Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 42(2008)1, páginas 47-60

# Clases de álgebras de Lie y subálgebras de Cartan

## Classes of Lie's algebras and Cartan's subalgebras

Ismael Gutiérrez García, Manuel Navarro Gutiérrez

Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia

Resumen. En este trabajo abordaremos la extensión de los argumentos clásicos sobre existencia de las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie soluble. Se presenta además un cambio en la terminología clásica teniendo como fundamento la presentación moderna de las clases de grupos finitos solubles. Por último, se demuestra que los $\mathfrak{N}$−proyectores de un álgebra de Lie soluble de dimensión finita coinciden con sus subálgebras de Cartan, donde $\mathfrak{N}$ es la clase de todas las álgebras de Lie nilpotentes.

*Palabras y frases clave.* Álgebras de Lie solubles y nilpotentes, subálgebras de Cartan, clases de álgebras de Lie solubles y $\mathfrak{N}$-proyectores.

*2000 Mathematics Subject Classification.* 17B30.

Abstract. In this work we will consider the extension of the classical arguments on the existence and conjugation of the Cartan subalgebras of a soluble Lie algebra. Also, a change in the classical terminology is presented taking into account the base of the modern presentation of the finite soluble groups classes. Finally we proof that the $\mathfrak{N}$-projectors of a finite dimensional soluble Lie algebra coincide with its Cartan subalgebras, where $\mathfrak{N}$ is the class of all the nilpotentes Lie algebra.

*Key words and phrases.* Soluble and nilpotent Lie Algebras, Cartan subalgebras, classes of soluble Lie algebras and $\mathfrak{N}$-proyectores.

## 1. Introducción

Uno de los métodos utilizado en el estudio de los grupos solubles finitos ha sido la consideración de ciertas clases canónicas conjugadas de subgrupos. Por ejemplo, los subgrupos nilpotentes auto-normalizados, denominados subgrupos de Carter, forman una de tales clases. Durante los últimos cuarenta años estas clases de subgrupos fueron estudiadas por W. Gaschütz y K. Doerk [4] entre otros, dando origen a la teoría de clases de grupos finitos solubles, concretamente las clases de Schunck y las formaciones. Elementos importantes de esta teoría fueron la generalización de los teoremas de Sylow, de Hall y de Carter; fundamentada en el concepto de $\mathfrak{F}$-proyector de un grupo finito soluble $G$, donde $\mathfrak{F}$ es una formación de grupos finitos solubles.

Paralelamente, D. Barnes y Gastineau-Hill [3] desarrollaron una teoría similar en el contexto de las álgebras de Lie solubles de dimensión finita. Algunos resultados se obtuvieron cambiando los conceptos "grupo" y "subgrupo normal" por "álgebra de Lie" e "ideal" respectivamente.

Una clase $\mathfrak{H}$ de álgebras de Lie solubles de dimensión finita se denomina un *homomorfo*, si junto con cada álgebra de Lie $L$, toda imagen epimórfica de $L$ pertenece a $\mathfrak{H}$. Es decir, si $L \in \mathfrak{H}$ y $J$ es un ideal de $L$, entonces $L/J \in \mathfrak{H}$. Un homomorfo $\mathfrak{H}$ se denomina una *formación* si de $L/M, L/N \in \mathfrak{H}$, con $M, N$ ideales de $L$ se sigue que $L/(M \cap N) \in \mathfrak{H}$ o equivalentemente, si $L/M, L/N \in \mathfrak{H}$ y $M \cap N = \{0\}$, entonces $L \in \mathfrak{H}$. Una subálgebra $U$ de un álgebra de Lie $L$ se denomina una $\mathfrak{H}-$*cobertura* de $L$ (un $\mathfrak{H}-$*proyector* de $L$), si se verifican:

1. $U \in \mathfrak{H}$,
2. Si $U \leq K \leq L$, $K_0$ es un ideal de $K$ y $K/K_0 \in \mathfrak{H}$, entonces $U + K_0 = K$.

En correspondencia con el concepto de subgrupos de Carter de un grupo finito soluble $G$, existe la noción de subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie soluble de dimensión finita $L$. Una subálgebra $H$ de un álgebra de Lie $L$ es denomina *subálgebra de Cartan* de $L$, si $H$ es nilpotente y autonormalizada. Esto es, $N_L(H) = H$.

En este trabajo abordaremos las extensiones de los argumentos clásicos para demostrar la existencia de las subálgebras de Cartan en el contexto soluble. Además examinaremos las condiciones que permitan garantizar la conjugación de tales subálgebras. Finalmente, es de gran importancia teórica que si $\mathfrak{N}$ denota la clase de todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita, entonces se demuestra que los $\mathfrak{N}$-proyectores de un álgebra de Lie $L$ son precisamente sus subálgebras de Cartan.

## 2. Preliminares

**Definición 2.1.** *Un espacio vectorial $L$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, sobre el cual está definida una operación binaria $[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L$, llamada operación corchete o conmutador, se llama una* álgebra de Lie *si se verifican:*

**(L1):** *La operación corchete es bilineal.*
**(L2):** *Para todo $x \in L$, $[x, x] = 0$*
**(L3):** *Para todo $x, y, z \in L$, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$. Esta igualdad es denominada* Identidad de Jacobi.

Usualmente se omite referencias al cuerpo $\mathbb{F}$, si este es fijo y no hay lugar a confusión. Igualmente asumiremos en este trabajo que el espacio vectorial $L$ es de dimensión finita.

Si $L$ es una algebra de Lie, entonces para todo $x, y \in L$, se verifica

**(L2'):** $[x, y] = -[y, x]$.

Es decir, el corchete es anti-conmutativo. Si $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, entonces la condición **(L2)** puede reemplazarse por **(L2')**.

Para efectos de notación, $K \leq L$ significará que $K$ es subespacio vectorial de $L$ y $[x, y] \in K$, para todo $x, y \in K$. Si $H, J \leq L$, entonces $[H, J]$ es la subálgebra de $L$ generada por los conmutadores $[x, y]$ con $x \in H$ y $y \in J$.

Los endomorfismos de un espacio vectorial $V$, notado $\text{End}(V)$, juegan un papel importante en la teoría de las álgebras de Lie y los abordaremos en esta sección. Se verifica que $\text{End}(V)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, con respecto a las operaciones usuales. Si definimos el corchete por $[x, y] := xy - yx$, entonces con esta operación $\text{End}(V)$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$. Escribiremos $\text{gl}(V)$ en lugar de $\text{End}(V)$ y cualquier subálgebra de ésta es llamada *álgebra lineal general.*

El lector que encuentra las matrices más convenientes que las transformaciones lineales puede preferir fijar una base para $V$, quizás identificar $gl(V)$ con $M(n, \mathbb{F})$. $M(n, \mathbb{F})$ se denota por $\text{gl}(n, \mathbb{F})$. Escribiremos abajo la tabla de multiplicación para $\text{gl}(n, \mathbb{F})$ relativa a la base estándar, consistiendo de las matrices $e_{ij}$ teniendo 1 en la posición $(i, j)$ y cero en las otras entradas, ya que $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$. Se sigue que $[e_{ij,e_{kl}}] = e_{ij}e_{kl} - e_{kl}e_{ij} = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$, donde los coeficientes son 1 y 0. En particular todos ellos pertenecen al cuerpo primo de $\mathbb{F}$.

Sea $\delta \in \text{End}(A)$, diremos que $\delta$ es una derivación en $A$, si se verifica que $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, para todo $a, b \in A$. Notaremos con $\text{Der}(A)$ el conjunto de todas las derivaciones de $A$; se demuestra que $\text{Der}(A)$ es una subálgebra de Lie de $\text{End}(A)$.

Para todo $x \in L$ definimos la función

$$\begin{array}{rccc} \text{ad}_x : & L & \rightarrow & L \\ & \text{ad}_x(y) & = & [x, y] \end{array}$$

Se tiene que $\text{ad}_x \in \text{Der}(L)$, para todo $x \in L$. Las funciones $\text{ad}_x$, para $x \in L$ son denominadas *derivaciones internas.* Una derivación de $L$ que no es interna se denomina *externa.* La función

$$\begin{array}{rccc} \text{ad} : & L & \rightarrow & \text{Der}(L) \\ & \text{ad}(x) & = & \text{ad}_x \end{array}$$

es denominada la *representación adjunta* de $L$ y juega un rol decisivo en la teoría de álgebras de Lie.

En la teoría de las álgebras de Lie, los ideales juegan el mismo papel que los subgrupos normales en la teoría de grupos. Estos de manera similar surgen como núcleos de homomorfismos entre álgebras de Lie.

**Definición 2.2.** *Sean $L$ un álgebra de Lie y $H, K \leq L$.*

1. *Diremos que $K$ es un ideal de $L$ si $[x, y] \in K$, para todo $x \in L$ y todo $y \in K$. Usaremos la notación $K \trianglelefteq L$. Es claro que $\{0\}$ y $L$ son ideales de $L$. Estos se denominan* ideales triviales *de $L$.*
2. *El conmutador de $H$ con $K$, notado con $[H, K]$ se define como el subespacio generado por los conmutadores $[x, y]$, con $x \in H$ e $y \in K$. Esto es, $[H, K] := \{\sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \mid x_i \in H,\ y_i \in K,\ n \in \mathbb{N}\}$.*
3. *El* normalizador *de $K$ en $L$, denotado con $N_L(K)$ se define así*
$$N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subseteq K\}.$$
*Esto es, $x \in N_L(K)$ si y sólo si $[x, y] \in K$, para todo $y \in K$.*
4. *El* centro *de $L$ se nota y define de la siguiente manera*
$$\mathrm{Z}(L) := \{x \in L \mid [x, z] = 0, \quad \forall\, x \in L\}$$

Se puede demostrar fácilmente que $Z(L)$ es un ideal de $L$, que $N_L(K)$ es una subálgebra de Lie de $L$ y además que ésta es la subálgebra más grande de $L$ en la cual $K$ es un ideal. Si $H, K$ son ideales de $L$, entonces $H + K$, $[H, K]$, $H \cap K$ son ideales de $L$ y además $[H, K] \subseteq H \cap K$. El ideal $[L, L]$ se denomina *álgebra derivada* de $L$. Diremos que $L$ es un álgebra de Lie *simple*, si $[L, L] \neq 0$ y los únicos ideales de $L$ son los triviales.

Dado que las álgebras de Lie son espacios vectoriales, los homomorfismos entre éstas son transformaciones lineales que preservan el corchete de Lie. Esto es, si $L_1$ y $L_2$ son álgebras de Lie sobre un mismo cuerpo $\mathbb{F}$, entonces una transformación lineal

$$\phi : L_1 \longrightarrow L_2$$

se denomina un *homomorfismo*, si $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, para todo $x, y \in L$. Similar como en el álgebra lineal, se definen los conceptos de *monomorfismo*, *epimorfismo* e *isomorfismo*.

Si $V$ es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$ de un álgebra de Lie $L$, entonces un homomorfismo $\phi : L \longrightarrow \mathrm{gl}(V)$ se denomina una *representación* de $L$ sobre $V$. Un ejemplo importante es la representación adjunta definida en (2). Un isomorfismo $\phi : L \longrightarrow L$ se denomina un *automorfismo* de $L$. El conjunto

$$\mathrm{Aut}(L) := \{\phi \mid \phi : L \to L \text{ es un isomorfismo}\},$$

es un grupo con respecto a la composición de funciones.

Los resultados centrales de este trabajo tienen como marco de validez las álgebras de Lie solubles y en particular las nilpotentes. Definimos a continuación estos conceptos.

**Definición 2.3.** *Sea $L$ un álgebra de Lie. Definimos inductivamente $L^{(0)} := L, \ldots, L^{(i)} := [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$, para $i \geq 1$. Se verifica que*

$$L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \cdots L^{(i)} \supseteq L^{(i+1)},$$

*teniendo así una cadena de ideales de $L$. Ésta cadena se denomina la* serie derivada *de $L$. Diremos que $L$ es* soluble, *si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^{(n)} = \{0\}$.*

**Ejemplo 2.4.** *Sea $t(n, \mathbb{F})$ el álgebra de Lie formada por todas las matrices triangulares superiores. Para $0 \leq l \leq n-1$ definamos*

$$t_l(n, \mathbb{F}) := \{A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \ si \ \ j - i < l\}.$$

*Se demuestra que el espacio vectorial $t_l(n, \mathbb{F})$ es un álgebra de Lie, para todo $0 \leq l \leq n-1$. Si $L := t(n, \mathbb{F})$, entonces se tiene que $L^{(2^p+1)} = t_{2^p}(n, \mathbb{F}) = \{0\}$, para algún $p$. Por lo tanto, $t(n, \mathbb{F})$ es soluble.*

**Proposición 2.5.** *Sea $L$ un álgebra de Lie.*

1. *Si $I \trianglelefteq L$ tal que $L/I$ es soluble, entonces $L$ es soluble.*
2. *Si $L$ es soluble y $I \trianglelefteq L$, entonces $L/I$ es soluble*
3. *Si $I, J \trianglelefteq L$, entonces $I + J$ es soluble.*

*Demostración.* Ver [6, pag. 35]. ☑

**Definición 2.6.** *Se dice que $I$ es un* ideal maximal propio *de un álgebra de Lie $L$, si se verifica: si $J$ es un ideal de $L$ tal que $I \subset J \subseteq L$, entonces $J = L$.*

Se demuestra que si $L$ es un álgebra de Lie, entonces existe un único ideal maximal soluble. Este ideal se denomina el *radical* de $L$ y se nota con $\mathrm{rad}(L)$. Si $\mathrm{rad}(L) = \{0\}$, entonces $L$ se llamará *semi-simple.*

**Definición 2.7.** *Sea $L$ un álgebra de Lie. Definimos inductivamente la serie central descendente de $L$, por $L^0 := L, \ldots, L^i = [L, L^{i-1}]$, para $i \geq 1$. $L$ se llamará* nilpotente *si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = \{0\}$.*

Si $L$ es un álgebra de Lie, entonces se demuestra por inducción que $L^{(i)} \subseteq L^i$, para todo $i$. Por lo tanto, una consecuencia inmediata de este hecho es que, si $L$ es nilpotente, entonces $L$ es soluble.

Similar como en la teoría de grupos se tienen algunas propiedades de las álgebras de Lie nilpotentes.

**Teorema 2.8.** *Sea $L$ un álgebra de Lie.*

1. *Si $L$ es nilpotente, entonces todas las subálgebras de $L$ son nilpotentes.*
2. *Si $L$ es nilpotente y $I \trianglelefteq L$, entonces $L/I$ es nilpotente*
3. *Si $L/Z(L)$ es nilpotente, entonces $L$ es nilpotente.*
4. *Si $L$ es nilpotente y distinta de cero, entonces $Z(L) \neq 0$.*

*Demostración.* Ver [6, pag. 38]. ☑

Un elemento $x \in L$ se llama *ad-nilpotente* si la transformación lineal $\mathrm{ad}_x$ es nilpotente. Si $L$ es un álgebra de Lie nilpotente, entonces todo $x \in L$ es ad-nilpotente. El teorema de Engel establece la equivalencia entre el hecho de que el álgebra sea nilpotente y que todos sus elementos sean ad-nilpotentes.

## 3. Subálgebra de Cartan: Existencia y conjugación

En esta sección definiremos las subálgebras de Cartan, extenderemos los argumentos clásicos para mostrar la existencia de subálgebra de Cartan excepto en el caso de álgebras de Lie no solubles sobres cuerpos finitos con un número pequeño de elementos. También estudiaremos la conjugación de las subálgebras de Cartan.

Por simple comodidad, haremos un cambio en la definición de $ad_x$. Definimos $ad_x(y) = [y, x]$ en lugar de $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$, como lo hicimos anteriormente.

**Definición 3.1.** *Sea $L$ un álgebra de Lie. Una subálgebra $H$ de $L$ es denominada una* subálgebra de Cartan *de $L$, si $H$ es nilpotente y $N_L(H) = H$.*

**Teorema 3.2.** *Sea $H$ una subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie $L$. Supongamos que $H \leq U \leq L$. Entonces, $N_L(U) = U$.*

*Demostración.* Ver [1, Theorem 2]. ☑

**Lema 3.3.** *Sea $H$ una subálgebra de Cartan de $L$ y sea $A$ un ideal de $L$. Entonces $(H + A)/A$ es una subálgebra de Cartan de $L/A$.*

*Demostración.* Dado que $A$ es un ideal de $L$, se tiene que $H \cap A$ es un ideal de $H$. Como $H$ es nilpotente y $H \cap A$ es un ideal de $H$, por el teorema 2.8, se verifica que $H/H \cap A$ es nilpotente. Usando los teoremas de isomorfismos tenemos que $(H + A)/A$ es nilpotente, ya que $(H + A)/A \cong H/(H \cap A)$.

Supongamos que $x+A \in N_{L/A}((H+A)/A)$. Entonces $[x, h]+A \in (H+A)/A$, para $h \in H$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}[x + A, H + A] &= \langle [x + a, h + b] \mid h \in H,\ a, b \in A\rangle \\ &= \langle [x, h] + c \mid h \in H,\ c \in A\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[x, H + A] &= \langle [x, h + a] \mid h \in H, a \in A\rangle \\ &= \langle [x, h] + [x, a] \mid h \in H, a \in A\rangle \\ &= \langle [x, h] + d \mid h \in H,\ d \in A\rangle\end{aligned}$$

Entonces, $x + A \in N_{L/A}((H + A)/A)$ si y sólo si $[x + A, H + A] \subseteq H + A$. Dado que $[x, H + A] \subseteq H + A$, se tiene que $x \in N_L(H + A) = H + A$.

Si $x \in (H + A)$, entonces $x + A \in (H + A)/A$. Por lo tanto,

$$N_{L/A}((H + A)/A) \subseteq (H + A)/A$$

y como también $(H + A)/A \subseteq N_{L/A}((H + A)/A)$, se tiene que

$$N_{L/A}((H + A)/A) = (H + A)/A,$$

por tanto, $(H + A)/A$ es una subálgebra de Cartan de $L/A$. ☑

**Lema 3.4.** *Sea $A \trianglelefteq L$ y $A \leq U \leq L$. Supóngase que $U/A$ es una subálgebra de Cartan de $L/H$ y que $H$ es una subálgebra de Cartan de $U$. Entonces $H$ es una subálgebra de Cartan de $L$.*

*Demostración.* Es claro que $H$ es nilpotente. Supóngase que $x \in N_L(H)$. Entonces $x+A \in N_{L/A}((H+A)/A)$. Pero $(H+A)/A$ es una subálgebra de Cartan de $U/A$ y $U/A$ es nilpotente. Por lo tanto $H+A=U$ y $x+A \in N_{L/A}(U/A) = U/A$. Esto implica que $x \in U$ y así tenemos que $x \in N_U(H) = H$. ☑

**Teorema 3.5.** *Sea $L$ un álgebra de Lie soluble. Entonces existe una subálgebra de Cartan de $L$.*

*Demostración.* Supongamos que existen álgebras de Lie de dimensión finita que no admiten subálgebra de Cartan. Dado que la inclusión define un orden parcial y por el axioma de elección, entonces existe un álgebra de Lie $L$ de dimensión minimal que no admite subálgebra de Cartan.

Sea $A$ un ideal minimal de $L$. Como $\dim(L/A) = \dim(L) - \dim(A)$ y además $L/A$ es un álgebra de Lie, se verifica que $\dim(L/A) \leq \dim(L)$. Por lo tanto, $L/A$ es un álgebra de Lie que admite una subálgebra de Cartan, digamos $U/A$.

Si $U < L$, entonces $\dim(U) < \dim(L)$, tenemos entonces $U$ es un álgebra de Lie que admite una subálgebra de Cartan $H$. Por el lema anterior $H$ es una subálgebra de Cartan de $L$, contrario a la escogencia de $L$. Por lo tanto $U = L$ y $L/A$ es nilpotente.

Sea $M$ una subálgebra maximal de $L$. Si $M \geq A$, entonces $M/A$ es una subálgebra maximal del álgebra nilpotente $L/A$, porque si $U$ es una subálgebra de $L$, tal que $M/A \leq U/A$, entonces $U \geq A$, por lo tanto $M \geq U$, ya que $M$ es maximal. Como consecuencia tenemos que $U/A \leq M/A$ y así se tiene que $M/A = U/A$. Entonces, $M/A$ es una subálgebra maximal de $L/A$. Como $M/A$ es maximal y $L/A$ es nilpotente, entonces $M$ es un ideal propio de $L$.

Si toda subálgebra maximal de $L$ es un ideal de $L$, entonces por [2] se tiene que $L$ es un álgebra de Lie nilpotente. Pero $L$ no es nilpotente, por lo tanto existe una subálgebra maximal $H$ que no es un ideal de $L$. Para esta $H$, tenemos que $N_L(H) = H$, porque $H$ es maximal y $H \subseteq N_L(H)$ y $H \ngeq A$.

Como $A$ es un ideal abeliano y $L = H + A$, entonces se sigue que $H \cap A \lhd L$. Dado que $A$ es minimal, se tiene que $H \cap A = \langle 0 \rangle$. Por lo tanto, $H \simeq L/A$ la cual es nilpotente y $H$ es una subálgebra de Cartan de $L$. ☑

Estableceremos ahora condiciones para garantizar la conjugación de las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie $L$.

**Definición 3.6.** *Sean $L$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $a \in L$ y $\mathrm{ad}_a$ la correspondiente derivación interior de $L$. Si existe un $r > 0$ tal que $\mathrm{ad}_a^r = 0$, definimos $\exp(\mathrm{ad}_a)$ de la siguiente manera*

$$\exp(\mathrm{ad}_a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}_a)^k.$$

*Si $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$, requerimos simplemente $\mathrm{ad}_a^p = 0$.*

Note que $\exp(\mathrm{ad}_a)$ tiene sentido porque si $\mathrm{ad}_a^r = 0$, entonces $\mathrm{ad}_a^k = 0$, para todo $k > r$. Esto es, $\exp(\mathrm{ad}_a)$ es una suma finita de transformaciones lineales, por lo tanto, existe en ausencia de cualquier concepto de convergencia. Se verifica que $\exp(\mathrm{ad}_a) \in \mathrm{Aut}(L)$. Un automorfismo de la forma $\exp(\mathrm{ad}_x)$ se denomina *interior* y el subgrupo de $\mathrm{Aut}(L)$ generado por estos automorfismos se denotará con $\mathrm{Int}(L)$. Es decir,

$$\mathrm{Int}(L) = \langle \exp(\mathrm{ad}_x) \mid x \in L \rangle.$$

Si $A \leq L$, entonces definimos $\mathrm{Int}_L(A) = \langle \exp(\mathrm{ad}_x) \mid x \in A \rangle$.

**Definición 3.7.** *Sean $L$ un álgebra de Lie y $S_1, S_2 \subseteq L$ y $G$ un subgrupo de $\mathrm{Aut}(L)$. Se dice que $S_1$ y $S_2$ son* conjugados *bajo $G$, si existe $\alpha \in G$ tal que $\alpha(S_1) = S_2$. Además diremos que $S_1$ y $S_2$ son conjugados en $L$, si existe $\alpha \in \mathrm{Int}(L)$ tal que $\alpha(S_1) = S_2$.*

**Definición 3.8.** *Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo con característica $p$ y $L$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$. Diremos que $L'$ satisface la $(p-1)$-ésima condición de Engel, si*

$$\mathrm{ad}_x^{p-1}(L') = \{0\}, \quad \forall x \in L.$$

**Lema 3.9.** *Sea $L$ un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$ y además $L'$ satisface la $(p-1)$-ésima condición de Engel, entonces*

1. *$\exp(\mathrm{ad}_x)$ existe, para todo $x \in L'$.*
2. *Si $U \leq L$, entonces cada $\alpha \in \mathrm{Int}_U(U')$ tiene una extensión $\alpha^* \in \mathrm{Int}_L(U')$.*
3. *Si $A \trianglelefteq L$, entonces cada $\beta \in \mathrm{Int}_{L/A}((L/A)')$ es inducido por algún $\beta^* \in \mathrm{Int}_L(L')$.*

*Demostración.* Ver [1, Lemma 5]. ☑

**Teorema 3.10.** *Sea $L$ un álgebra de Lie soluble sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$, y además $L'$ satisface la $(p-1)$-ésima condición de Engel, entonces las subálgebras de Cartan de $L$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}_L(L')$.*

*Demostración.* Si $L$ es nilpotente, el resultado es trivial. Supongamos que $L$ no es nilpotente y usemos inducción sobre $\dim(L)$. Si $\dim(L) = 1$, entonces $L$ es nilpotente y el resultado es inmediato.

Sean $H_1, H_2$ subálgebras de Cartan de $L$ y $A$ un ideal minimal de $L$. Entonces $(H_1 + A)/A$ y $(H_2 + A)/A$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}_{L/A}((L/A)')$. Usando el lema 3.9 apartado 3 aseguramos que $H_1 + A$ y $H_2 + A$ son conjugados bajo $\mathrm{Int}_L(L')$. Por lo tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que $H_1 + A = H_2 + A$. Si $H_1 + A < L$, entonces por inducción, $H_1$ y $H_2$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}_{H_1+A}((H_1 + A)')$ y consecuentemente también bajo $\mathrm{Int}_L(L')$, por el lema 3.9 apartado 2.

Supongamos que $H_1 + A = H_2 + A = L$. Dado que $L$ no es nilpotente, $H_i \not\geq A$ y esto implica que $H_1$ y $H_2$ son complementos de $A$. Como $A$ es minimal y $[L, A] \neq 0$, entonces tenemos que $[L, A] = A$. Por lo tanto, $H^1(L/A, L) = 0$, por [2, Theorem 1]. Esto implica que $H_1$ y $H_2$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}_L(A)$. Como $A = [L, A] \leq L'$, se tiene que $H_1$ y $H_2$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}_L(L')$. ☑

**Definición 3.11.** *Sean $V$ un espacio vectorial y $T \in \mathrm{End}(V)$. Definimos* $\exp(T)$ *por*

$$\exp(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{T^k}{k!}.$$

Usando argumentos del análisis funcional se demuestra que la serie $\exp(T)$ converge en los espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $L$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre los números reales, entonces, para todo $x \in L$, $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{End}(L)$. Por lo tanto

$$\exp(\mathrm{ad}_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}(\mathrm{ad}_x)^k$$

converge y $\exp(\mathrm{ad}_x) \in \mathrm{Aut}(L)$.

Sea $\mathrm{Int}^*(L)$ el grupo de automorfismos de $L$ generado por $\exp(\mathrm{ad}_x)$, para $x \in L$. Claramente, si $U \leq L$, entonces cada elemento de $\mathrm{Int}^*(U)$ tiene una extensión en $\mathrm{Int}^*(L)$. Si $A \trianglelefteq L$, entonces cada elemento de $\mathrm{Int}^*(L/A)$ es inducido por un elemento de $\mathrm{Int}^*(L)$.

La conjugación de clases de subálgebra de Cartan bajo $\mathrm{Int}^*(L)$ ha sido determinada por Kostant [5], para álgebras $L$ semi-simples. El problema para un álgebra de Lie general se reduce al caso semi-simple gracias al siguiente teorema.

**Teorema 3.12.** *Sea $L$ un álgebra de Lie real con radical $R$. Las clases de conjugación bajo* $\mathrm{Int}^*(L)$ *de las subálgebras de Cartan de $L$ están en correspondencia uno a uno con las clases de conjugación bajo* $\mathrm{Int}^*(L/R)$ *de las subálgebras de Cartan de $L/R$. Dos subálgebras de Cartan $H_1$ y $H_2$ de $L$ son conjugadas bajo* $\mathrm{Int}^*(L)$ *si y sólo si $(H_1 + A)/A$ y $(H_2 + A)/A$ son conjugadas bajo* $\mathrm{Int}^*(L/R)$.

*Demostración.* La transformación de $L/R$ inducida por un elemento de $\mathrm{Int}^*(L)$ está en $\mathrm{Int}^*(L/R)$. Así si $H_1$ y $H_2$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}^*(L)$, entonces $(H_1 + R)/R$ y $(H_2 + R)/R$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}^*(L/R)$.

Recíprocamente, supongamos que $(H_1 + R)/R$ y $(H_2 + R)/R$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}^*(L/R)$. Dado que el elemento de $\mathrm{Int}^*(L/R)$ que transforma $(H_1 + R)/R$ sobre $(H_2 + R)/R$ es inducido por un elemento de $\mathrm{Int}^*(L)$, se tiene que $(H_1 + R)/R$ y $(H_2 + R)/R$ son conjugados bajo $\mathrm{Int}^*(L)$. Podemos por lo tanto suponer que $(H_1 + R)/R = (H_2 + R)/R$. Entonces $H_1$ y $H_2$ son subálgebras de Cartan del álgebra de Lie soluble $H_1 + R$ y son por lo tanto conjugadas bajo $\mathrm{Int}(H_1 + R)$, por el teorema anterior. Pero cada elemento de $\mathrm{Int}(H_1 + R)$ tiene una extensión a un automorfismo de $L$ en $\mathrm{Int}^*(L)$. Por lo tanto $H_1$ y $H_2$ son conjugadas bajo $\mathrm{Int}^*(L)$. ☑

## 4. Clases de Algebras de Lie y $\mathfrak{N}$-proyectores

Todas las álgebras de Lie consideradas a lo largo de esta sección se supondrán solubles y de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

**Definición 4.1.** *Una* clase de álgebras de Lie *es una colección* $\mathfrak{X}$ *de álgebras de Lie con la propiedad de que si* $L \in \mathfrak{X}$ *y* $H \cong L$, *entonces* $H \in \mathfrak{X}$.

Si $L$ es un álgebra de Lie, denotamos con $(L)$ a la clase formada por todos las álgebras de Lie isomorfas a $L$. Si $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$ son clases de álgebras de Lie, entonces escribiremos $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y}$ para denotar la clase

$$(L \in \mathfrak{X} \mid L \notin \mathfrak{Y}).$$

Usaremos además 0 para denotar el elemento cero, el álgebra nula y la clase que sólo contiene el álgebra nula. En el respectivo contexto se entenderá a cuál se hace referencia.

Como ejemplos de clases de álgebras de Lie tenemos: la clase de las álgebras de Lie solubles ($\mathfrak{S}$), la clase de todas las álgebras de Lie nilpotentes ($\mathfrak{N}$), la clase de las álgebras de Lie abelianas ($\mathfrak{A}$) y la clase de todas las álgebras de Lie primitivas ($\mathfrak{P}$).

Una función que a cada clase de álgebras de Lie asigna otra clase se denominará función de clases. Las funciones más usadas aparecen en la siguiente lista. Si $\mathfrak{X}$ es una clase de álgebras de Lie, entonces se define:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}\mathfrak{X} &= (L:\ \exists H \in \mathfrak{X} \text{ y un epimorfismo } \varphi : H \longrightarrow L) \\
\mathsf{R}_0\mathfrak{X} &= \left(L:\ \exists N_i \trianglelefteq L,\ i = 1, \ldots, r \text{ con } L/N_i \in \mathfrak{X} \text{ y } \bigcap_{i=1}^{n} N_i = 0\right) \\
\mathsf{P}\mathfrak{X} &= (L : \mathsf{Q}(L) \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{X})
\end{aligned}$$

**Definición 4.2.** *Sean* $\mathfrak{X}$ *y* $\mathfrak{Y}$ *clases de álgebras de Lie no vacías.*

1. *Una función de clases* $\mathsf{C}$ *se denomina una* operación cerrada *si se cumplen las siguientes propiedades:*
   *a*) $\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{C}\mathfrak{X}$.
   *b*) $\mathsf{C}(\mathsf{C}\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$.
   *c*) *Si* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, *entonces* $\mathsf{C}\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{C}\mathfrak{Y}$.
2. *Si* $\mathsf{C}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, *entonces* $\mathfrak{X}$ *se denomina* $\mathsf{C}$*-cerrada*
3. *Si* $\mathfrak{X}$ *es* $\mathsf{Q}$*-cerrada, entonces se denomina un* homomorfo.
4. *Un homomorfo* $\mathsf{R}_0$*-cerrado se denomina una* formación.
5. *Un homomorfo* $\mathsf{P}$*-cerrado se denomina una* clase de Schunck.

Si $\mathsf{C}$ es una operación cerrada y $\mathfrak{X}$ es una clase cualquiera, entonces es claro que $\mathsf{C}\mathfrak{X}$ es $\mathsf{C}$-cerrada. La clase $\emptyset$ se aceptará como $\mathsf{C}$-cerrada para toda operación cerrada $\mathsf{C}$. De la definición es claro que, si una clase $\mathfrak{X}$ es un homomorfo, entonces se verifica que si $L \in \mathfrak{X}$ y $N \trianglelefteq L$, entonces $L/N \in \mathfrak{X}$. Además un homomorfo $\mathfrak{X}$ es una formación si se verifica que si $M, N \trianglelefteq L$ y $L/N, L/M \in \mathfrak{X}$, entonces $L/(M \cap N) \in \mathfrak{X}$.

La siguiente definición será de gran importancia en la consecución de nuestro objetivo central, la generalización del concepto de subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie $L$.

**Definición 4.3.** *Sean* $\mathfrak{X}$ *una clase de álgebras de Lie y* $L$ *un álgebra de Lie.*

1. *Una subálgebra* $U$ *de* $L$ *se denomina* $\mathfrak{X}$*-maximal en* $L$ *siempre que*
   a) $U \in \mathfrak{X}$.
   b) *De* $U \leq V < L$ *y* $V \in \mathfrak{X}$ *se sigue que* $U = V$.
2. *Una subálgebra* $U$ *de* $L$ *se denomina un* $\mathfrak{X}$-proyector *de* $L$ *si y sólo si* $(U + N)/N$ *es* $\mathfrak{X}$*-maximal en* $L/N$, *para todo* $N \trianglelefteq L$.
   *Al conjunto (posiblemente vacío) de los* $\mathfrak{X}$*-proyectores de* $L$ *lo notaremos con* $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L)$.
3. *Una subálgebra* $H$ *de* $L$ *se llama una* $\mathfrak{X}$-cobertura *de* $L$ *si se verifican las siguientes propiedades:*
   a) $H \in \mathfrak{X}$.
   b) *Si* $H \leq V \leq L$, $K \trianglelefteq V$ *y* $V/K \in \mathfrak{X}$, *entonces* $H + K = V$.
   *Al conjunto (posiblemente vacío) de las* $\mathfrak{X}$*-coberturas de* $L$ *lo notaremos con* $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$.

**Lema 4.4.** *Sean* $\mathfrak{X}$ *una clase de álgebras de Lie y* $L$ *un álgebra de Lie. Si* $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$, *entonces* $H$ *es maximal en el conjunto* $\{K \leq L \mid K \in \mathfrak{X}\}$. *En particular, si* $L \in \mathfrak{X}$, *entonces* $H = L$.

*Demostración.* Si $H \leq V \leq L$, $V \in \mathfrak{X}$, entonces tómese $K := 0$ en $(b)$ de la definición de $\mathfrak{X}$-cobertura y se tiene el resultado. ☑

**Lema 4.5.** *Sean* $\mathfrak{X}$ *un homomorfo y* $L$ *un álgebra de Lie. Entonces*
1. *Si* $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$ *y* $H \leq V \leq L$, *entonces* $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(V)$.
2. *Si* $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$ *y* $N \trianglelefteq L$, *entonces* $(H + N)/N \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L/N)$.

*Demostración.*
1. Supongamos que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$ y $H \leq V \leq L$. Por hipótesis $H \in \mathfrak{X}$. Sea $H \leq U \leq V$ y $K \trianglelefteq U$, con $U/K \in \mathfrak{X}$ . Entonces $H + K = U$ y se tiene que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(V)$.
2. Dado que $(H + N)/N \cong H/(H \cap N)$, $H \in \mathfrak{X}$ y $\mathfrak{X}$ es un homomorfo, se verifica que $(H + N)/N \in \mathfrak{X}$.
   Sean ahora $(H+N)/N \leq U/N \leq L/N$, $K/N \trianglelefteq U/N$ con $(U/N)/(K/N) \cong (U/K) \in \mathfrak{X}$. Dado que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$, se tiene que $H + K = U$ . Por lo tanto
   $$U/N = H + K/N = ((H + N) + K)/N = (H + N)/N + K/N,$$
   lo cual demuestra la afirmación.

☑

**Lema 4.6.** *Sea* $\mathfrak{X}$ *un homomorfo, el cual contiene un álgebra de Lie no nula. Entonces el álgebra de Lie de dimensión uno pertenece a* $\mathfrak{X}$ *y, además, si* $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$ *con* $L \neq 0$, *entonces* $H \neq 0$.

*Demostración.* Supóngase que $A \in \mathfrak{X}$, $A \neq 0$. Dado que $A$ es soluble, entonces existe $N \triangleleft A$ tal que $\dim(A/N) = 1$ y naturalmente $A/N \in \mathfrak{X}$. Si $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$ y $L \neq 0$, entonces del lema 4.4 se sigue que $H \neq 0$. ☑

**Lema 4.7.** *Sean $\mathfrak{X}$ un homomorfo y $L$ un álgebra de Lie. Si $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$ y $0 \neq H \leq U \leq L$, entonces $N_L(U) = U$.*

*Demostración.* Evidentemente $U \subseteq N_L(U)$. Sea $x \in N_L(U)$ y definamos $V := \langle x, U \rangle$. Entonces se verifica que $V/U \in \mathfrak{X}$ y además, ya que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$ se tiene que $H + U = V$, pero $H \leq U$, lo cual implica que $x \in U$. ☑

**Lema 4.8.** *Sean $\mathfrak{X}$ un homomorfo, $L$ un álgebra de Lie y $N \trianglelefteq L$. Si $U/N \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L/N)$ y $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(U)$, entonces $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$.*

*Demostración.* Si $\dim(L) = 0$, entonces el resultado es trivial. Supongamos entonces que $0 \neq \dim(L) = n$ y procedemos por inducción sobre $n$. Supongamos que $H \leq V \leq L$ y $K \trianglelefteq V$, con $V/K \in \mathfrak{X}$. Entonces $V + N \geq H + N = U$ y además, $U/N \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}((V+N)/N)$. Pero $(V+N)/N \cong V/(V \cap N)$, por lo tanto $(U \cap V)/(V \cap N) \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(V/(V \cap N))$.

Dado que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(U \cap V)$, si $V < L$, entonces por la hipótesis de inducción se tiene que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(V)$ y así $H + K = V$. Supóngase que $V = L$. Dado que $L/(K+N) \in \mathfrak{X}$, se tiene que $U/N + (K+N)/N = L/N$ y así $U + N + K = L$. Como $U \geq N$, se sigue que $U + K = L$. Por lo tanto $U/(K \cap U) \cong L/K \in \mathfrak{X}$. Esto implica que $H + (K \cap U) = U$ y $H + K = U + K = L$. ☑

**Lema 4.9.** *Sean $\mathfrak{X}$ un homomorfo, $L$ un álgebra de Lie y $N \trianglelefteq L$. Supóngase que $(U+N)/N$ es un $\mathfrak{X}$-proyector de $L/N$ y que $U$ es un $\mathfrak{X}$-proyector de $U+N$. Entonces $U \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L)$.*

*Demostración.* Definamos $V := U + N$. Demostramos que si $K \trianglelefteq L$, entonces $(U+K)/K$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $L/K$. Supongamos que $(U+K)/K \leq T/K \leq L/K$, con $T/K \in \mathfrak{X}$. Dado que $V/N$ es un $\mathfrak{X}$-proyector de $L/N$ se tiene que $(V+K)/(N+K)$ es un $\mathfrak{X}$-proyector de $L/(N+K)$. Pero $(T+N)/(N+K) \in \mathfrak{X}$, por lo tanto $V + K = T + N$. Entonces $T = T \cap (V + K) = (T \cap V) + K$ y $(T \cap V)/(K \cap V) \cong T/K \in \mathfrak{X}$. Dado que $(U + (K \cap V))/(K \cap V)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $V/(K \cap V)$ y está contenido en $(T \cap V)/(K \cap V) \in \mathfrak{X}$, tenemos que $U + (K \cap V) = T \cap V$. Por lo tanto se sigue que $U + K = T$, como se quería. ☑

**Definición 4.10.** *Una clase de álgebras de Lie $\mathfrak{X}$ se denomina* proyectiva, *si $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L) \neq \emptyset$, para toda álgebra de Lie $L$.*

En el siguiente lema presentamos una condición necesaria para que una clase de álgebras de Lie $\mathfrak{X}$ sea proyectiva.

**Lema 4.11.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de álgebras de Lie. Si $\mathfrak{X}$ es proyectiva, entonces $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck.*

*Demostración.* Demostramos inicialmente que $\mathfrak{X}$ es un homomorfo. Evidentemente $\mathfrak{X} \neq \emptyset$. Sea entonces $L \in \mathfrak{X}$. Es claro que $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L) = \{L\}$. Si $N \trianglelefteq L$, entonces $L/N \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L/N)$ y se tiene que $L/N \in \mathfrak{X}$.

Probamos ahora que $\mathfrak{X}$ es $\mathsf{P}$-cerrada. Sea $L \in \mathsf{P}\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}$ con dimensión minimal. Sea $A \trianglelefteq L$, entonces $L/A \in \mathfrak{X}$. Sea $U$ un $\mathfrak{X}$-proyector de $L$; dado que $(U+A)/A$

es $\mathfrak{X}$-maximal en $L/A$, se tiene que $U + A = L$ y así $U$ complementa a $A$ en $L$. Como $A$ no puede contener un ideal no trivial de $L$, se sigue que $L$ es primitiva, lo cual contradice nuestro supuesto de que $L \in \mathsf{P}\mathfrak{X}$. ☑

**Lema 4.12.** *Sean $\mathfrak{X}$ una clase de Schunck, $N$ un ideal nilpotente de $L$ y sea $H$ una subálgebra $\mathfrak{X}$-maximal en $L$ tal que $H + N = L$, entonces $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L)$.*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $\dim(L)$. Podemos suponer que $L \notin \mathfrak{X}$, entonces existe $K \lhd L$ tal que $L/K$ es un álgebra primitiva, que no pertenece a $\mathfrak{X}$ y cuyos cocientes propios pertenecen a $\mathfrak{X}$. Dado que $L/N \in \mathfrak{X}$, se tiene que $N \not\leq K$, así, $(N + K)/K$ es un ideal nilpotente no trivial de $L/K$. Se sigue entonces que $(N + K)/K$ es el único ideal minimal de $L/K$. Ahora $(H + K)/K \in \mathfrak{X}$ y en consecuencia $H + K \neq L$, pero $H + K + N = L$ y $(H+K)/K$ es un complemento de $(N+K)/K$ en $L/K$. Entonces $(H+K)/K \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L/K)$. Note que $H + K = H + (N \cap K)$ y por inducción se verifica que $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(H + K)$. Por lo tanto $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L)$.

☑

**Teorema 4.13.** *Sean $\mathfrak{X}$ una clase de Schunck y $L$ un álgebra de Lie, entonces* $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L) = \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre $\dim(L)$. Sea $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(L)$ y sea $A$ un ideal minimal de $L$. Si $A \leq H$, entonces tenemos que $H/A \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L/A)$ y como $H \in \mathfrak{X}$, se sigue que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$. Entonces podemos suponer que $H$ no contiene ideales minimales de $L$. Se sigue que si $H + A = L$, entonces $L$ es primitiva y $H$ al ser un complemento para $A$ sería una $\mathfrak{X}$-cobertura de $L$, entonces podemos suponer que $H + A < L$. Por otro lado, $H$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $H + A$ y $A$ es nilpotente, así por el lema anterior se verifica que $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(H + A)$. Por inducción se tiene entonces que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(H + A)$ y se sigue que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(L)$. ☑

Demostramos ahora el resultado central de este trabajo, esto es, probar que las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie soluble $L$ coinciden con sus $\mathfrak{N}$-proyectores.

**Teorema 4.14.** *Sea $L$ es un álgebra de Lie soluble con dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces*

$$\mathrm{Proj}_{\mathfrak{N}}(L) = \{H \leq L \mid H \in \mathfrak{N} \text{ y } N_L(H) = H\}.$$

*Esto significa que las subálgebras de Cartan de $L$ coinciden con sus $\mathfrak{N}$-proyectores.*

*Demostración.* Si $H$ es una subálgebra de Cartan de $L$, entonces $H \in \mathfrak{N}$. Supongamos ahora que $H \leq V \leq L$, $K \trianglelefteq V$ y $V/K \in \mathfrak{N}$.

En la sección anterior demostramos que si $H$ es una subálgebra de Cartan de $L$ y $N$ es un ideal de $L$, entonces $(H + N)/N$ es una subálgebra de Cartan de $L/N$. Entonces $(H + K)/K$ es una subálgebra de Cartan de $V/K$. Por lo tanto $H + K = V$ y se tiene que $H \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{N}}(L)$. Pero por el Teorema 4.13, dado que $\mathfrak{N}$ es una clase de Schunck, se tiene que $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{N}}(L)$.

Recíprocamente, supongamos que $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{N}}(L)$, entonces $H$ es nilpotente y así sólo resta demostrar que $N_L(H) = H$. Es claro que $H \leq N_L(H)$. Sea ahora $x \in N_L(H)$ y definamos $V := \langle x, H \rangle$, entonces $V/H \in \mathfrak{N}$ y se sigue de la definición de $\mathfrak{N}$-proyector que $H + H = V$, lo cual implica que $x \in H$. ☑

**Agradecimientos.** A la Universidad del Norte por el apoyo financiero mediante un proyecto de menor cuantía.

## Referencias

[1] Barnes, D. On Cartan subalgebras of Lie algebras. *Math. Zeitschr. 101* (1967), 350–355.
[2] Barnes, D. On the cohomology of Lie algebras. *Math. Zeitschr. 101* (1967), 343–349.
[3] Barnes, D., and Gastineau-Hills, H. On the theory of soluble Lie algebras. *Math. Zeitschr. 106* (1968), 343–354.
[4] Doerk, K., and Hawkes, T. *Finite Soluble Groups*. De Gruyter Expositions in Mathematics. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.
[5] Kostant, B. On the conjugacy of real Cartan subalgebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 41* (1955), 967–970.
[6] Navarro, M. Generalización de las subálgebras de Cartan para álgebras de Lie solubles de dimensión finita. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 2007.

(Recibido en septiembre de 2007. Aceptado en febrero de 2008)

Departamento de Matemáticas
Universidad del Norte
Km. 5, Vía Puerto Colombia
Barranquilla, Colombia
*e-mail:* isgutier@uninorte.edu.co

Departamento of Matemáticas
Universidad del Norte
Km. 5, Vía Puerto Colombia
Barranquilla, Colombia
*e-mail:* mnavarro@uninorte.edu.co