

# El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas

Por  
Carlos E. Vasco Uribe

---

### 1. Los nuevos programas de la Renovación Curricular

El lunes cuatro de febrero más de tres millones de niños colombianos empezaron a regresar a las aulas escolares de la educación básica primaria en todo el país. Según el Decreto 1002 del 24 de abril de 1984, reglamentado en noviembre pasado, por lo menos los dos primeros grados de primaria deberían comenzar con nuevos programas en todas las áreas: la Renovación Curricular empezaba su marcha gradual en todo el territorio colombiano. En los años siguientes, los nuevos programas empezarán a regir grado por grado hasta cubrir los once grados de la educación básica y media vocacional.

Como de costumbre, tanto los niños como los maestros consideran que las matemáticas son lo más difícil que tienen que estudiar o enseñar, y muchos de los padres de familia empiezan a inducir más o menos conscientemente en sus hijos esta actitud de terror hacia las matemáticas que tan acertadamente bautizó Seymour Papert como "matofobia", la fobia hacia las matemáticas. Por esta razón, los nuevos programas de matemáticas han sido escudriñados con atención y seriedad crítica por dos grupos de profesores de la Universidad Nacional, quienes ya desde 1981 han dado sus conceptos sobre las versiones iniciales de estos programas, y han generado a través de sus intervenciones una revisión seria de esas versiones. La Universidad Nacional me asignó des-

de 1978 la misión de colaborar como asesor del Ministerio de Educación Nacional en la elaboración del nuevo programa de matemáticas, y considero que esa actitud seria y crítica de los colegas ha sido de capital importancia para poder presentar a los niños colombianos un nuevo programa de matemáticas que responda a sus necesidades e intereses, y que incorpore en lo posible los avances de la ciencia cognitiva y de las reformulaciones actuales de las matemáticas.

En este artículo me propongo presentar el enfoque teórico que subyace a dicho programa, enfoque que considero mucho más importante que los pocos cambios de contenidos que se han incluido en él.

Antepondré algunas consideraciones generales sobre la Renovación Curricular que se adelanta desde 1976, y sobre el permanente debate entre los partidarios de la "Nueva matemática" ("New Math") y los partidarios de volver a lo básico ("Back to Basics"), dentro del cual se enmarca el enfoque propuesto para los programas de primaria y secundaria en el área de matemáticas.

### 2. La Renovación Curricular

Después de la Segunda Guerra Mundial empezó a imponerse en los Estados Unidos la escuela conductista en psicología y la correspondiente tecnología educativa en la pedagogía, hasta el punto en que otras escuelas psicológicas fueron declaradas anticientíficas por los psicólogos

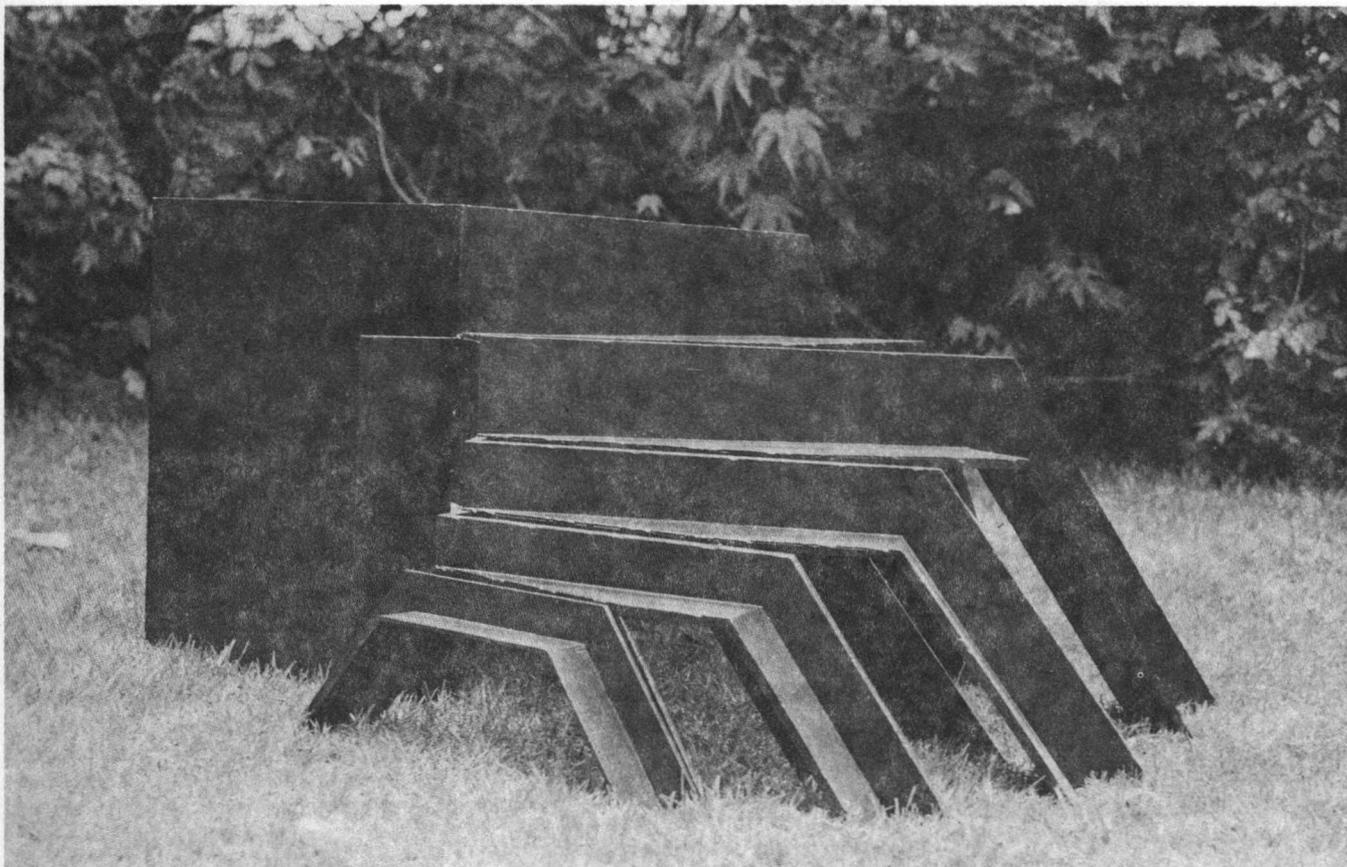
conductistas, y otras ideas pedagógicas fueron declaradas anticuadas y metafísicas por los tecnólogos educativos.

En la década de la Alianza para el Progreso empezó a imponerse también en nuestro país el análisis experimental de la conducta de corte skinneriano en todas las facultades de psicología y de educación, y la tecnología educativa derivada de ella empezó a dominar las didácticas generales y especiales y a desplazar la pedagogía de todas las facultades de educación y las escuelas normales. Se creía que el enfoque funcionalista propugnado por la tecnología educativa conductista era la panacea para curar todos los males de la educación.

Ya los programas para la educación primaria promulgados por el Decreto 1710 de 1963 fueron diseñados con el estilo de objetivos generales y objetivos específicos conductuales que se exigía como el único científico en la educación.

Este mismo estilo de diseño se utilizó para el improvisado decreto 080 de 1974, que cambió de un plumazo todos los programas de secundaria.

Dos años más tarde, la administración López Michelsen expidió el Decreto-Ley 088 de 1976, que separaba los aspectos administrativos del Ministerio de Educación, de los aspectos académicos, que fueron asignados a una nueva Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos, alejada físicamente de la sede administrativa de las demás dependencias del Ministerio de Educación. El largo nombre de esta nueva dependencia indicaba claramente cuáles eran las tres estrategias de mejoramiento cualitativo de



“Arquitectura insecto”. 1980 aprox. Altura 0.60 mts.

la educación: primero, la capacitación del magisterio; segundo, la renovación curricular, y tercero, la disponibilidad de medios educativos.

No se hablaba sólo de renovación de programas, sino de una renovación más amplia, que cubriera los programas y otros aspectos del currículo como proceso complejo de enseñanza-aprendizaje que considera los factores ambientales que influyen en la educación de los niños y jóvenes.

Como primera Directora General fue nombrada Pilar Santamaría de Reyes, y como primera Jefe de la División de Currículo Formal fue designada Clara Franco de Machado. El Dr. Carlo Federici Casa, del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional, fue comisionado como asesor para los programas de matemáticas y ciencias naturales. Una primera versión de los programas elaborados por la División de Currículo Formal fueron experimentados en varias escuelas de la mayoría de los de-

partamentos del país, y se pensó que podría iniciarse una expansión de dichos programas después de algunas revisiones. Con este motivo se expidió el Decreto 1419 de 1978, que iniciaba la reforma educativa en la que actualmente nos encontramos.

En ese mismo año de 1978 empecé a colaborar con la Dirección General en la elaboración de los programas de matemáticas, en calidad de asesor de tiempo parcial, por comisión de la Universidad Nacional al Ministerio de Educación. Con un grupo de técnicos de dicha Dirección General empecé a revisar los programas de primero a tercer grado, y consideré esencial para dicha revisión la elaboración de un marco teórico global que permitiera precisar los criterios con los cuales se debería hacer la revisión y el diseño de los programas de los nueve grados de la educación básica.

Para mediados de 1981 estaban ya elaborados tanto el marco teórico como los programas de todas las áreas para los cin-

co grados de primaria, en una versión experimental suficientemente desarrollada para ser sometida a la crítica de expertos antes de expandir los programas a todo el país. En agosto de 1981 se enviaron los programas de matemáticas y ciencias naturales a todas las facultades de educación y de ciencias naturales de las universidades, y se organizó un simposio nacional sobre enseñanza de las ciencias y las matemáticas.

Los debates del simposio obligaron a demorar la expansión de los programas hasta no hacer revisiones serias de los marcos teóricos y de los programas mismos, tanto en las dos áreas sometidas a debate como en las demás.

En 1983 y 1984 salieron publicados los Fundamentos Generales de los programas, los Marcos Teóricos y los programas detallados de primero y segundo grados, conocidos por el color de sus portadas como los libros azul, amarillo, rojo y verde, respectivamente. Con base en estos materiales y en la experimenta-

ción adelantada, se decidió iniciar la expansión de los nuevos programas con el Decreto 1002 de 1984, para comenzar en el calendario A en febrero de 1985 con los grados primero y segundo de primaria, y continuar con una aplicación gradual a los demás grados de la educación básica. Se trata pues de un proyecto de largo aliento, con ocho años de diseño y experimentación, y otros ocho años por lo menos para la expansión. Es uno de los pocos programas a largo plazo que han podido continuar a través de tres administraciones sucesivas y un considerable número de ministros, y que se espera continúe con la misma seriedad y visión de largo alcance.

### 3.

## “La Nueva Matemática” vs. “Volver a lo Básico”.

Durante las décadas de los años cuarenta y cincuenta se había desarrollado una ingente labor de sistematización de las matemáticas a través del lenguaje de la teoría de conjuntos y de la lógica matemática, liderada por el grupo que escribía con el seudónimo de “Nicolás Bourbaki”. Esta reestructuración bourbakista de las matemáticas sedujo a la comunidad matemática por su elegancia arquitectónica y por la unificación de lenguaje, hasta tal punto que se pensó abolir el plural “matemáticas” para hablar de una sola “matemática”.

Cuando el lanzamiento del “Sputnik” por la Unión Soviética espantó a los norteamericanos, se inició en los Estados Unidos una febril renovación de las ciencias naturales y las matemáticas con destino a la enseñanza básica y media, para preparar los futuros científicos que alcanzarán a los soviéticos en la carrera espacial. Numerosos programas experimentales de matemáticas fueron desarrollados por grupos de expertos, quienes creyeron encontrar en la teoría de conjuntos y la lógica matemática los medios más aptos para lograr que todos los niños tuvieran fácil acceso a las matemáticas más avanzadas. Empezó a surgir la llamada “Nueva Matemática”, y los textos de editoriales norteamericanos fueron traducidos casi al pie de la letra por españoles, mexicanos y argentinos, y ese estilo de enseñar matemáticas a través de los conjuntos y la lógica empezó a invadir la educación primaria y secundaria. Hasta los padres de familia con carreras profesionales en ingeniería, administración,

economía, etc., encontraban imposible ayudar a sus hijos pequeños en las tareas escolares de matemáticas, plagadas de símbolos lógicos y conjuntistas y hasta con crípticas operaciones numéricas en bases distintas a la decimal usual.

En lugar de las familiares tablas de multiplicar, la contraportada de los cuadernos escolares empezó a incorporar tablas de propiedades de las operaciones entre conjuntos, y los niños empezaron a memorizar nombres tan difíciles como asociatividad, conmutatividad y distributividad, olvidando las tablas de multiplicar y entendiendo muy poco o nada de los conceptos ocultos tras nombres tan deslumbrantes.

Ya desde el comienzo de la “New Math” en los Estados Unidos empezaron las voces de protesta por este cambio en la enseñanza, y se inició el debate entre los partidarios de esta “Nueva Matemática” y los que querían que se volviera a lo básico: las cuatro operaciones con enteros, fraccionarios y decimales. Este movimiento “Back to Basics” encontró defensores entre los matemáticos más calificados, entre los maestros y entre los padres de familia. “Por qué Juanito no sabe sumar” fue el título del libro de Morris Kline que se volvió proverbial entre los partidarios de “Volver a lo Básico”. En efecto, muchos niños aprendían muchas palabras raras, aprendían operaciones entre conjuntos y símbolos lógicos, y no podían hacer operaciones entre fraccionarios.

Los maestros de escuela del Japón rechazaron los conjuntos, y muchos maestros colombianos empezaron a quejarse con razón de que a los niños les estaba dando “conjuntivitis”. Cada cual adoptó alguna posición intermedia entre la matemática conjuntista y la numérica, y el debate continuó a todos los niveles. Los franceses y los holandeses revisaron los programas de matemáticas elementales para matizar el uso de los conjuntos, y la lógica matemática se ubicó en los últimos años de la educación media. Pero en el fragor del debate, que en Colombia se dió muy tardíamente (como tantos otros debates), parecía olvidarse la fijación de criterios teóricos que permitieran tomar decisiones que no se dejaran influenciar por una u otra moda, y que permitieran aprovechar lo mejor de las dos corrientes en pugna.

El enfoque propuesto para los programas de matemáticas de la Renovación Curricular pretende superar las limitaciones de las dos escuelas mencionadas, y ofrecer esos criterios teóricos que permitan la to-

ma de decisiones. Hasta qué punto pueda lograrse dicha síntesis, y hasta qué punto pueda plasmarse dicho enfoque en unos programas concretos con sus sugerencias de actividades y metodología, es el desafío que se propone a la discusión de los maestros, alumnos, padres de familia y demás personas interesadas en la educación matemática de los niños colombianos.

### 4.

## Psicología Conductista vs. Psicología Cognitiva

Una primera revisión teórica que hubo que hacer en los nuevos programas de la Renovación Curricular fue la de los fundamentos psicológicos. Durante las primeras versiones se había seguido el marco conductual, con algunas variantes introducidas por los neo-conductistas, sobre todo Robert Gagné. Las críticas a esta corriente del análisis experimental de la conducta y la tecnología educativa derivada de ella se referían a la atomización de las conductas con sentido global en micro-conductas aisladas, cada una de las cuales era buscada a través de un objetivo específico y una actividad diferente, hasta lograr reconstruir la conducta global a partir de estos pasos específicos. Se anotó también la ausencia de reflexión y comprensión de los procesos diseñados centralmente, que se consideraban como automáticamente eficaces sin necesidad de que ni el maestro ni el alumno comprendieran el porqué de tales actividades. Se cuestionó el posible efecto de mero adiestramiento, casi diríamos de domesticación, que se produciría si sólo se atendía a las conductas terminales, y a la dependencia de estímulos y refuerzos externos que produciría la programación de las intervenciones de los maestros y las evaluaciones llamadas “objetivas” con sus correspondientes ciclos de realimentación.

Parecidas críticas se habían elevado ya en la misma Universidad de Harvard, en donde Skinner formaba generaciones de analistas experimentales de la conducta: Jerome Bruner criticó desde los años cincuenta esta parcialización de la psicología educativa al conductismo, y defendió la necesidad de tener en cuenta aspectos cognitivos de comprensión y reflexión, y aptitudes globales de resolución de problemas. Además de la escuela cognitiva norteamericana, también la escuela soviética de Vygotsky, Luria, Gal’perin y Ru-

binshtein tomaba caminos diferentes, insistiendo en la necesidad de generar procesos de análisis y síntesis, de abstracción y generalización, de partir de las actividades infantiles y de la inmersión social de esas actividades que debería mediar a través del lenguaje y la intervención de los adultos. En Ginebra y París, la escuela cognitiva de Jean Piaget había estado desarrollando desde los años veinte una serie de ideas fecundas que constituyen la psicología y la epistemología genéticas, de profundas consecuencias para la pedagogía, así en su formulación inicial no hubieran tenido en cuenta los aspectos didácticos.

El análisis experimental de la conducta y la tecnología educativa asociada con él había tenido éxito en incrementar el aprendizaje de información verbal y de destrezas de rutina, y había reducido la teoría del aprendizaje a una mera constatación de regularidades estadísticamente observables en la modificación de las conductas y su estabilización a través de refuerzos oportunos suministrados. Las escuelas cognitivas reivindicaban la necesidad de volver a utilizar modelos estructurales, de tener en cuenta fenómenos mentales, de buscar la comprensión y la reflexión en los alumnos, y de seguir los procesos de maduración y construcción que ocurren en periodos o etapas relativamente bien diferenciados. Fue necesaria una reflexión y discusión entre los técnicos de la Dirección General, para incorporar estas ideas al diseño de los programas y a la capacitación del magisterio.

En un primer momento, las consideraciones cognitivas apenas se yuxtaponían a las conductuales, y en muchas de las versiones de los programas de varias áreas podría hablarse más bien de "híbridos" que de verdaderas síntesis. Sin embargo, no considero que los procesos de hibridación sean condenables; a ellos debemos la "revolución verde" y las mejores variedades de granos y cereales, de reses y ganado menor, y no puede excluirse de antemano que un híbrido pedagógico sea mejor que ciertos purismos defendidos por los teóricos con menor contacto con experiencias pedagógicas concretas. No se trata de hacer la apología de los eclecticismos, sino de considerar algunos de ellos como etapas en un proceso de verdadera síntesis creativa.

Este mismo purismo trata de excluir toda tecnología educativa, todo análisis de tareas y todo objetivo específico de las consideraciones pedagógicas y didácticas. También me parece que esa posición de-

pende de una identificación de la tecnología educativa con la tecnología instruccional de corte conductista. Según la conceptualización del ciclo tecnológico elaborada por el Profesor Carlo Federici, todo progreso en la ciencia que produzca un mejoramiento en las prácticas y en las técnicas debe llamarse tecnológico: en vez de producirse ese mejoramiento por mero ensayo y error, se produce a través de la "logía", del "logos" científico. Por lo tanto, así como hay tecnología conductista, podría en principio desarrollarse una tecnología cognitiva que propusiera técnicas didácticas enriquecidas por los hallazgos de la ciencia cognitiva. Ya se han desarrollado algunas de ellas, por ejemplo en las llamadas "técnicas para aprender a pensar" y en las técnicas de manejo de las preguntas y respuestas de los alumnos. Igualmente, aunque el mismo Piaget no se refiriera expresamente a las implicaciones pedagógicas de sus ideas epistemológicas y psicológicas, y aun considerara como una típica preocupación norteamericana la de acelerar los procesos cognitivos, animó a muchos de sus discípulos a estudiar las consecuencias didácticas de estas mismas ideas. Inhelder, Sinclair y Bovet entre sus colaboradoras inmediatas, y sus discípulas catalanas Montserrat Moreno y Genoveva Sastre, han desarrollado una serie de tecnologías cognitivas conocidas como "pedagogía operatoria".

Este nombre se refiere a lo que Piaget consideraba como la clave del conocimiento: las acciones interiorizadas, reversibles y coordinadas que llamaba operaciones mentales. Así, después de unos dos años de conocimientos predominantemente sensorio-motrices, el niño entra en un período pre-operatorio que puede durar de tres a cinco años, durante el cual inicia la interiorización, la reversibilización y la coordinación de sus acciones, y al llegar a la edad escolar (o al "uso de razón" como decían nuestros mayores), inicia un período en que conoce predominantemente a través de operaciones concretas. Hacia los once o doce años, algunos niños empiezan a desarrollar operaciones formales en distintas áreas del conocimiento, a perfeccionar y generalizar sus procedimientos cognitivos, y entre los 14 y 16 años entre los jóvenes europeos, y entre los 16 y los 18 años entre los jóvenes colombianos, una buena parte de ellos llegan a estabilizar esas operaciones formales de pensamiento abstracto, de procedimientos hipotético-deductivos, de manejo de las probabilidades y la combinatoria completa y de elaboración de operaciones sobre operaciones que posi-

bilitan la construcción y reconstrucción de las matemáticas y las ciencias naturales modernas.

Por estas razones, y por los datos proporcionados por algunas investigaciones iniciales, se ha propuesto como una de las metas generales del programa de matemáticas el desarrollo del pensamiento formal en los alumnos de secundaria, pero se ha asumido que prácticamente todos los alumnos de los nueve grados de la educación básica van a encontrarse en un período en donde predominan las operaciones concretas. Por eso se aconseja partir de materiales y juegos, ejercitar la actividad manual y mental de los alumnos, y considerar las operaciones mentales como más importantes que los mismos elementos concretos y las acciones manuales sobre ellos.

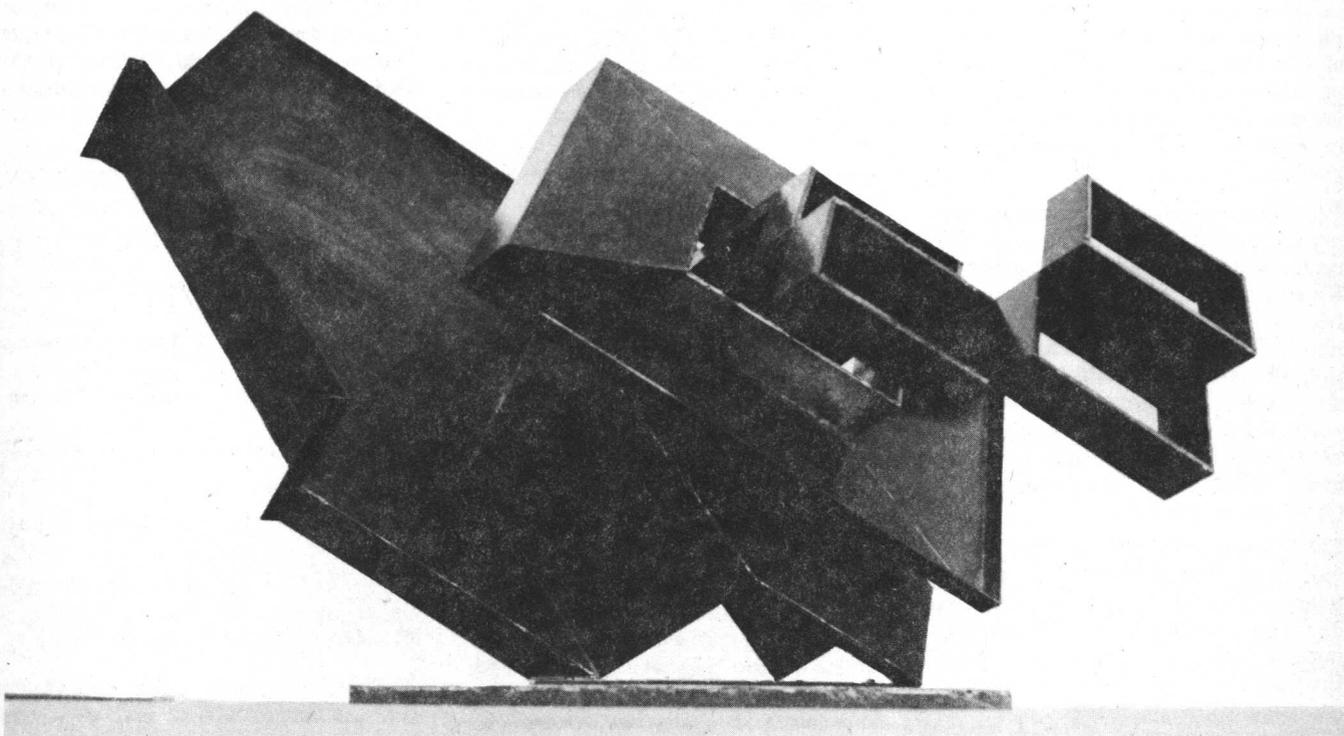
## 5.

### El enfoque de sistemas

El aprendizaje memorístico de los conjuntos por parte de los niños llevó a plantearse el siguiente interrogante: ¿Será que los niños no se encuentran con conjuntos sino con sistemas?

Los números naturales 0, 1, 2, 3, ... no son tan desordenados y "suelos" como cree la teoría de conjuntos: están ordenados de manera muy precisa, y poseen una serie de operaciones como la de pasar al siguiente, la de devolverse al anterior, la de sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a potencias, extraer raíces y sacar logaritmos. Esos elementos que son los números naturales, esas operaciones, que ya no son cuatro sino nueve, y esas relaciones de orden aditivo, multiplicativo y potenciado, entre otras, son las que conforman el sistema de los números naturales de la aritmética elemental. Los niños del salón de clase no solo forman un conjunto: hay entre ellos múltiples relaciones, y suceden entre ellos muchas acciones, transformaciones y procesos. Forman más bien un sistema, y bien complejo por cierto. Las flores, las hojas, las abejas, las lombrices y la tierra no forman un conjunto de objetos, sino un pequeño sistema ecológico, las letras, morfemas, palabras, expresiones, frases, párrafos y capítulos de un libro no forman conjuntos sino sistemas muy estructurados. Las personas, grupos, partidos, empresas y estamentos sociales no forman meros conjuntos de personas, sino complejos sistemas socio-políticos.

Los conjuntos han perdido ya esas relaciones y esas operaciones que los hacían



“Orquídea”, 1978. Altura 0.85 mts.

interesantes. Son los cadáveres de los sistemas.

El marco teórico del programa de matemáticas propone al maestro para la preparación de su clase enfocar los diversos aspectos de las matemáticas como sistemas y no como conjuntos. Para simplificar, lo he llamado “enfoque de sistemas”, a riesgo de confundirlo con la moda de los años sesenta, de yuxtaponer a los títulos de los libros el estribillo “A systems approach”. No se trata de un enfoque funcionalista al estilo de los servomecanismos que se estudiaban en esa época. Tampoco se trata de la introducción de los computadores en la escuela. Nuestras divisas están muy escasas para pensar en importar computadores para cada aula, y ni siquiera para cada escuela. Sería hacerse ilusiones pensar que como lo pueden hacer unos pocos colegios de clase alta, o algunos institutos experimentales con ayuda extranjera, no siempre desinteresada, las escuelas públicas van a tener computadores, cuando no tienen tiza, máquinas de escribir o calculadoras

de mano (para no hablar de las que no tienen ni pupitres ni tableros).

Se trata de acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos, con un enfoque sistémico que los comprenda como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones.

## 6.

### El primer análisis de un sistema matemático

Supongamos que el profesor ha decidido trabajar con sus alumnos alrededor de un sistema matemático como el que acabamos de ver de los números naturales de la aritmética. Según el grado y la edad de sus alumnos decide hasta qué números va a considerar, cuáles operaciones va a ejercitar y qué relaciones son pertinentes. Una vez delimitado en primera aproximación el sistema que quiere estudiar con sus

alumnos, el enfoque del programa le propone al docente un primer análisis: distinguir cuidadosamente entre el sistema simbólico que se escribe, se pinta o se habla, y el sistema conceptual que se piensa, se construye, se elabora mentalmente. Lo único que nos pueden ofrecer los libros de matemáticas, los tableros, los cuadernos y hasta los profesores, son sistemas simbólicos: signos, números pintados, gráficos, palabras, figuras, símbolos.

Es tal la ubicuidad de los sistemas simbólicos, que hasta algunos filósofos de las matemáticas han pensado que éstas se reducen a los juegos formales con sistemas simbólicos. Los filósofos formalistas nos llevaron pues a confundir las matemáticas con el manejo de los símbolos matemáticos. Y muchos profesores creen que el manejo de las operaciones simbólicas o algoritmos de las cuatro operaciones con enteros y fraccionarios constituyen la aritmética. En los grados 8o. y 9o. (tercero y cuarto de bachillerato), miles de profesores se contentan con llenar tableros con símbolos algebraicos y asignar

problemas de Baldor sin contenido conceptual ninguno ni posibilidad de aplicación concreta. La geometría se redujo a dibujos complicados con líneas auxiliares, prolongaciones y cortes, acompañados de sartas de símbolos que pretendían ser demostraciones de teoremas. No faltaron alumnos de memoria prodigiosa que se aprendieron separadamente los dibujos y las sartas de símbolos y obtuvieron notas excelentes en una asignatura que ignoraban.

Pero todo buen maestro ha sabido siempre que lo más importante eran los conceptos detrás o debajo de los símbolos. Esperaba que a fuerza de ejercicios simbólicos "le entraran" los conceptos a sus alumnos. En muchos casos tuvieron éxito en empujar hacia abajo los conceptos a partir de los símbolos. Pero en la mayoría de los casos sólo lograron generar la "matofobia" mencionada. A muchos niños "no les entra" la matemática, decían estos maestros.

El enfoque del programa propone que debajo de los sistemas simbólicos y conceptuales se busquen otros sistemas ya olvidados por los adultos, de donde los niños pueden sacar los conceptos esperados. Esos sistemas matemáticos, o al menos prematemáticos, de donde pueden construirse esos conceptos, se llaman en este enfoque "sistemas concretos". Ya las aritméticas antiguas al estilo Bruño distinguían entre los números concretos, como cinco pesos, y los números abstractos, como el cinco. La investigación de las habilidades extra-escolares de los niños ha mostrado asombrosas facilidades de manejo de sistemas concretos en niños que fracasan en la aritmética elemental de la escuela. Cuando la maestra está limitando sus ejercicios a los números de uno a nueve, los niños de las últimas bancas están intercambiando láminas o chocolatinas en mucho mayor número y calculando sus precios en cifras mayores de cien pesos. Pero si se les exige hacer los mismos cálculos en los sistemas simbólicos escolares, se sienten incapaces de hacerlos.

La sugerencia pedagógica del programa es la de explorar los sistemas concretos que ya utilizan los niños, para partir de ellos hacia la construcción de los sistemas conceptuales respectivos. El Profesor Hassler Whitney del Instituto de Estudio Avanzado de Princeton, presidente de la Asociación Mundial de Instrucción Matemática, me comunicó personalmente su investigación sobre la manera como los niños redescubren los procedimientos simbólicos o algoritmos de las operacio-

nes aritméticas a partir de los sistemas concretos monetarios. Replicando algunas de estas propuestas con niños colombianos, encontré que utilizando tapas de gaseosa como monedas de peso, tapas aplanadas como monedas de diez y papeletos como billetes de cien, los niños reconstruyen rápidamente el algoritmo de la adición y de la sustracción; encontré

sencilla sugerencia pedagógica en otras unidades didácticas.

Para fijar las ideas he utilizado un sencillo diagrama, que representa el sistema matemático con el que se quiere trabajar (o jugar) como un rayo de luz blanca que viene desde la izquierda. El primer análisis del sistema se representa por un pris-

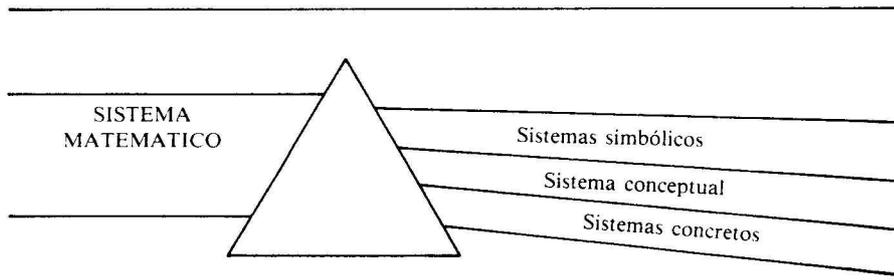


Figura 1

también que en vez de "prestar" y "llevar", los niños encuentran más natural hablar de "descambiar" y "cambiar" la moneda de diez o el billete de cien, sin necesidad de insinuárselo. En efecto, al decir que se debe "prestar" una decena para restar  $25 - 8$ , se presenta la curiosa situación de que esa decena prestada nunca se devuelve, muy al estilo de ciertos famosos financistas y banqueros colombianos. En lugar de prestar una decena, los niños buscan la manera de descambiar una de las dos monedas de diez, sacar los ocho pesos, y encontrar el resultado, que es una moneda de diez y siete pesos sueltos. Al sumar  $25 + 8$  quedan trece pesos sueltos, que se pueden cambiar por una moneda de diez, y quedan tres monedas de diez, o sea treinta pesos y tres pesos sueltos.

Con los técnicos del Ministerio de Educación y los maestros que han colaborado con la experimentación hemos explorado sistemas concretos o pre-matemáticos para la aritmética de los fraccionarios, para la geometría, los sistemas métricos, los sistemas de datos estadísticos, los sistemas lógicos, los sistemas de colecciones y los sistemas de relaciones y operaciones, desde el pre-escolar hasta la trigonometría y el cálculo de quinto y sexto de bachillerato (grados 10o. y 11o.). Es posible, agradable y motivador empezar a partir de esos sistemas concretos en la construcción conceptual. Al principio parece más lento, pero pronto viene el "despegue", y la diferencia en motivación y retención es suficiente para animar a los maestros a seguir ensayando esta

ma que se interpone en el camino del rayo de luz, y descompone el sistema en tres niveles: los sistemas simbólicos por encima, el sistema conceptual en el centro, y los sistemas concretos debajo: (Figura 1).

De éstos, ciertamente el más importante es el sistema conceptual; pero en vez de tratar de "bajar" a los conceptos desde los ejercicios de tipo simbólico, se trata de "subir" hacia ellos desde los sistemas concretos.

## 7.

### El segundo análisis de los sistemas matemáticos

Una vez encontrados los sistemas concretos de los cuales se va a partir en la construcción del sistema conceptual matemático, se le sugiere al maestro hacer un segundo análisis de cada uno de esos sistemas. Se espera que en cada uno de ellos encuentre unos objetos o componentes, llamados también elementos, que son de nuevo la capa más visible de cualquier sistema. Se podría creer que el sistema de los llamados "bloques lógicos", de los que alguien ha dicho acertadamente que no son ni bloques (pues son fichas prismáticas), ni lógicos (pues son plásticos), está formado por esos bloques o fichas. Esos son sólo los elementos. También parecería que los sistemas numéricos están formados por los números, o los geométricos por las figuras, las rectas, o los puntos. Pero esos son sólo los elementos.

Debajo de esos elementos hay que buscar lo más importante de ese sistema: las operaciones o transformaciones que corresponden a las actividades o acciones de los niños, manuales o mentales, y las relaciones, que corresponden a las semejanzas o diferencias, los ordenamientos y equivalencias, las correspondencias o nexos que existen o se pueden construir entre los elementos.

Si tenemos un sistema simbólico, como por ejemplo el sistema de numeración decimal para el sistema numérico conceptual de la aritmética elemental, el maestro encuentra que los diez dígitos de 0 a 9 son los elementos, tal vez con comas o puntos, que las operaciones son puramente gráficas como acercar o alejar, subir o bajar los elementos, y que las relaciones de contigüidad y de estar a la derecha o a la izquierda son definitivas en la comprensión del sistema simbólico.

En una primera versión de los programas se distinguía para los niños entre el sistema de numeración y el sistema numérico, y el número (que corresponde al concepto) y el numeral (que corresponde al símbolo). Por una acertada crítica de los colegas de la Universidad Nacional y de algunos maestros, se decidió dejar que la palabra "número" siga siendo ambigua, y pueda referirse al concepto o al símbolo, y se reservó para el maestro el estudio de esta distinción al preparar su clase, de tal manera que pueda responder preguntas como "¿Cuántas cifras tiene el diez?" (¡Dos en nuestro sistema de numeración decimal, y una en el sistema de numeración romana: X; en el sistema binario de los computadores tiene cuatro cifras!).

En el sistema conceptual ya se habría hecho una delimitación de los elementos, las operaciones y las relaciones, y en este momento del segundo análisis se trata de precisar esas tres capas y su relación con los sistemas simbólicos respectivos. Puede haber varios sistemas simbólicos para el mismo concepto, como se ha visto en el caso de los números naturales en sus sistemas de numeración decimal, romana y binaria, y como puede verse en los fraccionarios, que pueden simbolizarse con quebrados como  $1/2$ , con decimales como 0.5, o con porcentajes como 50%. Si se comprende el concepto, es fácil traducir de uno a otro sistema simbólico. Si no, sería como tratar de traducir del ruso al chino sin comprender ninguno de los dos. Por eso el profesor de primero o segundo de bachillerato (6o. y 7o. grado) puede pasarse dos meses en los quebrados, dos en los decimales y dos en los porcentajes, sin que la mayoría de los niños cai-

ga en la cuenta de que se trata de tres sistemas simbólicos para el mismo concepto de operador fraccionario que achica o agranda las magnitudes.

En forma análoga, el maestro puede distinguir en los sistemas concretos los objetos o elementos materiales, las opera-

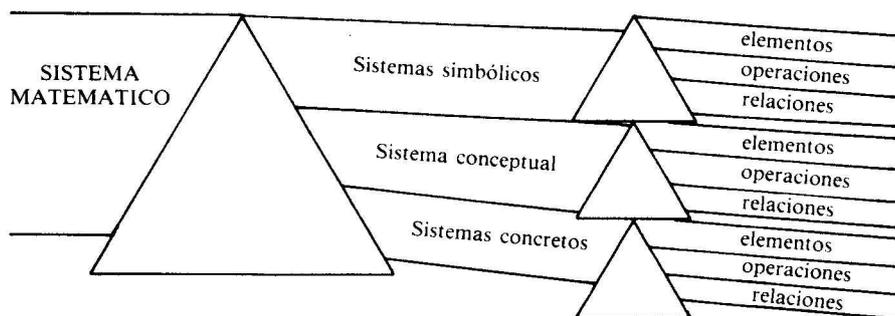


Figura 2

ciones o acciones manuales o mentales sobre ellos, y las relaciones entre los elementos. Los bloques lógicos están ligados por una serie de relaciones de semejanza y diferencia de tamaño, forma, color y espesor, y pueden agruparse activamente en forma figurativa para hacer trenes, torres o casitas, o para formar colecciones que llevan a un sistema conceptual de conjuntos. Pero tampoco los conjuntos o colecciones de bloques son lo más importante del sistema conjuntista: son las operaciones de reunión y separación, y luego las de intersección y complementación, además de las relaciones de inclusión, de disyunción, de ser más o menos o lo mismo de numerosos que tienen esos conjuntos o colecciones lo que realmente interesa en la construcción de las matemáticas. Este análisis de los sistemas concretos de colecciones que manejan los niños ha mostrado que ellos en general no aceptan que haya colecciones vacías ni colecciones de un solo objeto ("conjuntos unitarios"), hasta que sus juegos operatorios no los obliguen a reconocer que uno puede construir esas colecciones abstractas y añadirselas activamente a los juegos de colecciones para poder hacer complementos e intersecciones.

Para fijar estas ideas, he utilizado un complemento al diagrama correspondiente al primer análisis: a cada uno de los tres rayos de luz que salen del primer prisma se le interpone otro prisma pequeño que descompone de nuevo a cada uno de ellos en tres rayos o capas: los elementos, las operaciones y las relaciones: (Figura 2).

De estos últimos resultados del análisis de los sistemas matemáticos, el más importante es el de las operaciones o transformaciones, por corresponder a las actividades del niño, a la praxis. Las relaciones corresponden a la teoría, a la reflexión sobre resultados o restricciones a las operaciones, y los elementos son los menos importantes. Son intercambiables por otros si se conservan las relaciones y las operaciones. Podría decirse que el álgebra abstracta consiste precisamente en olvidarse o abstraer de la naturaleza de los elementos para poder concentrarse en la estructura de los sistemas: en sus relaciones y en sus operaciones.

No se trata pues de volver al lenguaje bourbakista de los conjuntos, de la lógica y de las estructuras. Se trata de superar el conjuntismo de la reconstrucción bourbakista, de separar de las estructuras lo activo de las operaciones y lo teórico de las relaciones, y de rescatar la manera como los niños (y la Humanidad) han construido las matemáticas en toda su variedad y riqueza.

En mi concepto, si a través de la capacitación, del estudio del marco teórico, de las sugerencias de actividades y metodología de los programas de matemáticas, y de la práctica de elaboración y desarrollo de unidades didácticas que partan de los sistemas concretos que ya manejan los niños, se logra que los maestros dominen estas simples sugerencias pedagógicas para la preparación de sus clases, tal vez no harían falta los nuevos programas de matemáticas.