Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 43(2009)2, páginas 115-138

Una demostración alternativa del teorema de ultralímites

A proof of the ultralimits theorem

Andrés Forero Cuervo[1,2]

[1]Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia
[2]University of California, Irvine, EE.UU

Resumen. En este artículo se provee una demostración alternativa del teorema de ultralímites, establecido por Kochen en 1961. Para ello se definen los modelos genéricos constantes, construidos como límites de modelos de Kripke con el mismo universo en cada nodo, con respecto a un filtro de abiertos sobre el mismo orden parcial con su topología natural.

Palabras y frases clave. Ultrapotencias, ultralímites, modelos de Kripke, modelos genéricos, intuicionismo.

2000 Mathematics Subject Classification. 53C21, 53C42.

Abstract. This paper provides an alternative proof of the Ultralimits Theorem, established by Kochen in 1961. In order to achieve this, generic constant models are defined, constructed as limits of Kripke models with the same universe on each node, with respect to a filter of open sets over the same partial order with its natural topology.

Key words and phrases. Ultrapowers, Kripke models, generic models, intuitionism.

1. Introducción

Un ultralímite de una estructura $\mathcal{A}$ es una estructura de la forma

$$\varinjlim\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\},$$

en donde $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, y $\mathcal{A}_{n+1}$ es una ultrapotencia de $\mathcal{A}_n$. En 1961 Simon Kochen demostró el teorema de ultralímites: dos estructuras son elementalmente equivalentes si y sólo si poseen ultralímites isomorfos ([5]). En 1971, Saharon Shelah demostró un teorema análogo para ultrapotencias ([6]), que implica el teorema de ultralímites (puesto que toda ultrapotencia de una estructura es isomorfa a un ultralímite de la misma).

El objetivo principal de este artículo es proveer una demostración alternativa del teorema de ultralímites. Este artículo se divide en tres partes: en la primera se definen los haces de estructuras, su semántica y sus modelos genéricos, estableciendo un teorema análogo al teorema de ultralímites para modelos genéricos. En la segunda parte se estudian ciertos aspectos concretos relacionados con isomorfía parcial y finitaria, que permiten transformar la equivalencia elemental entre estructuras en isomorfía parcial entre ultrapotencias de las primeras. En la última parte se demuestra el teorema de ultralímites.

2. Haces de estructuras y modelos genéricos

En esta sección se introducen definiciones y resultados básicos relativos a la llamada lógica de haces topológicos de estructuras, las cuales pueden encontrarse en el trabajo seminal de Xavier Caicedo *Lógica sobre los haces de estructuras* ([2]). Se recomienda al lector consultar este trabajo para familiarizarse con las nociones básicas de la lógica de haces y su conexión con la semántica de Kripke.

Definición 2.1 (Haz de estructuras). Un haz de L-estructuras $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico X consiste en un par (E, p) tal que E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local y una familia de L-estructuras $(\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ que cumplen con las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$, $\mathcal{A}_x = (E_x, c_x, F_x, R_x)$ es una estructura con universo $E_x = p^{-1}(\{x\})$.[1]
2. Para cada símbolo de constante c, y para cada $x \in X$, $p(c_x) = x$. Además la función $X \to E$ dada por $x \mapsto c_x$ es continua.
3. Para cada símbolo de función n-aria f, la función $f^{\mathcal{A}} = \cup f_x : \cup E_x^n \to E$ es continua.
4. Para cada símbolo de relación n-aria R, $R^{\mathcal{A}} = \cup R_x$ es abierto en $\cup_x E_x^n$.

Una *sección* de $\mathcal{A}$ es una función continua $\sigma : U \to E$ (con $U \in Ab(X)$) tal que $p \circ \sigma = Id_U$. Dado $U \in Ab(X)$, sea $\mathcal{A}(U)$ el conjunto de secciones del haz (E, p) con dominio U, y sea $\mathrm{Sec}(\mathcal{A})$ el conjunto de todas las secciones de $\mathcal{A}$.

Definición 2.2. Dado un haz de estructuras $\mathcal{A}$, se define la función

$$t^{\mathcal{A}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) : U \to E,$$

en donde $t(x_1, \ldots, x_n)$ es un término y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ secciones con $U \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Dom}(\sigma_n)$:

[1] Si E_x es vacía, $\mathcal{A}_x$ será una estructura vacía.

- $x^{\mathcal{A}}(\sigma) = \sigma$, $c^{\mathcal{A}}(\sigma) = c^{\mathcal{A}}$.

- Si $t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n)$ son L-términos y f es un símbolo de función de aridad m, $\tau = t^{\mathcal{A}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ es la función dada por

$$\tau(x) = f^{\mathcal{A}}\left(t_1^{\mathcal{A}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(x), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(x)\right).$$

Gracias a la continuidad de $f^{\mathcal{A}}$ y a un argumento inductivo, las funciones $t^{\mathcal{A}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ son secciones de $\mathcal{A}$.

A continuación se define el forzamiento local y puntual en haces:

Definición 2.3. Sea $\mathcal{A}$ un haz de estructuras sobre X. Se define inductivamente la relación "$\mathcal{A}$ fuerza ϕ en U para las secciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$" (con $U \in Ab(X)$ y $U \subseteq \cap \operatorname{Dom}(\sigma_i)$), y se denota por $\mathcal{A} \Vdash_U \phi[\overline{\sigma}]$:

- $\mathcal{A} \Vdash_U (t_1 = t_2)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si $t_1^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma}) \upharpoonright U = t_2^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma}) \upharpoonright U$.

- $\mathcal{A} \Vdash_U R(t_1, \ldots, t_m)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si $\left\langle t_1^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma}), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma})\right\rangle, [U] \subseteq R^{\mathcal{A}}$.

- $\mathcal{A} \Vdash_U (\phi \wedge \psi)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si $\mathcal{A} \Vdash_U \phi[\overline{\sigma}]$ y $\mathcal{A} \Vdash_U \psi[\overline{\sigma}]$.

- $\mathcal{A} \Vdash_U (\phi \vee \psi)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si existen U_1, U_2 abiertos en U tales que $U = U_1 \cup U_2$, $\mathcal{A} \Vdash_{U_1} \phi[\overline{\sigma}]$ y $\mathcal{A} \Vdash_{U_2} \psi[\overline{\sigma}]$.

- $\mathcal{A} \Vdash_U \neg\phi[\overline{\sigma}]$ si y sólo si para cada abierto W en U, si $W \neq \varnothing$ entonces $\mathcal{A} \nVdash_W \phi[\overline{\sigma}]$.

- $\mathcal{A} \Vdash_U (\phi \rightarrow \psi)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si para todo abierto W en U, $\mathcal{A} \Vdash_W \phi[\overline{\sigma}]$ implica $\mathcal{A} \Vdash_W \psi[\overline{\sigma}]$.

- $\mathcal{A} \Vdash_U \exists v\, \phi[v, \overline{\sigma}]$ si y sólo si existe un recubrimiento de abiertos $\{U_i\}$ de U y secciones $\tau_i \in \mathcal{A}(U_i)$ tales que para todo i, $\mathcal{A} \Vdash_{U_i} \phi[\tau_i, \overline{\sigma}]$.

- $\mathcal{A} \Vdash_U \forall v\, \phi[v, \overline{\sigma}]$ si y sólo si para todo abierto W de U y para toda sección τ definida en W, $\mathcal{A} \Vdash_W \phi[\tau, \overline{\sigma}]$.

Definición 2.4. Sea $\mathcal{A}$ un haz de estructuras sobre X. Se define inductivamente la relación "$\mathcal{A}$ fuerza ϕ en x para las secciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$" ($x \in X$), y se denota $\Vdash_x \phi[\overline{\sigma}]$, de la siguiente forma:

- $\mathcal{A} \Vdash_x (t_1 = t_2)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si $t_1^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma})(x) = t_2^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma})(x)$.

- $\mathcal{A} \Vdash_x R(t_1, \ldots, t_m)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si $\left(t_1^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma})(x), \ldots, t_1^{\mathcal{A}}(\overline{\sigma})(x)\right) \in R^{\mathcal{A}}$.

- $\mathcal{A} \Vdash_x (\phi \wedge \psi)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si $\mathcal{A} \Vdash_x \phi[\overline{\sigma}]$ y $\mathcal{A} \Vdash_x \psi[\overline{\sigma}]$.

- $\mathcal{A} \Vdash_x (\phi \vee \psi)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si $\mathcal{A} \Vdash_x \phi[\overline{\sigma}]$ o $\mathcal{A} \Vdash_x \psi[\overline{\sigma}]$.

- $\mathcal{A} \Vdash_x \neg\phi[\overline{\sigma}]$ si y sólo si existe $U \in Ab(x)$ tal que para todo $y \in U$, $\mathcal{A} \nVdash_y \phi[\overline{\sigma}]$.
- $\mathcal{A} \Vdash_x (\phi \rightarrow \psi)[\overline{\sigma}]$ si y sólo si existe $U \in Ab(x)$ tal que para todo $y \in U$, $\mathcal{A} \Vdash_y \phi[\overline{\sigma}]$ implica $\mathcal{A} \Vdash_y \psi[\overline{\sigma}]$.
- $\mathcal{A} \Vdash_x \exists v : \phi[v, \overline{\sigma}]$ si y sólo si existe una sección τ que contiene a x en su dominio tal que $\mathcal{A} \Vdash_x \phi[\tau, \overline{\sigma}]$.
- $\mathcal{A} \Vdash_x \forall v : \phi[v, \overline{\sigma}]$ si y sólo si existe $U \in Ab(x)$ tal que para todo $y \in U$ y para toda sección τ que contenga a y en su dominio, $\mathcal{A} \Vdash_y \phi[\tau, \overline{\sigma}]$.

La "compatibilidad" entre las anteriores nociones de forzamiento se puede enunciar así:

Teorema 2.5. *Para un haz $\mathcal{A}$ de estructuras sobre X, secciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, un abierto U en X y una fórmula ϕ,*

$$\mathcal{A} \Vdash_U \phi[\overline{\sigma}(x)] \text{ si y sólo si para todo } y \in U, \mathcal{A} \Vdash_y \phi[\overline{\sigma}(x)].$$

Prueba. Véase [2]. ☑

Un *filtro de abiertos* G sobre un espacio topológico X es un filtro G sobre X tal que cada $U \in G$ es abierto en X.

Definición 2.6 (Filtro genérico). Dado un haz de estructuras $\mathcal{A}$ sobre X y un filtro G de abiertos sobre X, se dice que G es *genérico* para $\mathcal{A}$ si dados $U \in G$, fórmulas ϕ, ψ y secciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ cuyos dominios contienen a $W \in G$, se tiene:

1. Existe $V \in G$ tal que $V \subseteq \cap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}(\sigma_i)$ y $\mathcal{A} \Vdash_V \phi[\overline{\sigma}]$ o $\mathcal{A} \Vdash_V \neg\phi[\overline{\sigma}]$.
2. Si $\mathcal{A} \Vdash_V \exists\psi[v, \overline{\sigma}]$, existen $W \in G$ y $\tau \in \mathcal{A}(V \cap W)$ tales que $\mathcal{A} \Vdash_{V \cap W} \psi[\tau, \overline{\sigma}]$.

Teorema 2.7. *Sea G un filtro de abiertos sobre X. Entonces G es maximal si y sólo si para todo haz de estructuras $\mathcal{A}$ sobre X, G es genérico para $\mathcal{A}$.*

Prueba. Véase [2]. ☑

Sea $\mathcal{A}$ un haz de estructuras sobre X y G un filtro de abiertos sobre X, se define la relación de equivalencia $\sim_G$ sobre el conjunto $\mathrm{Sec}(\mathcal{A})$ así:

$$\sigma \sim_G \tau \text{ si y sólo si existe } W \in G \text{ tal que } \sigma|W = \tau|W.$$

Se define la estructura $\mathcal{A}[G]$ como sigue:

- El universo de $\mathcal{A}[G]$ es el conjunto $\mathrm{Sec}(\mathcal{A})/\sim_G = \{[\sigma]_G : \sigma \in \mathrm{Sec}(\mathcal{A})\}$.[2]
- Si c es un símbolo de constante, $c^{\mathcal{A}[G]} = [(c_x)_{x\in X}]_G$.
- Si f es un símbolo de función de aridad n, $f^{\mathcal{A}[G]}([\sigma_1]_G, \dots, [\sigma_n]_G)$ se define como:

$$\left[f^{\mathcal{A}}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\right]_G = \left[(f_g(\sigma_1(g), \dots, \sigma_n(g)))_{g\in U}\right]_G,$$

  con $U = \bigcap \mathrm{Dom}(\sigma_i)$.
- Si R es un símbolo de relación de aridad n, $([\sigma_1], \dots, [\sigma_n]) \in R^{\mathcal{A}[G]}$ si y sólo si existe $W \in G$ tal que $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle[W] \subseteq R^{\mathcal{A}}$.

Es fácil verificar la buena definición de $f^{\mathcal{A}[G]}$ y $R^{\mathcal{A}[G]}$. Si G es un filtro genérico para $\mathcal{A}$, la estructura $\mathcal{A}[G]$ es llamada un *modelo genérico.*

Definición 2.8 (Interpretación de Gödel). La interpretación de Gödel de una fórmula ϕ de primer orden es la fórmula ϕ^{Gd} definida así:

- Para ϕ atómica, ϕ^{Gd} es $\neg\neg\phi$.
- $(\phi \wedge \psi)^{Gd}$ es $\phi^{Gd} \wedge \psi^{Gd}$.
- $(\phi \vee \psi)^{Gd}$ es $\neg\left(\neg\phi^{Gd} \wedge \neg\psi^{Gd}\right)$.
- $(\phi \to \psi)^{Gd}$ es $\neg\left(\phi^{Gd} \wedge \neg\psi^{Gd}\right)$.
- $(\neg\phi)^{Gd}$ es $\neg\phi^{Gd}$.
- $(\forall x\phi)^{Gd}$ es $\forall x\left(\phi^{Gd}\right)$.
- $(\exists x\phi)^{Gd}$ es $\neg\forall x\left(\neg\phi^{Gd}\right)$.

El siguiente teorema es el equivalente al teorema de Łos para el caso de modelos genéricos en vez de ultraproductos (y filtros de abiertos en vez de filtros), que caracteriza la validez de fórmulas en un modelo genérico:

Teorema 2.9 (Teorema del modelo genérico). *Sea $\mathcal{A}$ un haz de estructuras sobre X, sea G un filtro de abiertos sobre X, genérico para $\mathcal{A}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ secciones. Entonces para toda fórmula ϕ, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{A}[G] \models \phi\left[[\sigma_1]_G, \dots, [\sigma_n]_G\right]$.
2. *Existe $W \in G$ tal que $\mathcal{A} \Vdash_W \phi^{Gd}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.*

[2] En ocasiones, si G es claro en el contexto, $[\sigma]_G$ se denota por $[\sigma]$.

3. $\{x \in X : A \Vdash_x \phi^{Gd}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]\} \in G$.

Prueba. Véase [4]. ☑

Sea $(I, \leq)$ un orden parcial. Se dice que $E \subseteq I$ es *hereditario* si dados $g \in E$ y $h \in I$, si $g \leq h$ entonces $h \in E$. La topología natural de I está dada por

$$Ab(I) = \{S \subseteq I : S \text{ es hereditario}\}.$$

Dado $S \subseteq I$, sea $[S) = \{h \in I : \text{existe } g \in S \text{ tal que } g \leq h\}$. Dado un modelo de Kripke[3] K en lógica de primer orden, digamos

$$K = \left((I, \leq), (K_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i,j \in I, i \leq j}\right),$$

K está asociado de forma natural con un haz de estructuras

$$\mathcal{H}(K) = \left((E, p), I, (K_i)_{i \in I}\right)$$

sobre I (con su topología natural), definido de la siguiente manera:

1. $E = \cup K_i$ (se toma la unión disjunta), con la topología generada por las *tuplas coherentes* sobre abiertos, esto es, tuplas de la forma $(e_i)_{i \in U}$ ($U \in Ab(I)$), $e_i \in K_i$ y para $i \leq j$, $e_j = f_{ij}(e_i)$.
2. $p : E \to I$ es la función dada por $p(e) = i$, para $e \in K_i$.

El haz $\mathcal{H}(K)$ es llamado el *haz de Kripke correspondiente a* K. A cada $e \in K_i$ le corresponde la sección $\sigma_e : [i) \to E$, dada por $\sigma_e(j) = f_{ij}(e)$. Las secciones del haz $\mathcal{H}(K)$ corresponden exactamente a las tuplas coherentes. La semántica de Kripke puede verse como un caso especial de la semántica en haces:

Teorema 2.10. *Sea* $K = \left((I, \leq), (K_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i,j \in I, i \leq j}\right)$ *un modelo de Kripke,* ϕ *una fórmula y* $e_1, \dots, e_n \in K_i$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $K \Vdash_i \phi[e_1, \dots, e_n]$ *(semántica de Kripke),*

2. $\mathcal{H}(K) \Vdash_i \phi[\sigma_{e_1}, \dots, \sigma_{e_n}]$ *(semántica puntual de haces),*

3. $\mathcal{H}(K) \Vdash_{[i)} \phi[\sigma_{e_1}, \dots, \sigma_{e_n}]$ *(semántica local de haces).*

Prueba. Véase [4]. ☑

Se dice que G es *genérico* para K si y sólo si G es genérico para $\mathcal{H}(K)$ y $K[G]$ se define como el modelo $\mathcal{H}(K)[G]$.

[3] Para más sobre modelos de Kripke, véase [7].

El modelo genérico constante

Dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ e I un orden parcial, sea $K_{\mathcal{A},I}$ el modelo de Kripke $\left((I,\leq),\left((K_{\mathcal{A},I})_g\right)_{g\in I},(f_{ij})_{i\leq j}\right)$, en donde:

- *Estructuras*: $(K_{\mathcal{A},I})_g = \mathcal{A}$, para todo $g \in I$,
- *Homomorfismos de transición*: Para $g, h \in I$, con $g \leq h$, $f_{gh} = Id_{\mathcal{A}}$.

La estructura $K_{\mathcal{A},I}$ es llamada el *modelo de Kripke constante de $\mathcal{A}$ con respecto a I*. En modelos de Kripke constantes el forzamiento en cada punto del orden parcial es "clásico". Más precisamente:

Teorema 2.11. *Para $a_1, \ldots, a_n \in A$, $g_0 \in I$, y una L-fórmula ϕ:*

$$K_{\mathcal{A},I} \Vdash_{g_0} \phi[\bar{a}] \text{ si y sólo si } \mathcal{A} \models \phi[\bar{a}].$$

Prueba. Véase [4]. ☑

Lema 2.12. *Para un filtro de abiertos G sobre I, genérico para $K_{\mathcal{A},I}$, $\mathcal{A}$ se sumerge elementalmente en el modelo genérico $K_{\mathcal{A},I}[G]$.*

Prueba. Sea $\alpha : A \to K_{\mathcal{A},I}[G]$ la función dada por $\alpha(a) = [(a)_{g\in I}]_G$. Entonces para $a_1, \ldots, a_n \in A$, y ϕ una fórmula, se tiene:

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{A},I}[G] \models \phi\,[[(a_1)_{g\in I}]_G, \ldots, [(a_n)_{g\in I}]]_G & \\ \text{ssi } \left\{g \in I : K_{\mathcal{A},I} \Vdash_g \phi^G\,[a_1, \ldots, a_n]\right\} \in G & \\ \text{ssi } \left\{g \in I : \mathcal{A} \models \phi^G\,[a_1, \ldots, a_n]\right\} \in G & \\ \text{ssi } \{g \in I : \mathcal{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_n]\} \in G & \\ \text{ssi } \mathcal{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_n]\,, & \end{aligned}$$

donde la primera equivalencia vale por el teorema del modelo genérico, y la segunda por el teorema 2.11. ☑

Definición 2.13 (Par ordenado de estructuras). Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Se define la $(L_1 \cup L_2 \cup \{P_1, P_2\})$-estructura $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ así:

1. P_1 y P_2 son símbolos nuevos de predicados de aridad 1.
2. L_1, L_2 son copias relacionales de L, esto es, en donde los símbolos de función de aridad n en L se convierten en símbolos de relación de aridad $(n+1)$ en L_1 y L_2.
3. El universo de $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ es la unión disjunta entre A y B.

4. $P_1^{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} = \mathcal{A}$, y $P_2^{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} = \mathcal{B}$.

5. Los símbolos de L_1 se interpretan en $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ como los símbolos de L en $\mathcal{A}$ y análogamente para L_2 y $\mathcal{B}$.[4]

Dado un sistema de isomorfismos parciales I entre las L-estructuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, se define el siguiente modelo de Kripke $K_{\mathcal{A},\mathcal{B},I}$ sobre el orden parcial $(I,\subseteq)$:

- *Estructuras*: Para cada $g \in I$, $(K_{\mathcal{A},\mathcal{B},I})_g = ([\mathcal{A},\mathcal{B}], g)$, para todo $g \in I$.
- *Homomorfismos de transición*: Para $g,h \in I$ con $g \leq h$, $f_{g,h} = Id_A \cup Id_B$.

De este modo, si se define L^* como el lenguaje extendido $L^* = L_1 \cup L_2 \cup \{P_1, P_2, f\}$ (donde f es un símbolo de relación binaria), entonces para cada $g \in I$, $(K_{\mathcal{A},\mathcal{B},I})_g$ puede verse como una L^*-estructura sobre $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$, en donde f se interpreta como la relación $g \subseteq (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^2$.

Teorema 2.14. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ L-estructuras parcialmente isomorfas con I un sistema de isomorfismos parciales entre ellas y sea $K = K_{\mathcal{A},\mathcal{B},I}$. Sea G un filtro de abiertos en $(I,\subseteq)$, genérico para K y sea $K[G]$ su modelo genérico. Entonces:*

1. $K[G]$ es de la forma $([\mathcal{A}^*,\mathcal{B}^*], f^*)$, en donde $\mathcal{A}^*$ y $\mathcal{B}^*$ son L-estructuras.

2. f^* es un isomorfismo entre $\mathcal{A}^*$ en $\mathcal{B}^*$.

3. $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}^*$ y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}^*$ (o lo que es equivalente en lógica de primer orden, $[\mathcal{A},\mathcal{B}] \preceq [\mathcal{A}^*,\mathcal{B}^*]$).

Prueba.

1. Se comienza por demostrar que $\left\{P_1^{K[G]}, P_2^{K[G]}\right\}$ es una partición de $K[G]$ (más precisamente, de su universo):

   a) Para $j = 1,2$, $P_j^{K[G]} \neq \varnothing$; debe verse que $K[G] \models \phi$, donde ϕ es la fórmula $\exists x P_j(x)$. La fórmula $\phi^G \equiv \neg\forall x \neg\neg\neg P_j(x)$ es intuicionistamente equivalente a $\psi := \neg\forall x \neg P_j(x)$. Por genericidad sea $E \in G$ tal que si $K \not\Vdash_E \neg\psi$, entonces $K \Vdash_E \psi$. Para ver que $K \not\Vdash_E \neg\psi$, fije $h_0 \in E$ y $a_{h_0} \in P_1^{K_{h_0}}$. Así $K \Vdash_{h_0} P_j[a_{h_0}]$, por lo cual $K \not\Vdash_{h_0} \neg P_j[a_{h_0}]$; esto implica que $K \not\Vdash_E \forall x \neg P_j(x)$. Entonces $K \Vdash_E \psi$, luego $K \Vdash_E \phi^{Gd}$. Por el teorema del modelo genérico, $K[G] \models \phi$.

[4]Más precisamente: para cada símbolo $s' \in L_1$, $s'^{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} = s^{\mathcal{A}}$, en donde s' es el símbolo en L_1 correspondiente al símbolo $s \in L$.

b) $P_1^{K[G]} \cap P_2^{K[G]} = \varnothing$: Para demostrar esto sea $r \in P_1^{K[G]}$. Como $K[G] \models P_1[r]$, existe $E \in G$ tal que $r = [(a_h)_{h\in E}]_G$ y $(a_h)_{h\in E} \in P_1^{K(E)}$, esto es, $a_h \in P_1^{K_h}$, para todo $h \in E$. Se debe verificar que $K[G] \not\models P_2[r]$. Sea $E' \in G$, se puede suponer que $E' \subseteq E$. Fije $h_0 \in E'$. Como $a_h \in P_1^{K_h}$, entonces $a_h \notin P_2^{K_h}$. Esto implica que $(a_h)_{h\in E'} \notin P_2^{K(E')}$. Así, $K[G] \not\models P_2[r]$.

c) $K[G] \subseteq P_1^{K[G]} \cup P_2^{K[G]}$: Sea $r = \left[(a_h)_{h\in E}\right] \in K[G]$ y suponga que $K \not\models P_2[r]$. Por el teorema del modelo genérico, para todo $D \in G$, $K \nVdash_{D\cap E} \neg\neg P_2\left[(a_h)_{h\in E}\right]$, luego por genericidad existe $C \in G$ tal que $K \Vdash_C \neg P_2\left[(a_h)_{h\in E}\right]$, de modo que para todo $h \in C$, $a_h \notin P_2^{K_h} = B$, esto es, $a_h \in A = P_1^{K_h}$. Entonces $K[G] \models P_1[r]$.

A continuación se verifica que las interpretaciones de los símbolos de cada léxico "respetan" la partición:

a) Sea $c \in L_1$ un símbolo de constante. Entonces para todo $h \in I$, $c^{K_h} = c^{\mathcal{A}}$ de modo que $c^{K[G]} = \left[\left(c^{K_h}\right)_{h\in I}\right]_G = \left[\left(c^{\mathcal{A}}\right)_{h\in I}\right]_G \in P_1^{K[G]}$. Para el caso en que $c \in L_2$ se razona análogamente.

b) Para todo símbolo de relación $R \in L_j$ de aridad n $(j = 1, 2)$,

$$K[G] \models \forall x_1, \ldots, x_n : R(x_1, \ldots, x_n) \to (P_j(x_1) \wedge \cdots \wedge P_j(x_n)) :$$

Sean $r^1, \ldots, r^n \in K[G]$ tales que $K[G] \models R\left[r^1, \ldots, r^n\right]$. Entonces existe $E \in G$ tal que

$$r^i = \left[\left(r_h^i\right)_{h\in E}\right]_G \quad \text{y} \quad \left(\left(r_h^i\right)_{h\in E}\right)_{1\le i\le n} \in R^{K(E)},$$

es decir, para todo $h \in E$, $\left(r_h^i\right)_{1\le i\le n} \in R^{K_h} \subseteq \left[P_j^{K_h}\right]^n$. Así, para todo i, $\left(r_h^i\right)_{h\in E} \in P_j^{KE}$, lo cual garantiza que $K[G] \models P_j\left[r^i\right]$, $i = 1, \ldots, n$.

c) Puede verse que si $F \in L$ es un símbolo de función de aridad n y F' es su copia en L_1, entonces $F'^{K[G]}$ es una función $F'^{K[G]} : (\mathcal{A}^*)^n \to \mathcal{A}^*$ y análogamente para $L_2, \mathcal{B}^*$.

Sea $\mathcal{A}^*$ la L-estructura con universo $A^* = P_1^{K[G]}$, en donde los símbolos se interpretan según aquellos de L_1 en $K[G]$. De modo análogo se define $\mathcal{B}^*$. Sea $f^* = f^{K[G]}$. Por ende, $K[G] = ([\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*], f^*)$.

2. f^* es un isomorfismo entre $\mathcal{A}^*$ y $\mathcal{B}^*$:

a) $f^* \subseteq A^* \times B^*$: Sea $(r, s) \in f^*$ y sea $E \in G$ tal que $r = \left[(a_h)_{h\in E}\right]_G$, $s = \left[(b_h)_{h\in E}\right]_G$ y $((a_h)_{h\in E}, (b_h)_{h\in E}) \in f^{K^E}$; esto es, para todo $h \in E$, $(a_h, b_h) \in f^{K_h} \subseteq P_1^{K_h} \times P_2^{K_h}$, así que $((a_h)_{h\in E}, (b_h)_{h\in E}) \in P_1^{K^E} \times P_2^{K^E}$, lo que implica $(r, s) \in A^* \times B^*$.

b) f^* es una función: Sean $(r,s),(r,s')\in f^*$. Entonces existe $E\in G$ tal que $r=\left[(r_h)_{h\in E}\right]_G$, $s=\left[(s_h)_{h\in E}\right]_G$ y $s'=\left[(s'_h)_{h\in E}\right]_G$. Además, para todo $h\in E$, $(r_h,s_h),(r_h,s'_h)\in f^{K_g}=g$. Como cada g es función, se tiene que $(s_h)_{h\in E}=(s'_h)_{h\in E}$, lo cual implica que $s=s'$.

c) $\mathrm{Dom}\,(f^*)=A^*$: ya se estableció una inclusión. Para la otra, sea $r\in A^*$, y $E\in G$ tal que $r=[(a_h)_{h\in E}]_G$ y para todo $h\in E$, $a_h\in P_1^{K^h}=\mathcal{A}$. Para demostrar que $K[G]\models\exists yf(r,y)$, basta demostrar, por el teorema del modelo genérico, que para todo $g\in E$:

$$K\Vdash_g\neg\forall y\neg f\left((a_h)_{h\in E},y\right),$$

lo cual equivale a demostrar que para todo $g'\supseteq g$:

$$K\nVdash_{g'}\forall y\neg f\left((a_h)_{h\in E},y\right).$$

Para establecer lo último, sea $g'\supseteq g$: sea $g''\in I$ tal que $g'\subseteq g''$ y $a_{g'}\in\mathrm{Dom}\,(g'')$. Por ende, $K\Vdash_{g''}f\left((a_h)_{h\in E},g''(a_{g'})\right)$.

d) La demostración de que $Im\,(f^*)=B^*$ es análoga.

e) f^* es inyectiva: Si $f^*(r)=f^*(r')$, entonces existe $E\in G$ tal que $r=\left[(r_h)_{h\in E}\right]_G$, $r'=\left[(r'_h)_{h\in E}\right]_G$ y para todo $h\in E$, $h\,(r_h)=h\,(r'_h)$. Como h es inyectiva, esto implica que $r_h=r'_h$. Entonces $r=r'$.

f) f^* es un isomorfismo:

1) Sea c un símbolo de constante. Como $c^{\mathcal{A}^*}=\left[\left(c^{\mathcal{A}}\right)_{h\in I}\right]_G$, existe $E\in G$ tal que

$$\begin{aligned}f^*\left(c^{\mathcal{A}^*}\right)&=\left[\left(f^{K_h}\left(c^{\mathcal{A}}\right)\right)_{h\in E}\right]_G=\left[\left(h\left(c^{\mathcal{A}}\right)\right)_{h\in E}\right]_G\\&=\left[\left(\left(c^{\mathcal{B}}\right)\right)_{h\in E}\right]_G=c^{\mathcal{B}^*}.\end{aligned}$$

2) Sea F un símbolo de función de aridad n; sean $r^1,\ldots,r^n\in\mathcal{A}^*$, existe $E\in G$ tal que $r^i=\left[\left(r^i_h\right)_{h\in E}\right]_G$ y además:

$$F^{\mathcal{A}^*}\left(r^1,\ldots,r^n\right)=\left[\left(F^{\mathcal{A}}\left(r^1_h,\ldots,r^n_h\right)\right)_{h\in E}\right].$$

Por ende:

$$
\begin{aligned}
f^*\left(F^{\mathcal{A}^*}\left(r^1,\ldots,r^n\right)\right) &= \left[\left(f^{K_g}\left(F^{\mathcal{A}}\left(r_h^1,\ldots,r_h^n\right)\right)\right)_{h\in E}\right]_G \\
&= \left[\left(h\left(F^{\mathcal{A}}\left(r_h^1,\ldots,r_h^n\right)\right)_{h\in E}\right)\right]_G \\
&= \left[\left(F^{\mathcal{B}}\left(h\left(r_h^1\right),\ldots,h\left(r_h^n\right)\right)\right)_{h\in E}\right]_G \\
&= \left[\left(F^{\mathcal{B}}\left(f^{K_h}\left(r_h^1\right),\ldots,f^{K_h}\left(r_h^n\right)\right)\right)_{h\in E}\right]_G \\
&= F^{\mathcal{B}^*}\left(\left[\left(f^{K_h}\left(r_h^1\right)\right)_{h\in E}\right]_G,\ldots,\left[\left(f^{K_h}\left(r_h^1\right)\right)_{h\in E}\right]_G\right) \\
&= F^{\mathcal{B}^*}\left(f^*\left(r^1\right),\ldots,f^*\left(r^n\right)\right)
\end{aligned}
$$

3) Sea R un símbolo de relación de aridad n, sean $r^1,\ldots,r^n \in \mathcal{A}^*$ y sea $E \in G$ tal que $r^i = \left[\left(r_h^i\right)_{h\in E}\right]_G$ y $f^*\left(r^i\right) = \left[\left(h\left(r_h^i\right)\right)_{h\in E}\right]_G$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left(r^1,\ldots,r^n\right) \in R^{\mathcal{A}^*} \ &\text{ssi } \forall h \in E, \left(r_h^i\right)_{1\leq i\leq n} \in R^{\mathcal{A}} \\
&\text{ssi } \forall h \in E, \left(h\left(r_h^i\right)\right)_{1\leq i\leq n} \in R^{\mathcal{B}} \\
&\text{ssi } \left(f^*\left(r^1\right),\ldots,f^*\left(r^n\right)\right) \in R^{\mathcal{B}^*}
\end{aligned}
$$

3. $\mathcal{A}^* \cong \mathcal{M} = K_{\mathcal{A},I}[G]$: Dado $r = \left[(r_h)_{h\in E}\right]_G \in P_1^{K[G]}$, sea $D \in G$ tal que para todo $g \in D$, $r_h \in A$ y sea $p(c) = \left[(r_h)_{h\in D}\right]_G \in \mathcal{M}$. Es fácil verificar la buena definición de p. A continuación se verifica que $p : \mathcal{A}^* \to \mathcal{M}$ es un isomorfismo:

   a) Sea c un símbolo de constante. Entonces

$$
p\left(c^{\mathcal{A}^*}\right) = p\left(\left[\left(c^{\mathcal{A}}\right)_{h\in I}\right]_G\right) = \left[\left(c^{\mathcal{A}}\right)_{h\in I}\right]_G = c^{\mathcal{M}}.
$$

   b) Sea F un símbolo de función de aridad n y $r^i = \left[(r_h)_{h\in E}\right]_G \in P_1^{K[G]}$, $i = 1,\ldots,n$. Existe $E \in G$ tal que para todo $h \in E$, $r_h^1,\ldots,r_h^n \in \mathcal{A}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
p\left(F^{\mathcal{A}^*}\left(r^1,\ldots,r^n\right)\right) &= p\left(\left[\left(F^{\mathcal{A}}\left(r_h^1,\ldots,r_h^n\right)\right)_{h\in E}\right]_G\right) \\
&= \left[\left(F^{\mathcal{A}}\left(r_h^1,\ldots,r_h^n\right)\right)_{h\in E}\right]_G \\
&= F^{\mathcal{M}}\left(\left[\left(r_h^1\right)_{h\in E}\right]_G,\ldots,\left[\left(r_h^n\right)_{h\in E}\right]_G\right) \\
&= F^{\mathcal{M}}\left(p\left(r^1\right),\ldots,p\left(r^n\right)\right)
\end{aligned}
$$

   c) El caso para símbolos de relación es análogo.

Por el lema 2.12, y dado que todo filtro genérico para $K_{\mathcal{A},\mathcal{B},I}$ lo es para $K_{\mathcal{A},I}$ y $K_{\mathcal{B},I}$ (lo cual se demuestra por inducción en fórmulas), se concluye que $\mathcal{A}$ se sumerge elementalmente en $\mathcal{A}^*$. Análogamente se verifica que $\mathcal{B}$ se sumerge elementalmente en $\mathcal{B}^*$. ☑

La estructura $\mathcal{A}^*$ definida en el teorema anterior es isomorfa a $K_{\mathcal{A},I}[G]$. Para simplificar la notación, $K_{\mathcal{A},I}[G]$ se denotará por $\mathcal{A}^{*,G,I}$.

Definición 2.15 (Modelo genérico constante). Sea G un filtro de abiertos sobre un orden parcial I, genérico para $K_{\mathcal{A},I}$. La estructura $K_{\mathcal{A},I}[G]$ es llamada el *modelo genérico constante de* $\mathcal{A}$ (con respecto a G e I) y se denota por $\mathcal{A}^{*,G,I}$. Cuando G e I sean claros del contexto, $\mathcal{A}^{*,G,I}$ se denota simplemente por $\mathcal{A}^*$.

El siguiente teorema condensa los resultados anteriores:

Teorema 2.16. *Sea $I : \mathcal{A} \cong_p \mathcal{B}$, y G un filtro de abiertos sobre un orden parcial I, genérico para $K_{\mathcal{A},\mathcal{B},I}$. Entonces $\mathcal{A}^{*,G,I} \cong \mathcal{B}^{*,G,I}$, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}^{*,G,I}$ y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}^{*,G,I}$.*

3. Isomorfismos parciales y finitarios

A continuación se estudia la interacción entre ultrapotencias y sistemas de isomorfía parcial y finitaria, demostrando que la equivalencia elemental entre estructuras se traduce en isomorfía parcial entre ciertas ultrapotencias de las primeras.

Definición 3.1. Dadas sucesiones $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \omega^I$, y un filtro $\mathcal{U}$ sobre ω, se define la relación $<_{\mathcal{U}}$ así:

$$(a_i)_{i\in I} <_{\mathcal{U}} (b_i)_{i\in I} \text{ si y sólo si } \{i \in I : a_i < b_i\} \in \mathcal{U}.$$

Si el filtro $\mathcal{U}$ es claro en el contexto, $<$ abreviará $<_{\mathcal{U}}$.

A continuación se recuerda brevemente la construcción de ultrapotencias de estructuras. Dada una estructura $\mathcal{A}$, un conjunto I y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, se define la relación $\sim_{\mathcal{U}}$ sobre $\mathcal{A}^I$ de la siguiente manera:

$$(a_i)_{i\in I} \sim_{\mathcal{U}} (x_i)_{i\in I} \leftrightarrow \{i \in I : a_i = x_i\} \in \mathcal{U}.$$

Es fácil ver que $\sim_{\mathcal{U}}$ es una relación de equivalencia. Se denota por $\mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ al conjunto $\mathcal{A}^I/\sim_{\mathcal{U}}$, al cual se puede dotar de estructura (véase [1] para más detalles). La estructura $\mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ es llamada la *ultrapotencia de* $\mathcal{A}$ *con respecto a* $\mathcal{U}$. En particular los elementos de esta estructura son clases de equivalencia, esto es, elementos de la forma $[(a_i)_{i\in I}]_{\mathcal{U}}$, en donde cada $a_i \in \mathcal{A}$ y

$$[(a_i)_{i\in I}]_{\mathcal{U}} := \{(x_i)_{i\in I} : \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}\}.$$

Dado $E \in \mathcal{U}$ y $(a_i)_{\in E} \in \mathcal{A}^I$, es fácil ver que cualquier par de extensiones de la tupla $(a_i)_{i\in E}$ a una tupla en $\mathcal{A}^I$ son equivalentes con respecto a la relación $\sim_{\mathcal{U}}$. Gracias a esto, es natural y conveniente definir

$$[(a_i)_{i\in E}]_{\mathcal{U}} := [(x_i)_{i\in I}]_{\mathcal{U}},$$

en donde $(x_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ es *cualquier* extensión de $(a_i)_{i\in E}$, es decir, para todo $i \in E$, $a_i = x_i$.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-estructuras finitamente isomorfas y sea $\overline{I} = \{I_n : n \in \omega\} : \mathcal{A} \cong_f \mathcal{B}$ un sistema finitario de isomorfismos parciales entre ellas. Además sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre ω. Sean $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^\omega/\mathcal{U}$, y $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}^\omega/\mathcal{U}$, se define inductivamente la noción de $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$*-función*, para

$$x^1 = \left(x_i^1\right)_{i\in\omega} > x^2 = \left(x_i^2\right)_{i\in\omega} > \ldots > x^n = (x_i^n)_{i\in\omega},$$

sucesiones crecientes y no acotadas de números naturales:

- Una $(x_i)_{i\in\omega}$-función es una función de la forma

  $$\left\{\left(\left[(a_i)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}, \left[(b_i)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}\right)\right\},$$

  que cumple con la siguiente propiedad: para todo $i \in \omega$ existe $y_i \in I_{x_i}$ tal que $y_i(a_i) = b_i$. Note que existe $i_0^1 (= 0)$ tal que para todo $i \geq i_0^1$ b_i es de la forma $y_i(a_i)$, con $y_i \in I_{x_i}$.

- Suponga que

  $$g = \left\{\left(\left[\left(a_i^1\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}, \left[\left(b_i^1\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}\right), \ldots, \left(\left[(a_i^n)_{i\in\omega}\right], \left[(b_i^n)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}\right)\right\}$$

  es una $(x^1, \ldots, x^n)$-función, con $i_0^n \in \omega$ tal que para todo $i \geq i_0^n$, $b_i^n = y_i^n(a_i^n)$, con $y_i^n \in I_{x_i^n}$. Para $x^{n+1} = \left(x_i^{n+1}\right)_{i\in\omega} < x^n$, una $\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right)$-función es una función de la forma

  $$\hat{g} = g \cup \left\{\left(\left[\left(a_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}, \left[\left(b_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}\right)\right\},$$

  tal que:

  - $\left[\left(a_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}' \smallsetminus \mathrm{Dom}\,(g)$, $\left[\left(b_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{B}' \smallsetminus Im\,(g)$,
  - existe i_0^{n+1} tal que para todo $i \geq i_0^{n+1}, b_i^{n+1} = y_i^{n+1}(a_i)$, donde $y_i^{n+1} \in I_{x_i^{n+1}}$ y $y_i^{n+1} \supseteq y_i^n$. [Para $i < i_0^{n+1}$, $b_i^{n+1} = b_0$.]

  La definición de $\hat{g}$ no es ambigua: si $(a_i')_{i\in\omega} \sim_{\mathcal{U}} \left(a_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}$ y se define $b_i' = y_i^{n+1}(a_i')$, cuando $a_i' \in \mathrm{Dom}\left(y_i^{n+1}\right)$ y $b_i' = b_0$ de lo contrario, entonces $\left[\left(b_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}} = \left[(b_i')_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}$. En realidad $\hat{g}$ está determinada por g, $\left[\left(a_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}}$, i_0^{n+1} y la familia $\left(y_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}$.

Si g es una $(x^1, \dots, x^n)$-función, digamos

$$g = \left\{ \left(\left[(a_i^1)_{i\in\omega} \right]_{\mathcal{U}}, \left[(b_i^1)_{i\in\omega} \right]_{\mathcal{U}} \right), \dots, \left([(a_i^n)_{i\in\omega}], [(b_i^n)_{i\in\omega}]_{\mathcal{U}} \right) \right\},$$

entonces existe $i_0 \in \omega$ tal que para $i \geq i_0$ y para todo $k \leq n$, y_i^n extiende al correspondiente y_i^k, y $y_i^n\left(a_i^k\right) = b_i^k$. Bajo estas condiciones se dice que i_0 es un *número suficiente* para g.

Es fácil ver que toda $(x^1, \dots, x^n)$-función es un isomorfismo parcial entre $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$. Sea $I\left(\bar{I}, \mathcal{U}\right)$ el conjunto de todas las $(x^1, \dots, x^n)$-funciones respecto a $\bar{I}$ y $\mathcal{U}$, $(n \in \omega)$.

Lema 3.2. *Suponga que $\bar{I} : \mathcal{A} \cong_f \mathcal{B}$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre ω, entonces $I : \mathcal{A}^\omega/\mathcal{U} \cong_p \mathcal{B}^\omega/\mathcal{U}$, en donde $I = I\left(\bar{I}, \mathcal{U}\right)$.*

Prueba. Sean $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^\omega/\mathcal{U}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^\omega/\mathcal{U}$. Es fácil ver que $I = I\left(\bar{I}, \mathcal{U}\right)$ es un conjunto no vacío. Por ejemplo, si $x^1 = (i)_{i\in\omega}$, $y \in I_0$, con $y \neq \varnothing$, donde $a \in \mathrm{Dom}(y)$, entonces $\{([(a)_{i\in\omega}]_{\mathcal{U}}, [(y(a))_{i\in\omega}]_{\mathcal{U}})\} \in I$. Para demostrar la propiedad de extensión de dominio para I, sea

$$g = \left\{ \left(\left[(a_i^1)_{i\in\omega} \right]_{\mathcal{U}}, \left[(b_i^1)_{i\in\omega} \right]_{\mathcal{U}} \right), \dots, \left([(a_i^n)_{i\in\omega}]_{\mathcal{U}}, [(b_i^n)_{i\in\omega}]_{\mathcal{U}} \right) \right\}$$

una $(x^1, \dots, x^n)$-función, y $\left[\left(a_i^{n+1}\right)\right] \in \mathcal{A}' \setminus \mathrm{Dom}\,(g)$.

Sea $i_0^{n+1} = \min\{i : x_i^n > 0\}$ y sea x^{n+1} la sucesión definida por $x_i^{n+1} = x_i^n$ para $i < i_0^{n+1}$, y $x_i^{n+1} = x_i^n - 1$ para $i \geq i_0^{n+1}$. Es claro que $x^{n+1} = \left(x_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}$ es creciente, no acotada y que $x^n < x^{n+1}$ (puesto que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal). Para cada $i \geq i_0^{n+1}$ sea $h_i^{n+1} \in I_{x_i^{n+1}}$ tal que $a_i^{n+1} \in \mathrm{Dom}\left(h_i^{n+1}\right)$ y y_i^{n+1} extiende al isomorfismo parcial $y_i^n \in I_{x_i^n}$. Defina b_i^{n+1} como $y_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)$ para $i \geq i_0^{n+1}$, y $b_i^{n+1} = b_0$ para $i < i_0^{n+1}$ (donde b_0 es un elemento fijo en B). Para ver que $\left[\left(b_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}} \notin Im\,(g)$, suponga que no. Sea $k \leq n$ tal que $E = \left\{i \in \omega : b_i^k = b_i^{n+1}\right\} \in \mathcal{U}$. Entonces para cada $i \in E' = E \cap \left[max\left(i_i^n, i_i^{n+1}\right), \infty\right)$ se tiene que

$$y_i^{n+1}\left(a_i^k\right) = y_i^n\left(a_i^k\right) = b_i^k = b_i^{n+1} = y_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right).$$

Como y^{n+1} es inyectiva, entonces $a_i^k = a_i^{n+1}$. Dado que $E' \in \mathcal{U}$, entonces

$$\left[\left(a_i^{n+1}\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}} = \left[\left(a_i^k\right)_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathrm{Dom}\,(g).$$

Sea $\hat{g} = g \cup \left\{ \left(\left[(a_i^{n+1})_{i\in\omega} \right]_{\mathcal{U}}, \left[(b_i^{n+1})_{i\in\omega} \right]_{\mathcal{U}} \right) \right\}$. Entonces $\hat{g} \in I$, $\left[(a_i^{n+1})_{i\in\omega}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathrm{Dom}\,(\hat{g})$ y $\hat{g} \supseteq g$. La propiedad de extensión de la imagen se demuestra de forma análoga. ☑

El llamado *teorema de Fraïssé* afirma que en léxicos finitos las nociones de equivalencia elemental e isomorfía finitaria coinciden:

Teorema 3.3 (Teorema de Fraïssé). *(L finito) Dadas L-estructuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{A} \cong_f \mathcal{B}$.*

Prueba. Véase [3] ☑

Corolario 3.4. *(L finito) Dadas L-estructuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{A}^\omega/\mathcal{U} \cong_p \mathcal{B}^\omega/\mathcal{U}$ para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ no principal sobre ω.*

Prueba. La implicación $\Leftarrow$ es clara. La implicación $\Rightarrow$ vale por el teorema de Fraïssé junto con el lema 3.2. ☑

Si L es un léxico arbitrario, no necesariamente finito, la equivalencia elemental no implica en general la isomorfía finitaria. Sin embargo la equivalencia elemental entre dos estructuras puede "transformarse" en un sistema finitario de isomorfismos parciales entre ciertas ultrapotencias de las primeras, cuidadosamente seleccionadas:

Lema 3.5. *$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si y sólo si existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto I tal que $\mathcal{A}^I/\mathcal{U} \cong_f \mathcal{B}^I/\mathcal{U}$.*

Prueba. La dirección $\Leftarrow$ es clara. Para el recíproco, sea $I = \{i : i$ es un subconjunto finito de $L\}$. Dado $c \in L$, sea $S_c = \{i \in I : c \in i\}$. Dado que $\{S_c : c \in L\}$ posee la propiedad de intersección finita, éste puede extenderse a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I. Para cada $i \in I$, sea $I_0^i \supseteq I_1^i \supseteq \cdots \supseteq I_n^i \supseteq \cdots$ un sistema finitario de isomorfismos parciales entre los reductos $\mathcal{A} \restriction i$ y $\mathcal{B} \restriction i$, que son elementalmente equivalentes al ser reductos de estructuras elementalmente equivalentes. Para cada $n \in \omega$ sea K_n el conjunto de las funciones de la forma gen $\left((g_i)_{i\in I}\right)$ en donde $g_i \in I_n^i$ y $g = \text{gen}\left((g_i)_{i\in I}\right)$ es la función cuyo dominio consta de los elementos $a = \left[(a_i)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ tales que

$$E = \{i \in I : a_i \in \text{Dom}(g_i)\} \in \mathcal{U},$$

en cuyo caso $g(a) = \left[(g_i(a_i))_{i\in E}\right]_{\mathcal{U}}$. A continuación se verifica que $K = \{K_n : n \in \omega\}$ es un sistema finitario de isomorfismos parciales entre $\mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}^I/\mathcal{U}$:.

1. Si $g = \text{gen}\left((g_i)_{i\in I}\right) \in K_{n+1}$, entonces $g_i \in I_{n+1}^i \subseteq I_n^i$, luego $g \in K_n$.

2. Fije $n \in \omega$. Para cada i, I_n^i es no vacío, luego $K_n \neq \varnothing$. Sea $g = \text{gen}\left((g_i)_{i\in I}\right) \in K_n$. Para demostrar la inyectividad de g, suponga que

$$g\left(\left[(a_i)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}}\right) = g\left(\left[(b_i)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}}\right),$$

entonces existe $E \in \mathcal{U}$ tal que para todo $i \in E$, $g_i(a_i) = g_i(b_i)$, lo que implica, por inyectividad de las g_i, que $a_i = b_i$, para todo $i \in E$ y así $\left[(a_i)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}} = \left[(b_i)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}}$.

Ahora se verifica que g es un isomorfismo parcial:

- Sea $c \in L$ un símbolo de constante y suponga que $c^{\mathcal{A}^I/\mathcal{U}} \in \mathrm{Dom}(g)$. Entonces existe $E \in \mathcal{U}$ tal que para $i \in E$, $c^{\mathcal{A}} \in \mathrm{Dom}(g_i)$. Por ende,

$$g\left(c^{\mathcal{B}^I/\mathcal{U}}\right) = \left[\left(g_i\left(c^{\mathcal{A}}\right)\right)_{i\in E\cap S_c}\right]_{\mathcal{U}} = \left[\left(c^{\mathcal{B}}\right)_{i\in E\cap S_c}\right]_{\mathcal{U}} = c^{\mathcal{B}^I/\mathcal{U}}.$$

  El recíproco es análogo.

- Sea $F \in L$ un símbolo de función de aridad m, sean

$$a = \left[(a_i)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}}, a^1 = \left[\left(a_i^1\right)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}}, \ldots, a^m = \left[(a_i^m)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathrm{Dom}(g),$$

  y suponga que $F^{\mathcal{A}^I/\mathcal{U}}\left(a^1, \ldots, a^n\right) = a$. Entonces existe $E \in \mathcal{U}$ tal que para todo $i \in E$, $a_i, a_i^1, \ldots, a_i^m \in \mathrm{Dom}\left(g_i\right)$ y $F^{\mathcal{A}}\left(a_i^1, \ldots, a_i^m\right) = a_i$. Por ende, para todo $i \in E \cap S_F$, $F^{\mathcal{B}}\left(g_i\left(a_i^1\right), \ldots, g_i\left(a_i^m\right)\right) = g_i(a_i)$, de modo que $F^{\mathcal{B}^I/\mathcal{U}}\left(g\left(a^1\right), \ldots, g\left(a^n\right)\right) = g(a)$. El recíproco es análogo.

- Sea $R \in L$ un símbolo de relación m-aria, con

$$a^1 = \left[\left(a_i^1\right)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}}, \ldots, a^n = \left[(a_i^m)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathrm{Dom}(g).$$

  Suponga que $\left(a^1, \ldots, a^n\right) \in R^{\mathcal{A}^I/\mathcal{U}}$ y sea $E \in \mathcal{U}$ tal que para todo $i \in E$, $a_i^1, \ldots, a_i^m \in \mathrm{Dom}(g_i)$ y $\left(a_i^1, \ldots, a_i^m\right) \in R^{\mathcal{A}}$. Por ende, para $i \in E \cap S_R$, $\left(g_i\left(a_i^1\right), \ldots, g_i\left(a_i^m\right)\right) \in R^{\mathcal{B}}$, luego $\left(g\left(a^1\right), \ldots, g\left(a^m\right)\right) \in R^{\mathcal{B}^I/\mathcal{U}}$. El recíproco es análogo.

3. Finalmente se demuestra la propiedad de extensión de domino: sea $g = \mathrm{gen}\left((g_i)_{i\in I}\right) \in K_{n+1}$ y $a = \left[(a_i)_{i\in I}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^I/\mathcal{U}$. Para cada $i \in I$, tome $\hat{g}_i \in I_n^i$ tal que $a_i \in \mathrm{Dom}(\hat{g}_i)$ y $\hat{g}_i \supseteq g_i$. Entonces $\hat{g} := \mathrm{gen}\left((\hat{g}_i)_{i\in I}\right) \in K_n$, y $\hat{g} \supseteq g$ y $a \in \mathrm{Dom}(\hat{g})$. La propiedad de extensión de imagen es demostrada de forma análoga.

☑

Lema 3.6. *Si $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^{I_1}/\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1^{I_2}/\mathcal{U}_2$ (con $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ultrafiltros), entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}_3$ sobre $I_3 = I_1 \times I_2$ tal que $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}^{I_3}/\mathcal{U}_3$.*

Teorema 3.7. *$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si y sólo si existe un conjunto I y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I tal que $\mathcal{A}^I/\mathcal{U} \cong_p \mathcal{B}^I/\mathcal{U}$.*

Prueba. La dirección $\Leftarrow$ vale gracias al lema 3.5, más el hecho de que la isomorfía parcial implica isomorfía finitaria. Para el recíproco, suponga que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Por el lema 3.5 existen ultrapotencias $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, finitamente isomorfas. Por el lema 3.2, existen ultrapotencias $\mathcal{A}''$ y $\mathcal{B}''$ de $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente, parcialmente isomorfas. Por el lema 3.6, $\mathcal{A}''$ es isomorfa a una ultrapotencia $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, y $\mathcal{B}''$ es isomorfa a una ultrapotencia $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$, y naturalmente $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son parcialmente isomorfas. ☑

4. El teorema de ultralímites

En esta sección se demuestra finalmente el teorema de ultralímites. El primer paso es establecer algunas propiedades categóricas relativas a diagramas dirigidos y conexiones.

Definición 4.1. Un diagrama dirigido D en una categoría consta de un orden parcial dirigido $(I, \leq)$, objetos a_i $(i \in I)$ y morfismos $\alpha_{i,j} : a_i \to a_j$ $(i \leq j)$, tales que para cada $i \in I$, $\alpha_{i,i} = 1_{a_i}$ y para $i, j, k \in I$, si $i \leq j \leq k$, entonces $\alpha_{j,k} \circ \alpha_{i,j} = \alpha_{i,k}$.

Lema 4.2. *Sea* $D = \Big((I, \leq), (a_i)_{i \in I}, (\alpha_{i,j})_{i \leq j}\Big)$ *un diagrama dirigido,* I_0 *un subconjunto cofinal de* I, *y* $D_0 = \Big((I_0, \leq), (a_i)_{i \in I_0}, (\alpha_{i,j})_{i,j \in I_0, i \leq j}\Big)$. *Entonces todo colímite de* D *es isomorfo a todo colímite de* D_0.

Prueba. Véase [4]. ☑

Dados dos diagramas dirigidos se pueden establecer conexiones entre ellos. Si tales conexiones son coherentes, éstas determinan una conexión entre los límites de los diagramas. A continuación se precisa esta idea.

Definición 4.3 (Conexión). Sean

$$D = \Big((I, \leq), (a_i)_{i \in I}, (\alpha_{i,j})_{i \leq j}\Big), \ E = \Big((J, \leq), (b_j)_{j \in J}, (\beta_{i,j})_{i \leq j}\Big),$$

diagramas dirigidos. Una *conexión* entre D y E es un conjunto $F = \{f_{i,j} : a_i \to b_j : (i, j) \in R\}$ tal que $R \subseteq I \times J$, y además:

- $\mathrm{Dom}(R)$ es cofinal en I, e $Im(R)$ es cofinal en J.
- Si $(i, j), (i_1, j_1) \in R$, e $i \leq i_1$, entonces $j \leq j_1$ y $\beta_{j,j_1} \circ f_{i,j} = f_{i_1,j_1} \circ \alpha_{i,i_1}$.
- Si $(i, j), (i_1, j_1) \in R$, con $j \leq j_1$, entonces $i \leq i_1$ y $\beta_{j,j_1} \circ f_{i,j} = f_{i_1,j_1} \circ \alpha_{i,i_1}$.

$$\begin{tikzcd}
a_i \arrow[r, "f_{i,j}"] \arrow[d, "\alpha_{i,i_1}"'] & b_j \arrow[d, "\beta_{j,j_1}"] \\
a_{i_1} \arrow[r, "f_{i_1,j_1}"'] & b_{j_1}
\end{tikzcd}$$

Como es de esperar, toda conexión de isomorfismos *sobrevive* al pasar de diagramas a sus colímites, convirtiéndose en un isomorfismo:

Lema 4.4. *Sean D, E y F como en la definición anterior y $(d_i : a_i \to a)_{i\in I}$ y $(e_j : b_j \to b)_{j\in J}$ colímites de D y E respectivamente. Entonces existe un morfismo $f : a \to b$ tal que si todo $f_{i,j} \in F$ es un isomorfismo, entonces f también lo es.*

Prueba. Véase [4]. ☑

A continuación se describe una manera "adecuada" de transformar sistemas de isomorfismos parciales entre estructuras en sistemas de isomorfismos parciales entre ultrapotencias de las primeras estructuras.

Dado un sistema de isomorfismos parciales $I : \mathcal{A} \cong_p \mathcal{B}$ y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, sea $J(I,\mathcal{U})$ el conjunto de todas las funciones h construidas de la siguiente forma: dado $(y_g)_{g\in I} \in I^I$ tal que para todo $g \in I$, $y_g \supseteq g$, sea $h = \text{gen}\left((y_g)_{g\in I}\right)$ la función cuyo dominio consta de todos los elementos $a = \left[(a_g)_{g\in I}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ tales que $E = \{g : a_g \in \text{Dom}(y_g)\} \in \mathcal{U}$ y $h(a) = \left[(y_g(a_g))_{g\in E}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{B}^I/\mathcal{U}$.

Lema 4.5. *$J(I,\mathcal{U})$ es un sistema de isomorfismos parciales entre $\mathcal{A}^I/\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}^I/\mathcal{U}$.*

Prueba. Ya que $\text{gen}\left((g)_{g\in I}\right) \in J(I,\mathcal{U})$, $J(I,\mathcal{U}) \neq \varnothing$. A continuación se verifica que cada $h = \text{gen}\left((y_g)_{g\in I}\right) \in J(I,\mathcal{U})$ es un isomorfismo parcial:

1. Sea c un símbolo de constante y sea $a = \left[(a_g)_{g\in E}\right] \in \text{Dom}(g)$, con $E = \{g \in I : a_g \in \text{Dom}(y_g)\} \in \mathcal{U}$. Si $c^{\mathcal{A}^I/\mathcal{U}} = a$, entonces existe $E' \in \mathcal{U}$ tal que para $g \in E'$, $c^{\mathcal{A}} = a_g$, luego para todo $g \in E \cap E'$, $c^{\mathcal{B}} = y_g(a_g)$. Por ende, $c^{\mathcal{A}^I/\mathcal{U}} = \left[(c^{\mathcal{B}})_{g\in E\cap E'}\right]_{\mathcal{U}} = \left[(y_g(a_g))_{g\in E\cap E'}\right]_{\mathcal{U}} = h(a)$. El recíproco es análogo.

2. Sea F un símbolo de función de aridad n, y $a^1 = \left[(a_g^1)_{g\in E}\right], \ldots, a^{n+1} = \left[(a_g^{n+1})_{g\in E}\right]_{\mathcal{U}} \in \text{Dom}(g)$, con $E = \{g \in I : a_g^1, \ldots, a_g^{n+1} \in \text{Dom}(y_g)\} \in \mathcal{U}$. Si $f^{\mathcal{A}^I/\mathcal{U}}(a^1, \ldots, a^n) = a^{n+1}$, entonces existe $E' \in \mathcal{U}$, tal que para todo $g \in E'$, $f^{\mathcal{A}}(a_g^1, \ldots, a_g^n) = a_g^{n+1}$, lo que implica que para todo $g \in E \cap E'$,
$$f^{\mathcal{B}}\left(y_g\left(a^1\right), \ldots, y_g\left(a^n\right)\right) = y_g\left(a^{n+1}\right),$$
esto es, $f^{\mathcal{B}^I/\mathcal{U}}\left(h\left(a^1\right), \ldots, h\left(a^n\right)\right) = h\left(a^{n+1}\right)$. El recíproco es similar.

3. Sea R un símbolo de relación de aridad n, y $a^1 = \left[\left(a_g^1\right)_{g\in E}\right]_{\mathcal{U}}, \ldots, a^n = \left[\left(a_g^n\right)_{g\in E}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathrm{Dom}\,(g)$, con $E = \left\{g \in I : a_g^1, \ldots, a_g^n \in \mathrm{Dom}\,(y_g)\right\} \in \mathcal{U}$. Si $\left(a^1, \ldots, a^n\right) \in R^{\mathcal{A}^I/\mathcal{U}}$, entonces existe $E' \in \mathcal{U}$ tal que para todo $g \in E'$, $\left(a_g^1, \ldots, a_g^n\right) \in R^{\mathcal{A}}$. Por ende para todo $g \in E \cap E'$,

$$\left(\left(y_g\left(a_g^1\right)\right), \ldots, \left(y_g\left(a_g^n\right)\right)\right) \in R^{\mathcal{B}},$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}\left(h\left(a^1\right), \ldots, h\left(a^n\right)\right) = \left(\left[\left(y_g\left(a_g^1\right)\right)_{g\in E\cap E'}\right]_{\mathcal{U}}, \ldots, \left[\left(y_g\left(a_g^n\right)\right)_{g\in E\cap E'}\right]_{\mathcal{U}}\right)\\ \in R^{\mathcal{B}^I/\mathcal{U}}.\end{aligned}$$

El recíproco es análogo.

Para demostrar la propiedad de extensión de dominio, sea $h = gen\left(\left(y_g\right)_{g\in I}\right) \in J\left(I, \mathcal{U}\right)$, y $a = \left[\left(a_g\right)_{g\in E}\right]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^I/\mathcal{U}$. Para cada $g \in I$, tome $\hat{y_g} \in I$ tal que $a_g \in \mathrm{Dom}\,(\hat{y_g})$, y $\hat{y_g} \supseteq y_g$. Como $y_g \supseteq g$, entonces $\hat{y_g} \supseteq g$, luego $\hat{h} := gen\left(\left(\hat{y_g}\right)_{g\in I}\right) \in J\left(I, \mathcal{U}\right)$. Por construcción $\hat{h} \supseteq h$ y $a \in \mathrm{Dom}\left(\hat{h}\right)$. La propiedad de extensión de imagen se demuestra de manera análoga. ☑

Sea $I_0 : \mathcal{A}_0 \cong_p \mathcal{B}_0$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[d, tail, "\alpha_0^*"'] \arrow[r, phantom, "\cong_{p,I_0}"] & \mathcal{B}_0 \arrow[d, tail, "\beta_0^*"] \\
\mathcal{A}_0^* \arrow[r, tail, "f_{I_0}^*"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & \mathcal{B}_0^* \arrow[d, "\beta_0"] \\
\mathcal{A}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0 \arrow[d, tail, "\alpha_1^*"'] \arrow[r, phantom, "\cong_{p,I_1}"] & \mathcal{B}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0 \arrow[d, tail, "\beta_1^*"] \\
(\mathcal{A}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0)^* \arrow[r, tail, "f_{I_1}^*"] & (\mathcal{B}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0)^*
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior:

- G_0 es un filtro maximal de abiertos sobre I_0.
- $(\mathcal{A}_0)^* = \mathcal{A}_0^{*,G_0,I_0}$ y $(\mathcal{B}_0)^* = \mathcal{B}_0^{*,G_0,I_0}$.

- $I_1 = J(I_0, \mathcal{U}_0)$.
- $\mathcal{U}_j$ es un ultrafiltro sobre I_j, tal que $G_j \subseteq \mathcal{U}_j$ $(j = 0, 1)$.
- $\left(\mathcal{A}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0\right)^* = \left(\mathcal{A}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0\right)^{*,G_1,I_1}$ y $\left(\mathcal{B}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0\right)^* = \left(\mathcal{B}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0\right)^{*,G_1,I_1}$.
- $f_{I_0}^*$, $f_{I_1}^*$ son los isomorfismos inducidos por I_0 e I_1 de acuerdo al teorema 2.16.
- α_0^*, β_0^*, α_1^* y β_1^* son las sumersiones naturales.
- $\alpha_0 : (\mathcal{A}_0)^* \to \mathcal{A}_0^{I_0}/\mathcal{U}_0$ es el homomorfismo $\left[(a_g)_{g\in E}\right]_{G_0} \mapsto \left[(a_g)_{g\in E}\right]_{\mathcal{U}_0}$ (en donde $E \in G_0$ y $(a_g)_{g\in E}$ es una tupla coherente). β_0 se define de forma análoga.

Sea $\overline{\alpha}_0 = \alpha_1^* \circ \alpha_0$, y $\overline{\beta}_0 = \beta_1^* \circ \beta_0$. Entonces se tiene que:

$$\overline{\alpha}_0\left(\left[(a_g)_{g\in I_0}\right]_{G_0}\right) = \left[\left(\left[(a_g)_{g\in I_0}\right]_{\mathcal{U}_0}\right)_{h\in I_1}\right]_{G_1},$$

y análogamente para $\overline{\beta}_0$.

Lema 4.6. *En el diagrama anterior,* $\overline{\beta}_0 \circ f_{I_0}^* = f_{I_1}^* \circ \overline{\alpha}_0$.

Prueba. Sea $a = \left[(a_g)_{g\in I_0}\right]_{G_0} \in \mathcal{A}_0^*$.

Se tiene que $\overline{\alpha_0}(a) = \left[\left(\left[(a_g)_{g\in I_0}\right]_{\mathcal{U}_0}\right)_{h\in I_1}\right]_{G_1}$, y por ende:

$$f_{I_1}^*\left(\overline{\alpha_0}(a)\right) = \left[\left(h\left(\left[(a_g)_{g\in I_0}\right]_{\mathcal{U}_0}\right)\right)_{h\in E}\right]_{G_1}, \quad (E \in G_1).$$

Ahora, $f_{I_0}^*(a) = \left[(g(a_g))_{g\in D}\right]_{G_0}$, con $D \in G_0$. Si se define $b_g = g(a_g)$ para $g \in D$, y cualquier otro elemento de lo contrario, es claro que $f_{I_0}^*(a) = \left[(b_g)_{g\in I_0}\right]_{G_0}$. Entonces:

$$\overline{\beta}_0\left(f_{I_0}^*(a)\right) = \left[\left(\left[(b_g)_{g\in I_0}\right]_{\mathcal{U}_0}\right)_{h\in I_1}\right]_{G_1}.$$

Fije $h \in E$. Como $h \in I_1 = J(I_0, \mathcal{U}_0)$, $h = gen\left((y_g)_{g\in I_0}\right)$, en donde $y_g \supseteq g$. Entonces existe $C \in \mathcal{U}_0$ tal que:

$$\begin{aligned} h\left(\left[(a_g)_{g\in I_0}\right]_{\mathcal{U}_0}\right) &= \left[(y_g(a_g))_{g\in C}\right]_{\mathcal{U}_0} \\ &= \left[(y_g(a_g))_{g\in C\cap D}\right]_{\mathcal{U}_0} \\ &= \left[(g(a_g))_{g\in C\cap D}\right]_{\mathcal{U}_0} \\ &= \left[(g(a_g))_{g\in D}\right]_{\mathcal{U}0} \\ &= \left[(b_g)_{g\in I_0}\right]_{\mathcal{U}_0}, \end{aligned}$$

Como $E \in G_1$, entonces $f^*_{I_1}(\overline{\alpha_0}(a)) = \overline{\beta}_0(f^*_{I_0}(a))$. ☑

Lema 4.7. *Si G_0 es maximal, entonces α_0 y β_0 son inyectivos.*

Prueba. Sean $a = \left[(a_h)_{h\in E}\right]_{G_0}, b = \left[(b_h)_{h\in E}\right]_{G_0} \in \mathcal{A}^*_0$ $(E \in G_0)$. Por ende para $g,h \in E$, $g \subseteq h$ implica $a_g = a_h$ y $b_g = b_h$. Suponga que $\alpha_0(a) = \alpha_0(b)$, esto es, $\left[(a_h)_{h\in E}\right]_{\mathcal{U}_0} = \left[(b_h)_{h\in E}\right]_{\mathcal{U}_0}$. Sea $C \in \mathcal{U}_0$ tal que para todo $h \in C$, $a_h = b_h$. Sea $C' = \{h \in I_0 : \text{existe } g \in C \text{ tal que } g \subseteq h\}$. Dado que $C' \supseteq C$, C' interseca a todo elemento de G_0. Por maximalidad, $C' \in G_0$. Además, si $h \in C'$, sea $g \in C$ con $g \subseteq h$. Tenemos: $a_h = a_g = b_g = b_h$. Entonces $(a_h)_{h\in I_0}$ y $(b_h)_{h\in I_0}$ coinciden en C', así que $a = b$. La demostración para β_0 es análoga. ☑

Lema 4.8. *Si G_0 es maximal, $\alpha_0(\mathcal{A}^*_0)$ es una subestructura elemental de $\mathcal{A}^{I_0}/\mathcal{U}_0$ y es isomorfo a $\mathcal{A}^*_0$.*

Prueba. Claramente $\alpha_0(\mathcal{A}^*_0)$ es una subestructura de $\mathcal{A}^{I_0}/\mathcal{U}_0$, al ser su universo la imagen de un homomorfismo. Ya se ha notado que α_0 es inyectiva, y de hecho es un homomorfismo estricto, así que $\alpha_0(\mathcal{A}^*_0) \cong \mathcal{A}^*_0$. Para verificar que $\alpha_0(\mathcal{A}^*_0) \preceq \mathcal{A}^{I_0}/\mathcal{U}_0$, sea $a^1 = \left[(a^1_g)_{g\in E}\right]_{G_0}, \ldots, a^n = \left[(a^n_g)_{g\in E}\right]_{G_0} \in \mathcal{A}^*_0$, de modo que $g \subseteq h$ implica $a^1_g = a^1_h, \ldots, a^n_g = a^n_h$. Sea ϕ una fórmula. Si $\alpha_0(\mathcal{A}^*_0) \models \phi\left[\alpha_0(a^1), \ldots, \alpha_0(a^n)\right]$, entonces $\mathcal{A}^*_0 \models \phi\left[a^1, \ldots, a^n\right]$, y por ende

$$D = \left\{h \in I_0 : K_{\mathcal{A},I_0} \Vdash_h \phi^{Gd}\left[a^1, \ldots, a^n\right]\right\} \in G_0.$$

Por el teorema 2.11 se concluye que:

$$D = \left\{h \in I_0 : (K_{\mathcal{A},I_0})_h = \mathcal{A} \models \phi^{Gd}\left[a^1_h, \ldots, a^n_h\right]\right\} \in G_0.$$

Lo anterior implica que

$$D = \left\{h \in I_0 : (K_{\mathcal{A},I_0})_h = \mathcal{A} \models \phi\left[a^1_h, \ldots, a^n_h\right]\right\} \in G_0.$$

Como $D \in \mathcal{U}_I$, se concluye por el Teorema de Łos, que

$$\mathcal{A}^{I_0}/\mathcal{U}_0 \models \phi\left[\alpha_0(a^1), \ldots, \alpha_0(a^n)\right].$$

☑

A continuación se establece el teorema de ultralímites. La idea de la demostración es la siguiente: dadas dos estructuras elementalmente equivalentes, sobre cada una de ellas se construye una cadena alternada de ultrapotencias y modelos genéricos. Los límites de las cadenas serán ultralímites de las estructuras originales, gracias a la presencia de las ultrapotencias, e isomorfos entre sí, gracias a la presencia de los modelos genéricos constantes.

Teorema 4.9. *$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son L-estructuras elementalmente equivalentes si y sólo si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ poseen ultralímites isomorfos.*

Prueba. Evidentemente si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ poseen ultralímites isomorfos, entonces $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Para el recíproco, suponga que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Gracias al teorema 3.7, sea $I_0 : \mathcal{A}_0 \cong_p \mathcal{B}_0$, en donde $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{B}_0$ son ultrapotencias de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Por el teorema 2.16, existe un filtro genérico de abiertos G_0 sobre $(I_0, \subseteq)$ tal que $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}_0^* \cong_{f_1} \mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_0^*$, en donde $f_1 = f_{I_0}^*$. Sean

$$\alpha_{0,1} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1, \quad \beta_{0,1} : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1,$$

las sumersiones elementales canónicas. Se definen inductivamente, para cada $n \in \omega$, estructuras $\mathcal{A}_n$ y $\mathcal{B}_n$, y homomorfismos $\alpha_{n,n+1} : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n+1}, \beta_{n,n+1} : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_{n+1}$, isomorfismos $f_{2n+1} : \mathcal{A}_{2n+1} \to \mathcal{B}_{2n+1}$ y sistemas de isomorfismos parciales $I_n : \mathcal{A}_{2n} \cong_p \mathcal{B}_{2n}$. Por construcción $\mathcal{A}_{2n+2}$ y $\mathcal{B}_{2n+2}$ serán ultrapotencias de $\mathcal{A}_{2n}$ y $\mathcal{B}_{2n}$ respectivamente, siendo las compuestas $\alpha_{2n+1,2n+2} \circ \alpha_{2n,2n+1}$ y $\beta_{2n+1,2n+2} \circ \beta_{2n,2n+1}$ las sumersiones canónicas, respectivamente. El caso $n = 0$ ya ha sido descrito, en el cual se obtiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_0 \arrow[r, phantom, "\cong_{p,I_0}"] \arrow[d, "\alpha_{0,1}"'] & \mathcal{B}_0 \arrow[d, "\beta_{0,1}"] \\ \mathcal{A}_1 \arrow[r, tail, "f_1"] & \mathcal{B}_1 \end{tikzcd}$$

Sea $n > 0$. Considere el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_{2n-2} \arrow[r, phantom, "\cong_{p,I_{n-1}}"] \arrow[d, "\alpha_{2n-2,2n-1}"'] & \mathcal{B}_{2n-2} \arrow[d, "\beta_{2n-2,2n-1}"] \\ \mathcal{A}_{2n-1} \arrow[r, tail, "f_{2n-1}"] & \mathcal{B}_{2n-1} \end{tikzcd}$$

Utilizando el lema 4.6, este diagrama se extiende de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{2n-2} \arrow[r, phantom, "\cong_{p,I_{n-1}}"] \arrow[d, "\alpha_{2n-2,2n-1}"'] & \mathcal{B}_{2n-2} \arrow[d, "\beta_{2n-2,2n-1}"] \\
\mathcal{A}_{2n-1} \arrow[r, tail, "f_{2n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{2n-1,2n}"'] & \mathcal{B}_{2n-1} \arrow[d, "\beta_{2n-1,2n}"] \\
\mathcal{A}_{2n} \arrow[r, phantom, "\cong_{p,I_n}"] \arrow[d, "\alpha_{2n,2n+1}"'] & \mathcal{B}_{2n} \arrow[d, "\beta_{2n,2n+1}"] \\
\mathcal{A}_{2n+1} \arrow[r, tail, "f_{2n+1}"] & \mathcal{B}_{2n+1}
\end{tikzcd}$$

Dados $n, m \in \omega$, con $n < m$, sea $\alpha_{n,n} = Id_{\mathcal{A}_n}$, y $\alpha_{n,m} : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$ la función compuesta natural, definida así:

$$\alpha_{m-1,m} \circ \alpha_{m-2,m-1} \circ \cdots \circ \alpha_{n,n+1},$$

(note que si $m = n + 1$, esta definición coincide con la original).

Por construcción, para $k \leq n \leq m$, $\alpha_{n,m} \circ \alpha_{k,n} = \alpha_{k,m}$. Por esto, $D = \left(\omega, (\mathcal{A}_n)_{n\in\omega}, (\alpha_{n,m})_{n\leq m}\right)$ es un diagrama dirigido. De manera análoga los homomorfismos $\beta_{n,n+1}$ determinan homomorfismos $\beta_{n,m}$ $(n \leq m)$, y así se obtiene el diagrama dirigido $E = \left(\omega, (\mathcal{B}_n)_{n\in\omega}, (\beta_{n,m})_{n\leq m}\right)$. Sea $F = \{f_{2n+1} : n \in \omega\}$. Se debe verificar que F es una conexión entre D y E (con $R = \{(2n+1, 2n+1) : n \in \omega\}$). $\mathrm{Dom}(R) = Im(R)$, cofinal en ω. Para demostrar la tercera propiedad (y análogamente la cuarta) sean $(2n+1, 2n+1), (2m+1, 2m+1) \in R$, y $2n + 1 \leq 2m$, esto es, $n \leq m$. El lema 4.6 garantiza que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{2n+1} \arrow[r, "f_{2n+1}"] \arrow[d, "\alpha_{2n+1,2m+1}"'] & \mathcal{B}_{2n+1} \arrow[d, "\beta_{2n+1,2m+1}"] \\
\mathcal{A}_{2m+1} \arrow[r, "f_{2m+1}"'] & \mathcal{B}_{2m+1}
\end{tikzcd}$$

Como F es un conjunto de isomorfismos, se concluye por el lema 4.4 que $\varinjlim D \cong \varinjlim E$. Sea P el conjunto de los números naturales pares. Sean D_0 el diagrama D restringido a P, y E_0 el diagrama E restringido a P. Por construcción, $\varinjlim D_0$ y $\varinjlim E_0$ son ultralímites de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. La cofinalidad de P en ω junto con el lema 4.2 garantizan que $\varinjlim D_0 \cong \varinjlim D \cong \varinjlim E \cong \varinjlim E_0$. Entonces $\varinjlim D_0 \cong \varinjlim E_0$. ☑

Agradecimientos. A Xavier Caicedo, por sus ideas que guiaron el trabajo aquí presentado.

Referencias

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson, *Models and ultraproducts: an introduction*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969.

[2] X. Caicedo, *Lógica de los haces de estructuras*, Rev. Acad. Colomb. Cienc. **19** (1995), 569–586 (es).

[3] H. D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas, *Mathematical logic*, Springer Verlag, New York, 1984.

[4] A. Forero, *Modelos genéricos constantes y ultrapotencias*, Tesis (Matemático), Universidad de Los Andes, Bogotá, 2004.

[5] S. B. Kochen, *Ultraproducts in the theory of models*, Ann. Math. **74** (1961), no. 2, 221–261.

[6] S. Shelah, *Every two elementary equivalent models have isomorphic ultrapowers*, Israel J. Math. **10** (1971), 224–233.

[7] D. vanDalen, *Logic and structure*, Springer, Berlin, 2008.

(Recibido en noviembre de 2008. Aceptado en octubre de 2009)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes
Carrera 1 No. 18A-10, Bogotá, Colombia
e-mail: an-forer@uniandes.edu.co