_s-conjunto, puesto que $(g \circ f)$ es $((\alpha,\beta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta. Supongamos que $(g \circ f)(A) = C$ y $g^{-1}(C) \subseteq F$ donde $F \in (\sigma,\theta)$-SO(Y,ψ). Esto implica que $C \subseteq g(F)$ y $g(F) \in (\gamma,\eta)$-SO(Z,φ), puesto que g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-semicerrada. Luego, como C es un (γ,η)-g.Λ_s-conjunto tenemos que (γ,η)-sKer$(C) \subseteq g(F)$ y $g^{-1}((\gamma,\eta)$-sKer$(C)) \subseteq F$. Ahora, dado que la función g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-irresoluta aplicamos el Lema 5.1(i) y obtenemos que (σ,θ)-sKer$(g^{-1}(C)) \subseteq g^{-1}((\gamma,\eta)$-sKer$(C)) \subseteq F$. Así, $g^{-1}(C) = g^{-1}(g \circ f)(A)$ es un (σ,θ)-g.Λ_s-conjunto en Y. Puesto que g es inyectiva, se obtiene que $g^{-1}(g \circ f)(A) = f(A)$ es un (σ,θ)-g.Λ_s-conjunto en Y. Por lo tanto, f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta. ☑

Observe que una biyección $f : X \to Y$ es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semiabierta si y sólo si f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semicerrada.

Teorema 5.2. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ), (Z,φ,γ,η) tres espacios con operadores asociados. Sean f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ dos funciones. Las siguientes condiciones se satisfacen:*

(*i*) *Si f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta y g es biyectiva,$((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-irresoluta y $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-semicerrada, entonces $g\circ f : X \rightarrow Z$ es una función $((\alpha,\beta),(\gamma,\eta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta.*

(*ii*) *f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semiabierta y g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta, entonces $g\circ f : X \rightarrow Z$ es una función $((\alpha,\beta),(\gamma,\eta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta.*

Demostración. (*i*) Sea A un conjunto (α,β)-semiabierto en X, entonces $f(A)$ es un (σ,θ)-g.Λ_s-conjunto en Y, puesto que f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta. Supongamos que $g(f(A)) \subseteq F$ donde $F \in (\gamma,\eta)$-SO(Z,φ). Esto implica que $f(A) \subseteq g^{-1}(F)$ y $g^{-1}(F) \in (\sigma,\theta)$-SO$(Y,\psi)$, puesto que g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-irresoluta. Dado que la función g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-semiabierta y biyectiva aplicamos el Lema 5.1(ii) y obtenemos que (γ,η)-sKer$(g(f(A))) \subseteq g((\sigma,\theta)$-sKer $(f(A))) \subseteq F$. Por lo tanto, $g(f(A))$ es un (γ,η)-g.Λ_s-conjunto en Z. Así, $g\circ f$ es $((\alpha,\beta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta.
(*ii*) Supongamos que A es un conjunto (α,β)-semiabierto en X, entonces $f(A)$ es un conjunto (σ,θ)-semiabierto en Y, puesto que f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semiabierta. Luego, $g(f(A))$ es un (γ,η)-g.Λ_s-conjunto en Z, puesto que g es $((\sigma,\theta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta. Por lo tanto, $g\circ f$ es una función $((\alpha,\beta),(\gamma,\eta))$-g.$\Lambda_s$-semiabierta. ☑

Nótese que:

1. Cuando $\alpha=\beta=\sigma=\gamma=id$ y $\theta=\eta=Cl$, el Teorema 5.2(i) coincide con el Teorema 3.4.(i) en [3].
2. Cuando $\alpha=\sigma=\gamma=id$ y $\beta=\theta=\eta=Cl$, entonces el Teorema 5.2(ii) coincide con el Teorema 3.4.(ii) en [3].

Teorema 5.3. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Sean $f\colon X \rightarrow Y$ una función $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-irresoluta. Entonces f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua.*

Demostración. Supongamos que $f\colon X \rightarrow Y$ es una función $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-irresoluta y sea B un conjunto (σ,θ)-semiabierto en Y. Entonces, $f^{-1}(B)$ es un conjunto (α,β)-semiabierto en X. Pero, todo conjunto (α,β)-semiabierto en X es un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en X. Por lo tanto, f es una función $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-g.$\Lambda_s$-semicontinua. ☑

En los siguientes dos teoremas se caracterizan las funciones $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-irresoluta y $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua, respectivamente. La demostración de estos teoremas se fundamenta en el hecho de que $f^{-1}(Y\backslash A) = X\backslash f^{-1}(A)$.

Teorema 5.4. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Una función $f\colon X \rightarrow Y$ es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-irresoluta si y sólo si, para cada (σ,θ)-$g.V_s$-conjunto B de Y, la imagen inversa $f^{-1}(B)$ es un (α,β)-$g.V_s$-conjunto de X .*

Teorema 5.5. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Una función $f\colon X \to Y$ es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua si y sólo si, para cada (σ,θ)-semicerrado A de Y, la imagen inversa $f^{-1}(A)$ es un (α,β)-$g.V_s$-conjunto de X .*

Teorema 5.6. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Sea $f\colon X \to Y$ una función biyectiva, $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta y $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semicerrada, entonces:*

(*i*) *Para cada (σ,θ)-$g.\Lambda_s$-conjunto B en Y, $f^{-1}(B)$ es un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en X.*

(*ii*) *Para cada (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto A en X, $f(A)$ es un (σ,θ)-$g.\Lambda_s$-conjunto en Y.*

Demostración. (*i*) Sea B un (σ,θ)-$g.\Lambda_s$-conjunto en Y. Supongamos además que $f^{-1}(B) \subseteq F$, donde $F \in (\alpha,\beta)$-SO(X,τ). Luego, $B \subseteq f(F)$ y $f(F) \in (\sigma,\theta)$-SO(Y,ψ), puesto que f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semicerrada. Dado que B es un (σ,θ)-$g.\Lambda_s$-conjunto en Y, (σ,θ)-sKer$(B) \subseteq f(F)$ y por lo tanto, $f^{-1}((\sigma,\theta)$-sKer$(B)) \subseteq F$. Puesto que f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta, el Lema 5.1 (i) garantiza que (α,β)-sKer$(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}((\sigma,\theta)$-sKer$(B)) \subseteq F$. Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es un (α,β)-g.Λ_s-conjunto en X.
(*ii*) Sea A un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en X. Supongamos que $f(A) \subseteq F$, donde $F \in (\sigma,\theta)$-SO(Y,ψ). Entonces, $A \subseteq f^{-1}(F)$ y $f^{-1}(F) \in (\alpha,\beta)$-SO$(X,\tau)$, puesto que f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta. Dado que A es un (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto en X, (α,β)-sKer$(A) \subseteq f^{-1}(F)$ y por lo tanto, $f((\alpha,\beta)$-sKer$(A)) \subseteq F$. Puesto que f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semiabierta, el Lema 5.1(ii) garantiza que (σ,θ)-sKer$(f(A)) = f((\alpha,\beta)$-sKer$(A)) \subseteq F$. Por lo tanto, $f(A)$ es un (σ,θ)-g.Λ_s-conjunto en Y. ☑

Observe que si $\alpha = \sigma = id$ y $\beta = \theta = Cl$, entonces el Teorema anterior coincide con el Teorema 3.8 en [3].

Corolario 5.1. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Sea $f\colon X \to Y$ una función biyectiva, $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-irresoluta y $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-semicerrada, entonces:*

(*i*) *Para cada (σ,θ)-$g.V_s$-conjunto B de Y, $f^{-1}(B)$ es un (α,β)-$g.V_s$-conjunto de X.*

(*ii*) *Para cada (α,β)-$g.V_s$-conjunto A de X, $f(A)$ es un (σ,θ)-$g.V_s$-conjunto de Y.*

Definición 5.2. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Una biyección $f\colon X \to Y$ se dice que es un $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s^c$-homeomorfismo si f es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua y $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta.*

A continuación caracterizamos los $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s^c$-homeomorfismos y las funciones $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semiabiertas. Las demostraciones son obvias y en consecuencia las omitiremos.

Proposición 5.1. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Para cualquier biyección $f\colon X \to Y$ las siguientes son equivalentes:*

(*i*) $f^{-1}\colon Y \to X$ *es $((\sigma,\theta),(\alpha,\beta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua.*

(*ii*) f *es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta.*

(*iii*) f *es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.V_s$-semicerrada.*

Proposición 5.2. *Sean (X,τ,α,β), (Y,ψ,σ,θ) dos espacios con operadores asociados. Sea $f\colon X \to Y$ una función biyectiva y $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*i*) f *es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s$-semiabierta.*

(*ii*) f *es un $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.\Lambda_s^c$-homeomorfismo.*

(*iii*) f *es $((\alpha,\beta),(\sigma,\theta))$-$g.V_s$-semicerrada.*

6. (α,β)-$g.\Lambda_s$-Compacidad

M. Caldas [3] introduce la noción de $g.\Lambda_s$-compacidad de la siguiente manera: un subconjunto B de un espacio topológico X se dice $g.\Lambda_s$-compacto en X si, para cada colección $\{A_\lambda : \lambda \in \nabla\}$ de $g.\Lambda_s$-conjuntos en X tal que $B \subset \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \nabla\}$ existe un subconjunto finito ∇_o de ∇ tal que $B \subset \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \nabla_o\}$. En esta sección introduciremos la noción de conjunto (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto como una noción más amplia que la $g.\Lambda_s$-compacidad y estudiaremos su comportamiento bajo algunas de las funciones descritas en la Definición 5.1.

Definición 6.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β operadores asociados a τ. Un subconjunto $B \subseteq X$ se dice (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto en X si, para cada colección $\{A_\lambda : \lambda \in \nabla\}$ de $g.\Lambda_s$-conjuntos en X tal que $B \subset \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \nabla\}$, existe un subconjunto finito ∇_o de ∇ tal que $B \subset \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \nabla_o\}$.*

Un espacio X se dice (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto si X es (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto en el sentido de la Definición 6.1.

Observe que si tomamos α como el operador identidad y β el operador clausura, entonces la (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacidad coincide con la $g.\Lambda_s$-compacidad [3].

Teorema 6.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y α, β: $P(X) \longrightarrow P(X)$ operadores asociados a una topología τ sobre X. Si X es (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto, entonces todo (α,β)-$g.V_s$-conjunto de X es (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto en X.*

Demostración. Sea A un (α,β)-$g.V_s$-conjunto de X. Entonces $X\backslash A$ es (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjunto. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \nabla\}$ un cubrimiento de A por (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjuntos en X. Entonces $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \bigcup (X\backslash A)$ es un cubrimiento de X por (α,β)-$g.\Lambda_s$-conjuntos. Es decir, $X = (\bigcup\{U_\lambda : \lambda \in \nabla\}) \bigcup (X\backslash A)$. Como X es (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto entonces $\mathcal{U}'$ tiene un subcubrimiento finito de X, digamos $X = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}\right) \bigcup (X\backslash A)$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{U}$. Pero A y $(X\backslash A)$ son disjuntos; por lo tanto $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{U}$. Asi, A es (α,β)-$g.\Lambda_s$-compacto en X. ☑

Recordemos que un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ, α, β) se dice (α, β)-semi-compacto en X si, para toda colección $\{A_\lambda : \lambda \in \nabla\}$ de conjunto (α, β)-semiabiertos de X tal que $A \subset \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \nabla\}$ existe un subconjunto finito ∇_o de ∇ tal que $A \subset \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \nabla_o\}$.

Teorema 6.2. *Sean (X, τ, α, β), $(Y, \psi, \sigma, \theta)$ dos espacios con operadores asociados. Sea $f\colon X \to Y$ una función y B un conjunto (α, β)-$g.\Lambda_s$-compacto en X. Entonces:*

- *(i) Si f es $((\alpha, \beta), (\sigma, \theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua, entonces $f(B)$ es $((\sigma, \theta))$-semicompacto en Y.*
- *(ii) Si f es $((\alpha, \beta), (\sigma, \theta))$-$g.\Lambda_s$-irresoluta, entonces $f(B)$ es $((\sigma, \theta))$-$g.\Lambda_s$-compacto en Y.*

Demostración. (i) Supongamos que $B \subseteq X$ es un conjunto (α, β)-$g.\Lambda_s$-compacto y $f : X \to Y$ una función $((\alpha, \beta), (\sigma, \theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua. Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento de $f(B)$ por conjuntos (σ, θ)-semiabiertos en Y. Puesto que, f es $((\alpha, \beta), (\sigma, \theta))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua, tenemos que $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ es una colección de (α, β)-$g.\Lambda_s$-conjuntos tal que $B \subseteq f^{-1}[f(B)] \subseteq \bigcup\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$. Por la (α, β)-$g.\Lambda_s$-compacidad de B existe un subconjunto finito I_0 de I tal que $B \subseteq \bigcup\{f^{-1}(U_i) : i \in I_0\}$. En consecuencia, $f(B) \subseteq f\left(\bigcup\{f^{-1}(U_i) : i \in I_0\}\right) = \bigcup\{f[f^{-1}(U_i)] : i \in I_0\} \subseteq \bigcup\{U_i : i \in I_0\}$. Por lo tanto, $f(B)$ es (σ, θ)-semicompacto en Y.
(ii) La prueba es similar a (i). ☑

Claramente podemos observar que:

1. Si $\alpha = \sigma = \theta = id$ y $\beta = Cl$, entonces el Teorema 6.1(i), coincide el Teorema 4.2(i) de [3].
2. En el caso que $\alpha = \sigma = id$ y $\beta = \theta = Cl$, entonces el Teorema 6.1(i) coincide el Teorema 4.2(ii) de [3].

Corolario 6.1. *Sean (X, τ), (Y, ψ) dos espacios topológicos. Sea $f\colon X \to Y$ una función $((id, Cl), (id, Cl))$-$g.\Lambda_s$-semicontinua y B un conjunto $g.\Lambda_s$-compacto en X, entonces $f(B)$ es semicompacto en Y.*

Referencias

[1] N. Biswas, On characterizations of semicontinuos functions, *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. CL. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **8** (1970) 48, 399–402.

[2] M. Caldas, On Maps and Generalized Λ_s-sets, *East-West J. Math.*, **2** (2000), 181–190.

[3] M. Caldas, More on Generalized Homeomorphisms in Topological Spaces, *Divulgaciones Matemáticas*, **9** (2001) 1, 55–63.

[4] M. Caldas & J. Dontchev, G.Λ_s-sets and G.V_s-sets, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ.*, **21** (2000), 21–30.

[5] C. CARPINTERO, E. ROSAS & J. VIELMA, Operadores asociados a una topología Γ sobre un conjunto X y nociones conexas, *Divulgaciones matemáticas*, **6** (1998) 2, 139–148.

[6] R. DEVI, K.BALACHANDRAN & H. MAKI, Semi-generalized homeomorphisms and generalized semi-homeomorphisms in topological spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **26** (1995) 3, 271–284.

[7] N. LEVINE, Semiopen sets and semicontinuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 36–41.

[8] S. N. MAHESHWARI & R. PRASAD, Some new separations axioms, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **89** (1975) 1, 395–402.

[9] H. MAKI, Generalized Λ-sets and the associated closure operator, The special Issue in commemoration of Prof. Kazusada IKEDA's Retirement (1986), 139–146.

[10] E. ROSAS, C. CARPINTERO & M. SALAS, Espacios (α,β)-sg-T_i para $i = 0, 1, 2, 3, 4$, *Saber*, **17** (2005) 1, 56–65.

[11] E. ROSAS, C. CARPINTERO & J. SANABRIA, (α,β)-Semi Connected in Tological Spaces, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **62** (2005) 2, 253–258, :e-2005, 311–316.

[12] E. ROSAS, C. CARPINTERO & J. SANABRIA, (α,β)-Semi Open Sets and Some New Generalized Separation Axioms, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **62** (2005) 3, 397–403, :e-2005, 413–419.

(Recibido en mayo de 2006. Aceptado en septiembre de 2006)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE ORIENTE, NÚCLEO DE SUCRE
AVENIDA UNIVERSIDAD, CERRO COLORADO
CUMANA 6101, ESTADO SUCRE, VENEZUELA
e-mail: jsanabri@sucre.udo.edu.ve
e-mail: erosas@sucre.udo.edu.ve
e-mail: ccarpi@sucre.udo.edu.ve