Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 39 (2005), páginas 113-131

Corchete y curvatura

Antonio J. Di Scala
Politecnico di Torino, Italy

Abstract. The first part of this article presents the definition of Lie Bracket related to commuting flows of vector fields. In the second part, basic definitions and of connections and curvature are given in order to emphasize the link between Lie Brackets and curvature. Finally, by using locally-defined connections, we give a short and original proof of a classical theorem of Beltrami. The article is addressed to a non specialist in local differential geometry.

Keywords and phrases. Lie Bracket, curvature tensor, affine connection.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 53B20. Secondary: 53B21.

Resumen. La primera parte del artículo presenta al corchete de Lie asociado al problema de la comutatividad de dos flujos. En la segunda parte se introducen las definiciones básicas de conexión y curvatura en fibrados vectoriales, subrayando la relación corchete-curvatura. Finalmente, usando conexiones afines localmente definidas, se da una demostración original y sencilla de un teorema de Eugenio Beltrami. Este artículo apunta a un lector no especialista (e.g. un estudiante de doctorado en matemática o física, etc) en geometría diferencial local.

1. Introducción

La primera parte de este artículo presenta al corchete de Lie y la curvatura de una conexión o derivada covariante como objetos íntimamente relacionados. Naturalmente que todo esto es bien conocido por los expertos en geometría diferencial. Esta primera parte apunta más bien a un lector no especialista e.g. un estudiante de Licenciatura o de Doctorado. Si bien es interesante el enfoque puesto en "descubrir" el corchete, como condición de conmutatividad de flujos, desarrollando en serie de Taylor. También, manteniendo este punto de vista "descubridor", se dan demostraciones sencillas de la identidad de Jacobi y del clásico teorema de Frobenius (en su versión local).

El artículo está escrito pensando en el aspecto local de la geometría diferencial. En algunos pasajes del artículo se dan indicaciones del aspecto global del problema o situación bajo estudio.

Salvo mención explicita todos los campos o funciones serán suaves i.e. $\mathbb{C}^\infty$

La segunda parte contiene una breve introducción a la conexión de Levi-Civita de una variedad riemanniana y al tensor de curvatura de Riemann. Esta sección contiene una demostración original y fácil de recordar de la simetría por "parejas" $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$ del tensor de Riemann.

En la tercera parte del artículo, se da una demostración simple y original de un clásico teorema de Eugenio Beltrami, basada en la correspondencia entre conexiones (localmente definidas) planas sin torsión y sistemas de coordenadas.

Este artículo fue escrito y revisado durante las visitas del autor al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá durante Noviembre 2004 - Enero 2005 y Agosto 2005 gracias a la invitación del Profesor Victor Tapia. La demostración del teorema de Beltrami es consecuencia de conversaciones con Andrea Sambusetti de la Universidad de Roma "La Sapienza".

El autor desea agradecer al referee por las oportunas correcciones que han ayudado a mejorar la presentación final del artículo.

Flujos, conmutatividad y el corchete $[X,Y]$ de dos campos vectoriales

Si un campo X y una función f están definidos en un abierto del espacio euclídeo podemos derivar f en la dirección de X. Dos notaciones para expresar la derivada de f en la direccion de X son: $X(f)$ ó $df(X)$. Si el campo X es un campo coordenado $\frac{\partial}{\partial x}$ en algún sistema de coordenadas, lo anterior es la familiar derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ de f respecto de la coordenada x $\left(\text{i.e. } \frac{\partial}{\partial x}(f) = df(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Usando la linealidad de esta operación y el producto interno se introduce el gradiente ∇f como el campo que realiza la derivada desde el punto de vista del producto interno:

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X)\,,$$

para todo campo X. Con $\langle X,Y\rangle$ denoto el producto interno entre X e Y (i.e. en coordenadas $\langle X,Y\rangle = \sum_i x_i y_i$).

También, si los campos vectoriales X e Y están definidos en un abierto del espacio euclídeo entonces podemos derivar Y en la dirección de X (i.e. derivando componente a componente) esto se escribe D_XY. Si X, Y y Z están definidos en el mismo abierto, entonces se verifica:

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle D_ZX, Y\rangle + \langle X, D_ZY\rangle\,.$$

Es interesante notar que si X es un campo podemos definir su divergencia como $div(X) := \sum_i \langle D_{e_i} X, e_i \rangle$ donde e_i es una base ortonormal que puede ser elegida arbitrariamente como puede verificarse con un simple cálculo (Si no desea cálcular, note que $div(X)$ es la traza de la transformación lineal $D_* X$). De esta manera es posible introducir el familiar Laplaciano $\Delta f := div(\nabla f)$.

Volviendo la atención a los campos, si tenemos un campo X podemos definir su flujo X^t como la familia de difeomorfismos a un parámetro t que constituyen la solución de la ecuación ordinaria de primer orden con condición inicial $c(0) = p : \frac{dc(t)}{dt} = c'(t) = X_{c(t)}$. Es decir por definición tenemos, $X^t.p := c(t)$.

¿Cómo medir si los flujos de dos campos vectoriales conmutan? Sean X un campo en un abierto de $\mathbb{R}^N$ y X^t su flujo. Desarrollando el flujo y el campo en serie de Taylor obtenemos (i.e. debido a las hipótesis de diferenciabilidad):

$$\begin{cases} X^t.p = p + tX_p + \frac{t^2}{2} D_{X_p} X + o(t^3) \\ X_{p+tv_p} = X_p + tD_{v_p} X + o(t^2) \end{cases}.$$

Podemos usar estas formulas para tener una medida de la no conmutatividad de dos flujos, es decir para calcular el comportamiento de $Y^{-t}.X^{-t}.Y^t.X^t.p$ para valores pequeños de t. En efecto, reemplazando obtenemos:

$$\begin{aligned} Y^t.X^t.p = p + tX_p + \frac{t^2}{2} D_{X_p} X + o(t^3) + tY_{p+tX_p+\frac{t^2}{2}D_{X_p}X+o(t^3)} \\ + \frac{t^2}{2} D_{Y_{p+tX_p+\frac{t^2}{2}D_{X_p}X+o(t^3)}} Y. \end{aligned}$$

Ahora, reemplazamos la estimación del campo Y y reagrupamos términos $o(t^3)$:

$$Y^t.X^t.p = p + t(X_p + Y_p) + \frac{t^2}{2}(D_{X_p} X + 2D_{X_p} Y + D_{Y_p} Y) + o(t^3).$$

De manera análoga, podemos obtener:

$$Y^{-t}.X^{-t}.q = q - t(X_q + Y_q) + \frac{t^2}{2}(D_{X_q} X + 2D_{X_q} Y + D_{Y_q} Y) + o(t^3).$$

Si hacemos $q = Y^t.X^t.p$ y introducimos las siguientes estimaciones:

$$X_q = X_{p+t(X_p+Y_p)+o(t^2)} = X_p + tD_{(X_p+Y_p)} X + o(t^2).$$

$$Y_q = Y_{p+t(X_p+Y_p)+o(t^2)} = Y_p + tD_{(X_p+Y_p)} Y + o(t^2).$$

Obtenemos,

$$\begin{aligned} Y^{-t}.X^{-t}.Y^t.X^t.p = p + t(X_p + Y_p) + \frac{t^2}{2}(D_{X_p} X + 2D_{X_p} Y + D_{Y_p} Y) \\ - t(X_p + tD_{(X_p+Y_p)} X) - t(Y_p + tD_{(X_p+Y_p)} Y) \\ + \frac{t^2}{2}(D_{X_p} X + 2D_{X_p} Y + D_{Y_p} Y) + o(t^3). \end{aligned}$$

Si cancelamos términos iguales en esta última igualdad tenemos:

$$Y^{-t}.X^{-t}.Y^{t}.X^{t}.p = p + t^{2}\left(D_{X_p}Y - D_{Y_p}X\right) + o(t^{3}) \qquad (1)$$

Es decir, si los flujos conmutan entonces el corchete $[X,Y] = D_X Y - D_Y X$ se anula.

Recíprocamente, si el corchete se anula los flujos conmutan. Para ver fácilmente esto se reinterpreta el corchete como la variación de un campo respecto de otro i.e. la derivada de Lie. Esto es sencillamente, derivar lo traído por los diferenciales del flujo, más precisamente:

$$(L_X Y)_p := \frac{d}{dt}_{|t=0}(X_*^{-t}Y)_p\,,$$

donde $(X_*^{-t}Y)_p = dX^{-t}(Y(X^t))$ se conoce como el *pushforward* respecto del difeomorfismo X^{-t}, que se puede pensar como "lo traído por el flujo".

De manera análoga a lo que se hizo en el cálculo anterior vamos a ver que:

$$L_X Y = [X,Y]\,.$$

En efecto, para "t" fijo consideremos la recta $c(s)$ que pasa por $X^t.p$ con velocidad inicial $Y_{X^t.p}$ i.e. $c(s) := X^t.p + s.Y_{X^t.p}$. Por definición tenemos:

$$\frac{d}{ds}_{|s=0}X^{-t}.c(s) = (X_*^{-t}Y)_p\,.$$

Luego, imitando lo que hicimos antes

$$\begin{aligned} X^{-t}.c(s) &= X^{-t}.(X^t.p + s.Y_{X^t.p}) = X^t.p + s.Y_{X^t.p} - tX_{X^t.p+s.Y_{X^t.p}} + o(t^2) \\ &= p + tX_p + s.Y_{X^t.p} - tX_{p+tX_p+s.Y_{X^t.p}} + o(t^2) \\ &= p + tX_p + s.Y_{X^t.p} - t(X_{p+tX_p} + s.D_{Y_{X^t.p}}X) + o(t^2)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(X_*^{-t}Y)_p = Y_{X^t.p} - tD_{Y_{X^t.p}}X + o(t^2)\,,$$

y expandiendo respecto de t se obtiene lo que afirmamos i.e. $L_X Y = [X,Y]$.

Veamos entonces que si $L_X Y$ se anula entonces el flujo de Y conmuta con el de X. Para ello observemos en primer lugar que: $\frac{d}{dt}_{|t=t_0}(X_*^{-t}Y)_p = 0$ para todo t_0 y no solo para $t_0 = 0$. Es decir, el campo Y no cambia a lo largo del flujo de X (i.e. $X_*^t(Y_p) = Y_{X^t.p}$). Por lo tanto para cada "t" fijo $X^t.Y^s.p$ es una curva integral del campo Y que pasa por el punto $X^t.p$. Luego, por la unicidad de las soluciones no queda otra que $X^t.Y^s.p = Y^s.X^t.p$ que es lo que queríamos ver.

La identidad de Jacobi. Es interesante ver que pasa cuando tomamos la derivada de Lie de un campo Z respecto a un Corchete $[X,Y]$ y al revés la derivada de Lie de un corchete $[Y,Z]$ respecto de un campo X, la solución se visualiza fácilmente aquí abajo:

$$\begin{cases} L_{[X,Y]}Z &= L_X.L_Y Z - L_Y.L_X Z \\ L_X[Y,Z] &= [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z] \end{cases}.$$

Naturalmente, estas dos identidades son equivalentes a la celebre identidad de Jacobi:

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0\,.$$

Vamos a demostrar esta identidad usando el truco de los tensores. Para ello, llamemos $J(X,Y,Z) = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]$. La idea es probar que J es un "tensor" es decir, que sólo depende de los valores puntuales de los campos. A su vez, esto es equivalente a probar que J saca funciones debido a que la linealidad está garantizada por definición. Fijemos entonces tres campos X,Y,Z y tomemos una función f. Calculemos $J(X,Y,fZ)$, para ello procedemos organizadamente:

$$\left\{\begin{array}{l} [X,[Y,fZ]] = [X,Y(f)Z] + [X,f[Y,Z]] = [X,Y(f)Z] + X(f)[Y,Z] + f[X,[Y,Z]] \\ [Y,[fZ,X]] = -[Y,X(f)Z] + [Y,f[Z,X]] = -[Y,X(f)Z] + Y(f)[Z,X] + f[Y,[Z,X]] \\ [fZ,[X,Y]] = -[X,Y](f)Z + f[Z,[X,Y]] \end{array}\right.$$

Sumando, resulta claro que $J(X,Y,fZ) = fJ(X,Y,Z)$ si y solo si $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Tenemos entonces que demostrar:

$$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))\,.$$

Esto es muy sencillo si uno expresa todo en un sistema de coordenadas ortogonales y usa que las derivadas parciales se pueden tomar en cualquier orden. En efecto, supongamos que $X := x^i\frac{\partial}{\partial e_i}$, $Y := y^j\frac{\partial}{\partial e_j}$, donde usamos la convención de Einstein (i.e. índices iguales arriba y abajo se suman). Calculamos por un lado $X(Y(f)) = x^i\frac{\partial}{\partial e_i}(y^j\frac{\partial}{\partial e_j}(f)) = x^i\frac{\partial}{\partial e_i}(y^j\frac{\partial f}{\partial e_j}) = x^i\frac{\partial y^j}{\partial e_i}\frac{\partial f}{\partial e_j} + x^iy^j\frac{\partial^2 f}{\partial e_i e_j}$ intercambiando los roles de x's e y's resulta:

$$X(Y(f))-Y(X(f))=x^i\frac{\partial y^j}{\partial e_i}\frac{\partial f}{\partial e_j}+x^iy^j\frac{\partial^2 f}{\partial e_i\partial e_j}-y^j\frac{\partial x^i}{\partial e_j}\frac{\partial f}{\partial e_i}-y^jx^i\frac{\partial^2 f}{\partial e_j\partial e_i}\,.$$

De manera análoga calculamos $[X,Y](f) = D_XY(f) - D_YX(f)$. Tenemos, $D_XY(f) = x^iD_{\frac{\partial}{\partial e_i}}y^j\frac{\partial}{\partial e_j}(f) = x^i\frac{\partial y^j}{\partial e_i}\frac{\partial f}{\partial e_j}$. Finalmente, intercambiando roles resulta:

$$[X,Y](f)=x^i\frac{\partial y^j}{\partial e_i}\frac{\partial f}{\partial e_j}-y^j\frac{\partial x^i}{\partial e_j}\frac{\partial f}{\partial e_i}\,,$$

de donde resulta la igualdad, recordando que el orden de las derivadas parciales no importa. Es interesante rescatar de los cálculos anteriores la fórmula del corchete en éstas coordenadas:

$$[X,Y]=(x^j\frac{\partial y^i}{\partial e_j}-y^j\frac{\partial x^i}{\partial e_j})\frac{\partial}{\partial e_i}\,.$$

Volviendo al principio, tenemos entonces que $J(X,Y,Z)$ es un tensor. Luego, $J\equiv 0$, como queríamos mostrar (como resulta evaluando en campos coordenados).

El corchete en variedades. Todo lo dicho en la sección anterior puede ser generalizado al contexto de variedades diferenciables. Un punto de partida, seguido por muchos autores, es introducir el corchete entre dos campos X e Y mediante su acción sobre funciones (i.e., dando sus coordenadas en cualquier sistema de coordenadas) mediante la identidad:

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

y luego justificar que dicho procedimiento realmente produce un campo vectorial (i.e. viendo que sus coordenadas "transforman" cómo deben ser...).

En la categoría de variedades diferenciables las "flechas" o "morfismos" son las funciones suaves. La siguiente es la propiedad característica del corchete respecto a estos morfismos.

Sea $f : N \to M$ una función suave entre variedades y sean X, Y campos vectorial de M y $\bar{X}, \bar{Y}$ campos vectoriales en N. Supongamos que $df(\bar{X}) = X$ y que $df(\bar{Y}) = Y$ (i.e. los campos están f-relacionados) entonces

$$df[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y].$$

Los detalles se pueden consultar en casi todo libro de geometría diferencial e.g. [KNI], [ChEb].

El teorema de Frobenius

Sea M una variedad diferenciable. Observemos que un campo vectorial X que no se anula, define un subespacio unidimensional en cada espacio tangente T_pM. En general, una asignación que a todo punto $p \in M$ asigna un subespacio $p \to \mathcal{D}_p \subset T_pM$ se llama *distribución,* si la dimensión $dim(\mathcal{D}_p)$ es constante i.e. no depende de p, sino se habla de *distribución con singularidades* [Ste]. Si existen d campos suaves (i.e. C^∞) $X_1, \cdots, X_d$ localmente definidos en un entorno U de cada punto p tales que $\mathcal{D}_q = span\{X_1(q), \cdots, X_d(q)\}$ para todo $q \in U$ se dice que la distribución es suave.

En el caso de un campo X, el flujo X^t garantiza la existencia de una "curva" integral a través de cada punto de la variedad M. En general, una subvariedad $N \subset M$ tal que $T_pN = \mathcal{D}_p$ para todo $p \in N$ se llama *subvariedad integral.*

Una distribución $\mathcal{D}$ se dice *localmente integrable* si por cada punto pasa una subvariedad integral maximal N.

Una distribución se dice *involutiva* si el conjunto de sus campos tangentes es cerrado respecto a la operacion de tomar corchetes. Es decir, si para todo par de campos X, Y tangentes a $\mathcal{D}$ el corchete de Lie $[X, Y]$ es nuevamente tangente a $\mathcal{D}$.

Es claro que si una distribución es integrable entonces debe ser involutiva debido a que los corchetes de campos en M se identifican con corchetes calculados sobre las subvariedades integrales N (formalmente habría que usar lo dicho sobre campos i-relaciónados aplicado a las inclusiones canónicas $i : N \to M$ de las subvariedades...).

Teorema 1 (Teorema local de Frobenius). *Una distribución es involutiva si y solo si es localmente integrable.*

Demostración. La demostración que sigue se basa en la siguiente observación.

Lema 2. *Sea X un campo de vectores tangentes a la distribución involutiva $\mathcal{D}$ y sea $v_p \in \mathcal{D}_p \subset T_pM$ un vector tangente a la distribución en el punto $p \in M$. Sea v_t el campo a lo largo del flujo generado por v_p i.e. $v_t = dX^t(v_p)$. Entonces $v_t \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Completemos X con otros campos de manera de obtener (localmente) una base $\{X = X_1, X_2, \cdots X_d\}$ de la distribución involutiva $\mathcal{D}$. Adjuntando mas campos vectoriales $X_{d+1}, \cdots, X_n$ podemos completar a su vez la base de $\mathcal{D}$ a una base de TM.

Como estamos trabajando localmente podemos extender v_t a un campo vectorial V en un abierto alrededor de la línea de flujo que pasa por p. Incluso, podemos hacerlo de manera que la extensión V conmute con X. Todo esto se ve fácilmente pensando en X como un campo coordenado, i.e. trivializando la situación usando el flujo de X y considerando una subvariedad transversal a X que pase por p.

Tenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones para los coeficientes de V respecto a una base de campos de vectores:

$$0 = [X, V] = [X, \sum_i V_i X_i] = \sum_i X(V_i)X_i + V_i[X, X_i];$$

observando detenidamente notamos que este sistema es un sistema de primer orden para los coeficientes V_i de V. Incluso debido a la involutividad de $\mathcal{D}$ (i.e. si $1 \leq i \leq d$ entonces $[X, X_i]$ es una combinacion lineal de X_i con $1 \leq i \leq d$), y de la condición inicial (i.e. $v_p \in \mathcal{D}$), vemos que el sistema se resuelve usando los indices i desde 1 hasta d. Lo que demuestra el lema. ☑

Usando el lema anterior no es difícil demostrar que la inmersion i de un pequeño abierto alrededor del origen de $\mathbb{R}^d$ dada por la composicion de flujos $i(t_1, t_2, \cdots, t_d) = X_1^{t_1} \circ X_2^{t_2} \circ \cdots \circ X_d^{t_d}.(p)$ es una subvariedad integral de la distribución $\mathcal{D}$. Lo que demuestra el teorema de Frobenius. ☑

Comentario 3. *El teorema local de Frobenius es usado muchas veces para construir un sistema de coordenadas adecuado al problema bajo estudio. Ejemplo de esto es la versión global del teorema de Frobenius (i.e. por cada punto $p \in M$ pasa una subvariedad integral maximal S_p): Primero se define $S_p \subset M$ como el subconjunto de puntos que se pueden unir con $p \in M$ mediante una curva continua diferenciable a trozos cuyo tangente está en la distribución $\mathcal{D}$. Segundo se usa la versión local de Frobenius para construir un atlas de S_p que de paso demuestra que le inyección canónica $i : S_p \to M$ es una immersión suave.*

Conexiones y curvatura en fibrados vectoriales: La distribución horizontal

Esta sección es una breve introducción al *lenguaje* de la teoría de conexiones en fibrados vectoriales. La idea es introducir una conexión como una distribución horizontal y su curvatura como la medida de su integrabilidad. También se introduce la conexión mediante la idea de *derivar* secciones suaves i.e. la derivada covariante. Finalmente, se dan ejemplos (locales) de conexiones afines que son derivadas covariantes en el fibrado tangente y se observa como éstas generalizan el concepto de sistema de coordenadas. Para ello se introduce también el tensor de torsión.

Fibrados vectoriales. Sea E y M dos variedades diferenciales. Se dice que $\pi : E \longrightarrow M$ es un fibrado vectorial si π es sobreyectiva y si vale la siguiente condición de trivilizacion local: existe un espacio vectorial V y una familia de cartas fibradas (i.e. difeomorfismos locales) $\phi_\alpha : U_\alpha \times V \longrightarrow E$, tales que los U_α son un recubrimiento por abiertos de M y además:

a) $\pi(\phi_\alpha(x,v)) = x$,

b) En las intersecciones de abiertos se verifique: $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha(x,v) = (x, g_{\beta,\alpha}(x)(v))$ donde $g_{\beta,\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(V)$ es lo que se llama *cociclo,* pues $g_{\gamma,\beta} \circ g_{\beta,\alpha} = g_{\gamma,\alpha}$, etc.

La variedad M se llama *base* mientras que la variedad E se llama *espacio total.* La *fibra* $E_x := \pi^{-1}(x)$ sobre $x \in M$ es una subvariedad de E que se identifica con el espacio vectorial V. Debido a esto el espacio tangente a la fibra $\mathcal{V}$ (i.e. el "vertical") se suele a su vez identificar también con V.

Como consecuencia de la definición vemos que siempre existen secciones locales suaves, i.e. funciones $\xi : U \subset M \to E$, tales que $\pi(\xi(x)) = x$ para todo $x \in U$ donde U es un abierto pequeño alrededor de un punto arbitrario de M.

Podemos siempre tener presente el fibrado tangente como ejemplo de fibrado vectorial. Las secciones locales del fibrado tangente son los campos vectoriales localmente definidos.

Conexión o derivada covariante. Si bien en el espacio euclídeo podemos definir la derivada de campos vectoriales $D_X Y$, en un fibrado vectorial no es posible definir la derivada de una sección de manera natural o canónica. Observemos que si $\gamma(t) \subset M$ es una curva en M y $\xi(t)$ es la restricción de una sección local sobre $\gamma(t)$ (i.e. $\xi(t)$ es una curva en E tal que $\pi(\xi(t)) = \gamma(t)$), entonces $\frac{d\xi}{dt}$ es una curva en TE y no en E como exigiría una genuina "derivada".

La manera de resolver este problema es mediante el concepto de conexión. Existen varias maneras (equivalentes) de introducir este concepto. Es interesante observar que una manera es usando distribuciones. La idea es simple: observemos que si $\frac{d\xi}{dt}$ estuviese en el "vertical" $\mathcal{V}$, entonces no habría problemas para definir la derivada debido a las identificaciones entre espacios tangentes en espacios vectoriales. Como en general $\frac{d\xi}{dt}$ no está en $\mathcal{V}$, podemos complementar $\mathcal{V}$ con una distribución "horizontal" (no totalmente arbitraria, ver más abajo) $\mathcal{H}$ i.e. $TE = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ y simplemente definir la derivada de $\xi(t)$ como la proyección $\frac{D\xi}{dt} = (\frac{d\xi}{dt})^{\mathcal{V}}$ a lo largo de $\mathcal{H}$.

Suponiendo que $\mathcal{H}$ posea la propiedad adicional (i.e. invarianza respecto a la multiplicación por escalares en E) es posible recuperar la definición usual de derivada covariante o conexión D. Es decir, obtenemos una manera de derivar secciones del fibrado respecto a campos vectoriales tangentes a M, denotada con $D_X\xi$. Naturalmente, D depende de $\mathcal{H}$ y entonces cambiando $\mathcal{H}$, cambia D.

Transporte paralelo y holonomia. El transporte paralelo τ_t sobre una curva $\gamma(t)$ constituye simplemente la solución al problema de ecuaciones diferenciales ordinarias $\frac{D\xi}{dt} = 0$. Luego se dice que la sección $\xi(t)$ es paralela a lo largo de $\gamma(t)$ si se verifica $\frac{D\xi}{dt} = 0$. Tenemos entonces $\xi(t) = \tau_t(\xi(0))$.

Si una sección ξ es paralela restringida a toda curva se dice simplemente que ξ es paralela. Esto es equivalente a que ξ satisface $D_X\xi = 0$ para todo vector tangente X. En general, dada una conexión arbitraria, no existen secciones paralelas.

Usando curvas cerradas γ que salen y regresan al punto $p \in M$ se define el grupo de holonomia Φ_p en $p \in M$, como el subgrupo de $GL(V)$ generado por los transportes paralelos τ_t a lo largo de las curvas cerradas γ.

El problema de la existencia de una sección paralela es un caso particular del siguiente "principio de holonomia": *Existe un tensor paralelo T cuyo valor en p es T_p si y solo si T_p es invariante por la acción del grupo de holonomia* .

Curvatura. La curvatura es en realidad un corchete de Lie encubierto. En efecto, pensando en la distribución horizontal $\mathcal{H}$ nos podemos preguntar si es o no integrable. Del teorema de Frobenius sabemos que esto es así si y solo si es cerrada respecto a tomar corchetes, i.e. $[X,Y] \in \mathcal{H}$ si X, Y son campos tangentes a $\mathcal{H}$.

Independientemente de que $\mathcal{H}$ sea o no integrable vemos que el corchete $[X,Y] \in T_{\xi_p}E$. Entonces tiene sentido que lo proyectemos (como cuando definimos $\frac{D\xi}{dt}$) al vertical. Es decir, introducimos $R(X,Y)(\xi_p) := \left([X,Y]_{\xi_p}\right)^{\mathcal{V}}$. Aplicando lo anterior a campos vectoriales tangentes $\bar{X}, \bar{Y}$ π-relaciónados con campos X, Y en M obtenemos el tensor de curvatura $R(X,Y)(\xi)$ asociado a la conexión D. Es decir,

$$R(X,Y)(\xi) := ([\bar{X},\bar{Y}]_{\xi_p})^{\mathcal{V}}\,.$$

De lo anterior se deduce trivialmente el siguiente teorema.

Teorema 4. *El tensor de curvatura de una conexión es idénticamente cero si y solo si la distribución horizontal es integrable.*

Demostración. Observemos que el flujo $\bar{X}^t$ de un campo horizontal $\bar{X}$ produce el transporte paralelo de secciones sobre las curva integrales del campo X.

Esta observación junto con la definición "dinámica" del corchete de Lie (i.e. en términos de pullback de flujos) permite demostrar la siguiente identidad:

$$R(X,Y)\xi = D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X,Y]}\xi .$$

Usando el principio de holonomia vemos que una conexión es plana, i.e. R es idénticamente cero, si y solo si existen $dim(V)$ secciones locales paralelas. ☑

Conexiones afines

Tradicionalmente (ver [KNI, Pág. 129]) se habla de *conexión afín* cuando el fibrado vectorial E es el fibrado tangente de la variedad M. En general, el contexto es muy claro y no existe peligro de confusión. Por ejemplo, si se está estudiando una conexión que no es afín, es preferible usar letras griegas para denotar las secciones del fibrado vectorial.

Más adelante veremos que a una conexión afín D se le asocia, además de su tensor de curvatura R^D, un tensor T^D de tipo $(2,1)$ llamado *torsión* definido mediante la ecuación:

$$T^D(X,Y) := D_X Y - D_Y X - [X,Y] .$$

Notemos que ésta definición sólo posee sentido cuando D es una conexión afín debido a que simplemente no tendría sentido intercambiar X con Y en un conexión definida en un fibrado vectorial E distinto del fibrado tangente y más aún, tampoco tendría sentido calcular el corchete $[X,Y]$.

Derivadas covariantes en abiertos de $\mathbb{R}^n$. Mas adelante tendré necesidad de usar derivadas covariantes D definidas localmente en abiertos de $\mathbb{R}^n$. Veamos qué quiero decir al respecto. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto entorno de un punto $p \in \mathbb{R}^n$. Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son n campos suaves definidos en U entonces puedo definir una derivada covariante D (i.e. una conexión afín en U) simplemente dando n^3 funciones Γ_{ij}^k que sirven sencillamente para calcular $D_{X_i}X_j$ mediante la ecuación:

$$D_{X_i}X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k .$$

Luego, si debemos calcular $D_X Y$ para campos arbitrarios debemos expresar X e Y en términos de $X_1, X_2, \ldots, X_d$ y usar las propiedades de D i.e. la linearidad y la regla de Leibniz.

Concretamente, por ejemplo, si $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$, estamos decretando que todos los campos $X_1, \cdots, X_n$ sean paralelos. Obviamente que esta D tendrá curvatura $R^D \equiv 0$. Es decir, D será plana. Notemos que esto *no* implica que los campos $X_1, \ldots, X_n$ commuten entre sí (simplemente inicie con campos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que no conmuten y defina D como hemos indicado más arriba).

Podemos asociar entonces a cada sistema de coordenadas una conexión o derivada covariante definida simplemente decretando que los campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sean paralelos.

Estas observaciones llevan a pensar que se puede generalizar el concepto de sistema de coordenadas pensando en conexiones o derivadas covariantes localmente definidas. En efecto, en el parágrafo precedente hemos visto que el conjunto de sistemas de coordenadas se puede identificar con un subconjunto del conjunto de conexiones localmente definidas. El siguiente teorema permite decidir cuándo una conexión D es en efecto una conexión que proviene de un sistema de coordenadas.

Proposición 5. *Una conexión localmente definida D proviene de un sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, i.e. $D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \equiv 0$ si y solo si D es plana, i.e. $R^D \equiv 0$ y el tensor de torsion $T^D := D_X Y - D_Y X - [X, Y]$* es idénticamente cero i.e. $T^D \equiv 0$.

Demostración. Es una consecuencia simple de lo dicho sobre la existencia de secciones paralelas y de componer los flujos de campos paralelos como se hizo en la demostración del teorema de Frobenius, observando que dichos flujos conmutan debido a que la torsión es cero. ☑

Se puede pensar entonces que así como el tensor de curvatura de una conexión nos permite estudiar la existencia de campos paralelos, el tensor de torsión nos informa sobre la conmutatividad de los flujos asociados a estos campos paralelos. Naturalmente que para una conexion general no existen campos paralelos, sin embargo, es interesante pensar a la Proposición 5 como una motivación para la introducción del tensor de torsión T^D.

Dicho fácilmente y fácilmente recordable: un sistema de coordenadas es una conexión (localmente definida) plana sin torsión. En realidad, es posible que dos sistemas de coordenadas (diferentes) definan la misma conexión afín. Dejamos al lector la demostración de que esto es sólo posible cuando la matriz de cambio de coordenadas entre ambos sistemas es constante, i.e. el cambio de coordenada es afín.

Comentario 6. *El problema* global *de decidir sí una variedad M admite o no una conexión D plana, con o sin torsión, es un problema clásico y difícil de la topología diferenciable (ver, por ejemplo, en el caso de superficies* [Mil]*).*

El tensor de Riemann y un teorema de Eugenio Beltrami

Esta sección contiene una breve introducción al tensor de curvatura de Riemann. Como consecuencia de la identidad de Bianchi se da una demostración sencilla de una de las simetrías más conocidas de este tensor: La simetría por "parejas" $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$. Se concluye la sección con una demostración simple de un teorema de Eugenio Beltrami. Para más información sobre geometría de Riemann en general ver [Ber] y para más información sobre teoría de subvariedades riemannianas ver [BCO].

Simetrías o propiedades del tensor de Riemann. Sea $(M, \langle , \rangle)$ una variedad riemanniana. Alrededor de 1920 Levi-Civita demostró que se puede definir una manera de derivar covariantemente de manera natural o canónica. Mas precisamente existe una única conexión D sin torsión i.e. (¡nuevamente el corchete en escena!) $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$ y que preserva la métrica $D_X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$.

Usando coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ y expresando la métrica $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$ es sencillo demostrar el teorema de Levi-Civita. Simplemente se escribe $D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ y se observa que para que D sea sin torsión debe ser $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ y que preservar la métrica implica $\frac{\partial g_{ij}}{\partial k} = \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{jl} + \Gamma_{kj}^l g_{il}$. Una permutación cíclica en i, j, k conduce a un sistema de 3×3 muy fácil de resolver produciendo las conocidas fórmulas:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{\frac{\partial g_{jk}}{\partial i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial k}}{2} \tag{2}$$

En 1854 Riemann introdujo el tensor de curvatura R como medida de la curvatura de la variedad abstracta $(M^n, \langle , \rangle)$, es decir, buscando determinar cuando M es localmente isométrica a un espacio plano $\mathbb{R}^n$. Riemann razonaba localmente, así que el problema se reducía a determinar las condiciones para la existencia de un cambio de coordenadas donde los coeficientes de la métrica sean constantes (para más información ver [Sp2] o [DiS]).

La definición original de Riemann del tensor R fue entonces, motivada por este problema de *isometria,* de donde resulta natural pensar que Riemann haya definido R a partir de sus coeficientes R_{ijkl} respecto a un sistema de coordenadas.

Modernamente y en términos de la sección anterior se recupera el tensor de Riemann como el tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ asociado a la conexión de Levi-Civita i.e. $R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z$.

Fijado un espacio tangente $T_p M$ y vectores $X, Y, Z, W \in T_p M$ se sigue que R posee las siguientes propiedades:

a) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,
b) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (I identidad de Bianchi),
c) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$.

Usando $a), b)$ y $c)$ se sigue que la identidad de Bianchi, i.e. suma cíclica igual a cero, es valida con respecto a cualesquiera tres argumentos del tensor de tipo $(0, 4)$ $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7. *En las condiciones anteriores se tiene:*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Z)W, Y \rangle + \langle R(X, W)Y, Z \rangle = 0$$

Demostración. La demostración es muy sencilla (¡y fácil de recordar!) y se basa en la siguiente matriz de 3×3:

$$\begin{pmatrix} \langle R(X,Y)Z,W\rangle & \langle R(X,Z)W,Y\rangle & \langle R(X,W)Y,Z\rangle \\ \langle R(Y,Z)X,W\rangle & \langle R(Z,W)X,Y\rangle & \langle R(W,Y)X,Z\rangle \\ \langle R(Z,X)Y,W\rangle & \langle R(W,X)Z,Y\rangle & \langle R(Y,X)W,Z\rangle \end{pmatrix}$$

La suma de la primera fila consiste exactamente en lo que queremos demostrar que vale cero. Llamemos A a la suma de la primera fila. Luego, las columnas se construyen usando la identidad de Bianchi *b*) a partir del primer elemento en la primera fila i.e. cambiando cíclicamente los primeros tres argumentos. Esto garantiza que la suma de todas las columnas es cero debido a *b*). Llamemos B y C la suma de la segunda y tercera fila respectivamente. Entonces, $A + B + C = 0$ pues esta suma equivale a sumar todas las entradas de la matriz. Ahora es sencillo ver que usando *c*) y *b*) se sigue $B = 0$ y $A = C$ lo que demuestra el resultado. ☑

Una sencilla consecuencia de las identidades de Bianchi es la siguiente simetría en "parejas" del tensor de Riemann.

Corolario 8. *En las condiciones anteriores se tiene:*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$$

Demostración. Podemos usar la identidad de Bianchi con respecto a cualesquiera de los argumentos. Entonces,

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= -\langle R(X,Z)W,Y\rangle - \langle R(X,W)Y,Z\rangle \\ &= \langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(W,X)Z,Y\rangle - \langle R(X,W)Y,Z\rangle \\ &= \langle R(Z,W)X,Y\rangle.\end{aligned}$$

La última identidad se sigue usando *c*). ☑

Es interesante observar que esta última propiedad de R junto con *a*) y *c*) permiten pensar a R como un operador simétrico $R : \Lambda^2(TM) \to \Lambda^2(TM)$.

Una consecuencia fundamental de la identidad de Bianchi es que es posible recuperar el tensor R a partir de la la curvatura secciónal (ver [KNI] o [ChEb])

$$Q(X,Y) := \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|\, X \wedge Y\,|^2} = \frac{\langle R(X \wedge Y), X \wedge Y\rangle}{|\, X \wedge Y\,|^2}.$$

Notemos que la curvatura secciónal $Q(X,Y)$ sólo depende del 2-plano generado por X, Y. En particular se tiene que R es idénticamente cero si y solo si Q es idénticamente cero. Como consecuencia se sigue que para una superficie la determinación del tensor de curvatura se reduce a conocer la (única) curvatura secciónal, más conocida como curvatura de Gauss. También es posible llegar a la misma conclusión observando que $dim(\Lambda^2(T_pM)) = 2$ si M es una superficie i.e. $dim(M) = 1$.

Para ilustrar la importancia de la identidad de Bianchi veamos un ejemplo de operador simétrico de $\Lambda^2(TM)$ cuya "curvatura seccional" es siempre nula pero que no es idénticamente cero. Se trata del operador $*$ de Hodge de una variedad de Riemann M orientada y de dimensión 4 i.e. $*(e_i \wedge e_j) = e_k \wedge e_l$, tal que la base (e_i, e_j, e_k, e_l) es positiva. Por definición tenemos que $\langle *(a \wedge b), a \wedge b\rangle = 0$ lo que implica que las curvaturas secciónales de $*$ son cero siempre. Claramente el operador de Hodge no es cero. Naturalmente esto es consecuencia de que el operador de Hodge nó satisface la identidad de Bianchi.

Un teorema de E. Beltrami. El teorema de Beltrami [Bel] al que nos referiremos en esta sección se puede pensar como una caracterización local y en coordenadas de los espacios de curvatura constante i.e. aquellos en los que $Q(X,Y) = k \in \mathbb{R}$ o equivalentemente $R(X,Y)Z = k(X \wedge Y)Z$.

Probablemente, Beltrami haya partido observando que usando la proyección central desde el centro de una esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a su espacio tangente T_pM se obtiene un sistema de coordenadas locales alrededor de $p \in S^n$ en el cual las geodésicas son líneas rectas, sin tener en cuenta la parametrización. Esta observación no requiere ningún cálculo y se sigue observando que las geodésicas de S^n se obtienen "cortando" S^n con 2-planos que pasen por el centro de la esfera. Luego, la proyección central necesariamente envía estas geodésicas a la intersección de dicho plano con el plano tangente T_pM produciendo una recta en este último.

A su vez, el mismo argumento puede ser empleado para el espacio hiperbólico real $H^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ respecto al modelo lorentziano.

Resumiendo, se observa que si $p \in M(k)$ es un punto en un espacio de curvatura constante $M(k)$ entonces existen coordenadas $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alrededor de p tales que las expresiones $\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ en estas coordenadas de las geodésicas coinciden (salvo reparametrización) con rectas ordinarias escritas en coordenadas $x_1, \cdots, x_n$ (i.e. $\gamma''(t)$ es proporcional a $\gamma'(t)$ para tódo t).

El teorema de Beltrami es exactamente la afirmación recíproca de esta observación.

Teorema 9 (E. Beltrami, 1865 [Bel]). *Supongamos que un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de una variedad riemanniana (M, g) tiene la propiedad de que las geodésicas son líneas rectas i.e. salvo parametrización la ecuación de las geodésicas es $x_i' x_j'' - x_i'' x_j' = 0$. Entonces la curvatura es constante en los puntos parametrizados por $x_1, \ldots, x_n$.*

Es interesante observar que Beltrami sólo demostró su teorema cuando $n = 2$ i.e. para una superficie. El caso general fue demostrado por L.P. Eisenhart [Eis, §40]. Tanto la demostración de Beltrami como la de Eisenhart son difíciles de recordar pues son consecuencia de la experiencia de ambos autores en el manejo de ecuaciones diferenciales y técnicas "ad hoc" de análisis tensorial. Una demostración muy bonita y clara, usando técnicas de flujos geodésicos se puede consultar en [Mat].

Comentario 10. *En el Capitulo V del libro de Elie Cartan* [Car] *se demuestra la equivalencia entre el axioma de los planos, el axioma de la libre movilidad y la existencia de una representación geodésica sobre el espacio ordinario, i.e. de un sistema de coordenadas como en la hipótesis del teorema de Beltrami. Cartan demuestra la equivalencia en dimensión 3 y comenta (en el punto 115. página 130) que la demostración puede ser generalizada al caso $n > 3$. Finalmente, en el punto 116, Cartan comenta que el caso $n = 2$ es más difícil de comprender geométricamente y cita justamente a E. Beltrami y su artículo* [Bel].

No es difícil dar una demostración sencilla y conceptual para el caso $dim(M) \geq 3$. La idea es un principio que establece que *si una variedad riemanniana posee "muchas" subvariedades totalmente geodésicas entonces la variedad debe de ser "muy" simétrica* . El axioma de los planos de Elie Cartan es el primer ejemplo de este principio.

Es interesante observar este "principio" en la reciente demostración de C. Olmos del famoso teorema de Berger-Simons [Olm]. Otro ejemplo es el teorema de rigidez de Molina-Olmos [MoOl]. Tanto en la demostración en el Capitulo V del libro de Cartan, como en estos dos últimos artículos la existencia de subvariedades totalmente geodésicas se mezcla con *un théoréme remarquable* de Gregorio Ricci-Curbastro [Car, pág. 122, punto 107]:

S'il existe dans l'espace de Riemann une famille á un paramétre de plans, leurs trajectories orthogonales etablissent entre les differents plans de la famille une correspondence ponctuelle isométrique.

La demostración de éste *theorema remarquable* es muy sencilla y puede consultarse en [HeLi, pág. 154, Lemma 1.2.], donde se la usa nuevamente como instrumento en la construcción de isometrías.

Una manera de evitar introducir el *axioma de libre movilidad* es hablar de espacios de curvatura constante (naturalmente ambas nociones son equivalentes).

Proposición 11. *Sean (M^n, g) $(n \geq 3)$ una variedad riemanniana y $R(X,Y)Z$ su tensor de Riemann. Si $R(X,Y)Z \in span\{X,Y\}$ para todos $X, Y, Z \in TM$ entonces M es un espacio de curvatura constante.*

Demostración. Como hemos visto, en dimensión 2 los tensores de curvatura son siempre de la forma $R(X,Y)Z = k(X \wedge Y)Z$. Luego la hipótesis implica que el tensor de curvatura $R(X,Y)Z$ de M satisface $R(X,Y)Z = k(Z)(X \wedge Y)Z$ donde k podria depender de Z. Usando la linealidad resulta que k solo depende del punto $p \in M$ y no del vector $Z \in T_pM$. Es decir, $R(X,Y)Z = k(p)(X \wedge Y)Z$ y como $dim(M) \geq 3$ resulta k constante i.e. Lema de Schur, que a su vez es consecuencia de la II identidad de Bianchi (ver [KNI]). ☑

Observemos que la hipótesis del teorema de Beltrami implica la existencia de "muchas" subvariedades totalmente geodésicas (i.e. cuyas geodésicas son las del espacio ambiente). Esto fuerza a que el espacio ambiente M sea de curvatura constante. La siguiente proposición se encuentra en el libro de M. Spivak [Sp3], si bien la demostración que damos aquí es ligeramente diferente.

Corolario 12. *Sea (M^n, g) $(n \geq 3)$ una variedad riemanniana. Si para todo 2-plano $\pi_p \subset TM$ existe una subvariedad totalmente geodésica $N \subset M$ tangente a π_p i.e. $T_pN = \pi_p$, entonces M es un espacio de curvatura constante.*

Demostración. Una subvariedad $N \subset M$ es totalmente geodésica si y solo si $D_XY \in TN$ si $X, Y \in TN$, donde D es la conexión de Levi-Civita de M. A partir de esto es sencillo concluir que para cualesquiera X, Y, Z se tiene $R(X,Y)Z \in span\{X,Y\}$ y el corolario sigue de la proposición anterior. ☑

Claramente si $n \geq 3$ entonces el teorema de Beltrami es simplemente un consecuencia del corolario anterior.

A continuación damos una demostración alternativa que incluye el caso $n = 2$ usando observaciones simples sobre conexiones afines i.e. conexiones en el fibrado tangente de una variedad.

Comentario 13. *La existencia de muchas subvariedades totalmente geodésicas en una variedad lorentziana implica en general un alto grado de simetria, ver por ejemplo* [Zeg, Prop. 3].

Conexiones afines planas sin torsión y el teorema de Beltrami. Recordemos la correspondencia entre sistemas de coordenadas y conexiones afines planas sin torsión de la que he hablado en una sección precedente. Es decir, si tenemos un sistema de coordenadas $\{x_1, \ldots, x_n\}$ podemos introducir una conexión afín plan sin torsión ∇ simplemente definiendo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$. Es decir como la derivada usual en este sistema de coordenadas. Claramente las "geodésicas" de ∇ son lineas rectas cuando las escribimos respecto de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Recíprocamente, recordemos la Proposición 5: si ∇ es una conexión flat sin torsión entonces ∇ es de la forma anterior, es decir, existen coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ tales que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$.

Un hecho conocido en la teoria de conexiones afines es que la diferencia entre dos conexiones es un tensor. Resumimos estas propiedades en la siguiente proposición.

Proposición 14. *Sean D y ∇ dos conexiones afines sin torsión de la variedad M. Entonces $D_XY - \nabla_XY = S(X,Y)$ donde S es un tensor simétrico de tipo $(0,2)$. Mas aún, si las geodésicas de ambas conexiones coinciden como subconjuntos de M entonces existe una 1-forma $\omega(X)$ tale que $S(X,Y) = X\omega(Y) + Y\omega(X)$.*

Demostración. Dejamos la verificación de que S es un tensor y simétrico al lector. Recordemos que una curva $\gamma(t)$ es una geodésica respecto de D si $D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$. Como no nos interesa la parametrización de γ podemos solamente pensar que $D_{\gamma'(t)}\gamma'(t)$ es proporcional a $\gamma'(t)$. Entonces como S es simétrico la identidad polar permite recuperar S a partir de la diagonal i.e. a partir de los valores de la forma cuadrática $S(X,X)$. Si asumimos que D y ∇ poseen las mismas geodésicas entonces concluimos que $S(X,X)$ es proporcional a X i.e. $S(X,X) = \omega(X)X$. Luego polarizando obtenemos el resultado deseado. ☑

Usando esta proposicion obtenemos una nueva demostración del teorema de Beltrami.

Demostración general del teorema de Beltrami. Asumamos entonces que existen las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ en las cuales las geodésicas son líneas rectas. Sea entonces ∇ la conexión afín plana sin torsión que genera este sistema de coordenadas. Llamemos D a la conexión de Levi-Civita de (M,g). Existe entonces una 1-forma $\omega(X)$ tal que

$$\nabla_X Y = D_X Y + X\omega(Y) + Y\omega(X).$$

Esta ecuación nos permite calcular el tensor de curvatura R^∇ de ∇ en función de D y de ω obteniendo (simplemente calcular R^∇ usando la definición en términos de derivada covariante):

$$\begin{aligned} R^\nabla(X,Y)Z = R^D(X,Y)Z &+ d\omega(X,Y).Z \\ &+ X.\{\omega(D_Y Z) - Y\omega(Z) + \omega(Y)\omega(Z)\} \\ &+ Y.\{\omega(D_X Z) - X\omega(Z) + \omega(X)\omega(Z)\}. \end{aligned}$$

Naturalmente que sabemos que $R^\nabla(X,Y)Z$ es idénticamente cero pues ∇ es plana. Deducimos entonces que el tensor de curvatura de Riemann $R = R^D$ satisface:

$$\begin{aligned} R(Y,X)Z = &\, d\omega(X,Y).Z \\ &+ X.\{\omega(D_Y Z) - Y\omega(Z) + \omega(Y)\omega(Z)\} \\ &+ Y.\{\omega(D_X Z) - X\omega(Z) + \omega(X)\omega(Z)\}. \end{aligned}$$

Observemos que ω es cerrada, i.e. $d\omega = 0$. En efecto, si Z es paralelo en un punto $p \in M$ i.e. $D_{T_pM} Z = 0$ con $Z_p \in nucleo(\omega)$ entonces tomando producto interno en ambos miembros contra Z_p obtenemos $d\omega(X,Y) = 0$. La existencia de campos Z paralelos en un punto en una dirección arbitraria se sigue usando por ejemplo coordenadas geodésicas.

La identidad anterior se convierte entonces en:

$$\begin{aligned} R(Y,X)Z = &\, X.\{\omega(D_Y Z) - Y\omega(Z) + \omega(Y)\omega(Z)\} \\ &+ Y.\{\omega(D_X Z) - X\omega(Z) + \omega(X)\omega(Z)\}. \end{aligned}$$

Observemos que esta identidad implica $R(X,Y)Z \in span\{X,Y\}$ y si $dim(M) \geq 3$ entonces el teorema de Beltrami se sigue de la Proposición 11.

Podemos entonces concentrarnos, como hizo Beltrami, en el caso de una superficie, i.e. $dim(M) = 2$.

Recordemos que toda 1-forma $\omega(X)$ es igual a tomar producto interno contra un campo. Sea entonces H el campo vectorial que realiza $\omega(X)$, i.e. $\omega(X) = \langle X, H\rangle$. Recordemos también que $R(X,Y)Z = \kappa(X \wedge Y)Z$, donde κ es la curvatura de Gauss. Podemos usar esta identidad para obtener:

$$\kappa X = D_X H - \langle X, H\rangle H, \tag{3}$$

para todo vector $X \in TM$.

Antes de seguir recordemos que estamos trabajando localmente. Entonces podemos usar que tenemos definida en nuestra superficie una estructura compleja J. Usando la ecuación anterior para calcular las derivadas covariantes $D_{JH}H$ y $D_H H$ resulta el siguiente lema.

Lema 15. *En las condiciones anteriores se tiene*

$$\langle R(JH,H)H, JH\rangle = -d\kappa(H)\|H\|^2 + \kappa\|H\|^4.$$

y como consecuencia

$$d\kappa(H) \equiv 0.$$

Si introducimos un sistema de coordenadas ortogonales (x,h), i.e. $ds^2 = Adx^2 + Bdh^2$ donde $\frac{\partial}{\partial h} = H$ el lema anterior implica que la curvatura de Gauss κ depende solo de x i.e. $\frac{\partial \kappa}{\partial h} \equiv 0$.

Finalmente, si calculamos la derivada covariante $D_{\frac{\partial}{\partial h}} \frac{\partial}{\partial h}$ usando la ecuación (2) obtenemos:

$$D_{\frac{\partial}{\partial h}} \frac{\partial}{\partial h} = \frac{-B_x}{2A}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{B_y}{2B}\frac{\partial}{\partial h}.$$

De la ecuación (3) se sigue $B_x \equiv 0$ y en general:

$$(\kappa(x) + B(h))\frac{\partial}{\partial h} = D_{\frac{\partial}{\partial h}} \frac{\partial}{\partial h} = \frac{B_h}{2B}\frac{\partial}{\partial h},$$

es decir $\kappa(x) + B(h) = \frac{B'(h)}{2B(h)}$.

De donde se sigue el Teorema de Beltrami. Es decir, la curvatura de Gauss κ tampoco depende de x y por lo tanto es constante. ☑

Comentario 16. *Como hemos observado anteriormente las coordenadas sobre una esfera que provienen de la proyección central a un plano tangente tienen la propiedad de que las geodésicas son líneas rectas. Usando una esfera de radio* 1 *centrada en el punto* $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ *y la proyección central al plano (tangente)* xy *no es difícil calcular que la* 1*-forma* ω*, que se introduce en la anterior demostración, es:* $\omega = d(2log(1 + x^2 + y^2))$ *i.e.* H *es el gradiente (visto sobre la esfera) de la función* $2log(1 + x^2 + y^2)$.

Referencias

[BCO] J. BERNDT, S. CONSOLE AND C. OLMOS, *Submanifolds and Holonomy (Research Notes in Mathematics Series)*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.

[Bel] E. BELTRAMI, Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Ann. Mat.* **1**, no. 7 (1865), 185–204.

[Ber] M. BERGER, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Car] E. CARTAN, *Lecons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[ChEb] J. CHEEGER AND D. EBIN, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1975.

[DiS] A. J. DI SCALA, On an assertion in Riemann's Habilitationsvortrag, *Enseign. Math.* **47** no. 1-2 (2001), 57–63.

[Eis] L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, 2ed, Princeton University Press, Princeton, 1949.

[KNI] S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Vol. **1**, Interscience Publishers, New York, 1963.

[HeLi] E. HEINTZE AND X. LIU, Homogeneity of infinite dimensional isoparametric submanifolds, *Ann. of Math.* **149** no. 1 (1999), 149–181.

[Mat] V. S. MATVEEV, *Geometric explanation of the Beltrami Theorem*, Internet (2003).

[MoOl] B. MOLINA AND C. OLMOS, Manifolds all of whose flats are closed, *J. Differential Geom.* **45** no. 3 (1997), 575–592.

[Mil] J. MILNOR, On the existence of a connection with curvature zero, *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), 215–223.

[Olm] C. OLMOS, A geometric proof of Berger holonomy theorem, *Ann. of Math.* **161** no. 1 (2005), 579–588.

[Sp2] M. SPIVAK, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. **2**, 2nd ed, Perish, Inc., Berkeley, California, 1979.

[Sp3] M. SPIVAK, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. **3**, 2nd ed, Publish or Perish, Inc., Berkeley, California, 1979.

[Ste] P. STEFAN, Accessible sets, orbits, and foliations with singularities, *Proc. London Math. Soc.* **29** (1974), 699–713.

[Zeg] A. ZEGHIB, Remarks on Lorentz symmetric spaces, *Compositio Math.*, **140** (2004), 1675-1678.

(Recibido en febrero de 2005. Aceptado en noviembre de 2005)

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
POLITECNICO DI TORINO
CORSO DUCA DEGLI ABRUZZI 24, 10129 TORINO
ITALY
e-mail: `antonio.discala@polito.it`