SOBRE LOS METODOS EN LAS MATEMATICAS*

Por
Jesús Hernando Pérez

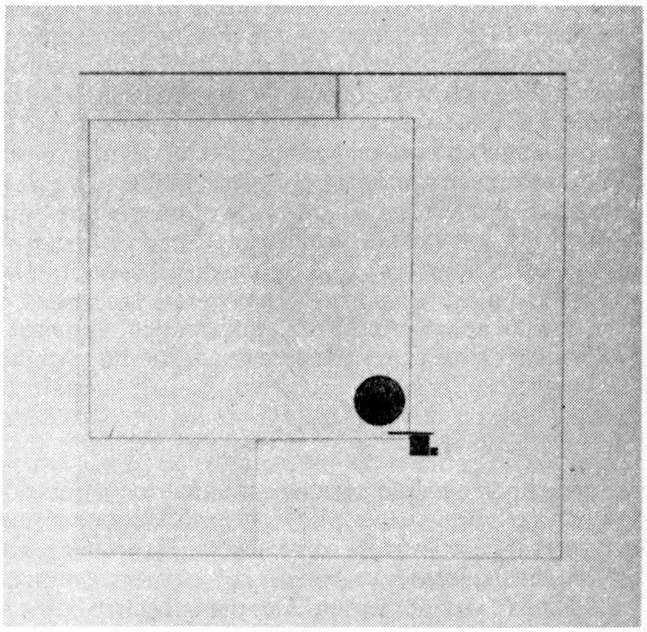
1. Introducción

Hablar o escribir sobre la metodología constituye un riesgo extraordinario por diversos motivos. Ante todo está el hecho de la complejidad y la diversidad de las cuestiones que pueden tratarse dentro de una disciplina cuyo propósito es el de estudiar los métodos de las diferentes ciencias. Como lo indica el título, limitaremos nuestra atención en este trabajo al caso de las matemáticas en sus aspectos metodológicos; pero aún así, la complejidad, profundidad y diversidad temática persiste y resulta más bien difícil si no imposible cualquier pretensión de abarcar incluso en forma superficial un panorama tan vasto. A lo anterior debemos añadir el hecho nada trivial de la presencia de diversos puntos de vista, cada uno con sus facetas tanto positivas como negativas, imposibles de mirar en forma completa y justa dentro de los alcances de un trabajo como éste, ubicado principalmente dentro de ciertos aspectos de la problemática particular de las matemáticas.

Sin embargo, la circunstancia especial que vivimos actualmente en nuestro país relacionada con la reforma de los programas para la enseñanza de las matemáticas en los primeros niveles y que ya está en sus inicios, nos ha impuesto la obligación de señalar, arriesgándonos, algunas opiniones muy generales pero fundamentales y que podrían aún ser consideradas antes de la imposición de la reforma definitiva. De todas maneras, las cuestiones que aquí señalaremos y que tienen implicaciones pedagógicas, se ubican en un espacio más general en el cual ha existido muy poca reflexión sistemática en nuestro país: el de la filosofía de las matemáticas.

2. Cuestiones históricas

Un hecho bastante corriente y popular es el de concebir las disciplinas matemáticas como eminentemente



Luis Fernando Bernal. Sin título. Collage. 35 × 35 cms. 1985

axiomático-deductivas y el de creer en la existencia de un "método matemático". El método deductivo empleado sin lugar a dudas por los matemáticos, proviene en lo fundamental de los antiguos griegos a quienes debemos otros aportes metodológicos menos conocidos y que han permanecido ocultos, gracias a esa imagen parcial y dominante que nos hemos formado según la cual existiría una metodología única en el trabajo de los matemáticos. Tratar de reivindicar los procedimientos inductivos dentro de la matemática es una tarea que le puede costar a quien lo haga si no la vida, como mínimo el repudio de un buen número de especialistas en matemáticas. Sin embargo, no se trata simplemente del viejo debate en torno a los métodos inductivo y deductivo, pues quien haya estudiado medianamente los trabajos de Aristóteles y otros autores entiende cómo es tal cuestión que por lo demás ha sido tratada con mucha atención y amplitud. La novedad del asunto estriba en escudriñar la presencia de otras me-

* Las ideas centrales de este trabajo fueron presentadas por primera vez públicamente, durante un seminario realizado en la ciudad de Tunja a lo largo del primer semestre de 1984.

todologías no solamente en las fuentes de las matemáticas sino también a lo largo de su desarrollo y aún en nuestros días. Para señalar otro ejemplo, mencionemos la también común idea de concebir las disciplinas matemáticas como precisas, rigurosas y al servicio exclusivo de las formas de pensamiento formal. Tal visión, parcialmente correcta y muy relacionada con la imagen deductivista, pasa por encima de las realidades histórica y contemporánea, plagadas de estilos de razonamientos difusos, flexibles e informales mas no por ello incorrectos. Pero para no extendernos demasiado en este trabajo, centremos nuestra atención en otra dualidad metodológica de gran actualidad y posiblemente la más fundamental: análisis-síntesis.

No nos equivocamos al señalar que la primera pregunta en surgir es la siguiente: ¿y qué diablos tienen que ver las matemáticas con semejante dualidad? Tales métodos, corrientes en otras disciplinas no parecen tener cabida de manera sustancial en el mundo de las matemáticas. Pero pensemos un poco en apelativos como geometría analítica, análisis matemático, geometría sintética, mecánica analítica, inducción matemática y otros cuantos por el estilo y que nos son tan familiares. ¿Cómo y por qué surgieron estos nombres? Nadie en realidad se ha interesado en responder seriamente una pregunta tan simple, tal vez porque no es un problema matemático. O quizás la influencia de los propios matemáticos, no ha permitido la reivindicación como problema, de una cuestión tan fundamental como es el estudio de los métodos dentro de su disciplina.

A manera de ejemplo para nuestra anterior afirmación, oigamos al prestigioso e influyente Jean Dieudonné, aunque sea un poco fuera de contexto: "... las grotescas querellas de los géometras 'sintéticos' y de los geómetras 'analíticos', tan incomprensibles para nosotros como las discusiones bizantinas sobre el sexo de los ángeles, han llenado volúmenes durante el siglo XIX"[1].

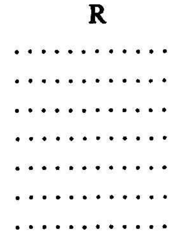
Cuando un matemático muy conocido y entre otras cosas, uno de los cerebros de la reforma curricular de los años 60 a nivel mundial, califica de grotesca y bizantina una discusión metodológica, no solamente refleja una determinada actitud muy frecuente entre algunos matemáticos un poco irresponsables, sino además, y esto es lo más grave, numerosos colegas y educadores se asustan, se pliegan, adoptan y reproducen semejante concepción, con las implicaciones negativas que se desprenden para la enseñanza tal como todos lo hemos sufrido en los últimos años.

Pero no exageremos y señalemos desde ya la presencia reciente y afortunada de un vigoroso grupo de investigadores cada día más numeroso, inspirados como es natural, en colegas de épocas anteriores y que han venido remozando las matemáticas, sus métodos y sus formas de razonar; abriéndoles otros derroteros y tratando de sacarlas de algunos de los callejones dogmáticos en los cuales se encuentra enclaustrada. La luz que ellos han venido arrojando, ha permitido entre otras cosas, retomar bajo una forma nueva el debate metodológico en las matemáticas y particularmente la discución sobre lo analítico y lo sintético. Ya veremos más adelante algunas pequeñas ilustraciones sobre sus aportes y también ciertos nombres; pero por ahora, regresemos un poco a nuestros antepasados, a los antiguos pero eternos griegos para mirar allí algunos sucesos ilustrativos acerca de la "grotesca" discusión entre analíticos y sintéticos.

Iniciemos, no por casualidad, nuestro pequeño recorrido con Pitágoras y los pitagóricos. Justamente ellos introdujeron el método analítico en el ámbito de las matemáticas. Esta escuela-comunidad muy conocida por sus aportes matemáticos, elaboró un sistema filosófico cuyo principio más fundamental y general puede enunciarse aproximadamente así: la esencia última de las cosas y fenómenos es numérica (recuérdese que para ellos, número significaba lo que para nosotros hoy en día es número entero mayor que cero). Esta teoría en apariencia arbitraria y un poco extraña, surgió de manera muy natural dentro de las circunstancias filosóficas de la época y adquirió en su momento un merecido prestigio gracias a su poder explicativo. Pretender una reducción de los fenómenos y las cosas a números y relaciones numéricas, no es más que la respuesta inmediata más natural, cuando se adopta una visión analítica según la cual los fenómenos y las cosas están constituidos por elementos últimos que pueden contarse o relacionarse mediante proporciones entre números. Las figuras geométricas por ejemplo serían reducibles a componentes puntuales. Un ejemplo sencillo nos servirá para ilustrar el poder de esta forma de pensamiento y de razonamiento. Supongamos que se desea explicar la conocida ley para determinar el tamaño o magnitud de un rectángulo (hoy en día diríamos: la medida del área de un rectángulo):

"La magnitud de un rectángulo, es el producto de las magnitudes de sus lados".

R



7

12

Si imaginamos el rectángulo como constituido de puntos distribuidos de modo simétrico en un enrejado y de manera análoga a sus lados, las magnitudes se determinan entonces mediante conteo y se deduce la relación.

$$m(R) = 12 \times 7 = 84$$

Figura 1

1. Jesús Hernández (ed.): *La enseñanza de las Matemáticas Modernas*. Alianza Editorial. Madrid, 1978. pág. 275.

Así, en la figura 1 se ilustra el caso en el cual los lados del rectángulo tienen respectivamente 7 y 12 puntos. El número de puntos del rectángulo es entonces $84 = 7 \times 12$, pues lo que tenemos son 7 filas de puntos, cada una con 12. Este argumento impecable (una vez que se acepta la visión analítica) aunque no concordante con nuestros conocimientos modernos, se utiliza todavía en nuestras escuelas en la forma descrita o en otras variantes y es perfectamente correcto, siempre y cuando quien lo enseñe tenga la conciencia plena de su carácter profundamente analítico. Un argumento en contra del "análisis" anterior es el siguiente: los puntos del enrejado no agotan el rectángulo. A tal razonamiento se puede responder así: aumente el número de puntos hasta que quede satisfecho. Los niños, por otra parte, captan con mucha facilidad y sin ningún misterio este tipo de argumentación analítica.

Ahora bien, como todos recordamos, esta visión granular o analítica de los objetos geométricos, entró en dificultades no solamente en razón de los descubrimientos matemáticos de la época (los propios pitagóricos como se sabe, fueron víctimas de sus inventos) sino además, en virtud de las poderosas críticas de los filósofos sintéticos, entre quienes sobresalen Parménides y Zenón de Elea. La crisis de las matemáticas de aquellos años fue resuelta mediante un cambio metodológico trascendental, planteado en lo fundamental por los matemáticos sofistas quienes concebían los objetos matemáticos como construidos mediante instrumentos, mirándolos entonces no como agregados sino como totalidades, e iniciaron así un nueva visión a través del famoso programa de la regla y el compás[2]. Esta metodología sintética retomada por Euclides, perduró por muchos siglos y con sus complementos y variantes fue la metodología dominante hasta la época de René Descartes. Pero volvamos a Zenón de Elea.

La historia de Zenón merece contarse con cierto detalle pues desde nuestro punto de vista, sus argumentos se mantienen aún en todo su vigor. Suele decirse que el discurso zenoniano sobre el movimiento va dirigido específicamente contra la posibilidad de su existencia. Aunque esta interpretación tiene algún sentido histórico realista, nos parece más razonable entenderlos como una demostración contundente de la incapacidad de la metodología analítica para explicar el movimiento. No se trata de afirmar la imposibilidad de describir correctamente el movimiento mediante procedimientos analíticos, cosa que los matemáticos y físicos han hecho sobre todo a partir de Galileo y Newton, sino más bien de entenderlo. La pregunta aquí no es entonces, de qué manera se desplazan los móviles sino más bien cómo es posible que lo hagan y esto último es incomprensible analíticamente.

2. Jesús Hernando Pérez: "Sobre los llamados tres grandes problemas de la Antigua Grecia", *Naturaleza, Educación y Ciencia*. Número 2. Enero-Abril. 1983.

Para comprender el movimiento, es indispensable una teoría sobre el espacio y el tiempo. Siguiendo las enseñanzas de Zenón, una concepción analítica del espacio y del tiempo debe suponerlos con una estructura granular. Así, el espacio estaría constituido por "lugares" y el tiempo por "instantes". (Tal concepción está implícita en la teoría matemática de la relatividad). Añadiendo además ciertas hipótesis razonables como la homogeneidad, infinitud, un orden total para el tiempo y un cierto orden para el espacio, la situación que se ha de considerar según Zenón es entonces la siguiente: el espacio y el tiempo pueden ser cada uno independientemente o bien denso o por el contrario dislocado. Denso significa, para el caso del tiempo por ejemplo, lo siguiente: entre dos instantes existe un tercero intermedio. Hablando todavía del tiempo y teniendo en cuenta las hipótesis de homogeneidad e infinitud, dislocado (lo contrario de denso) significa que para cada instante existe uno que le sigue y otro que le precede. Así las cosas, tendremos las siguientes cuatro posibilidades:

a) Tiempo denso y espacio dislocado.

Figura 2

Imaginemos un móvil M ubicado en el lugar L_1 en el instante t_1 y que se desplaza en la dirección de la recta L_1L_2. Como el espacio es dislocado, existirá un lugar L_2 siguiente a L_1 en la dirección del movimiento y el móvil lo alcanzará en el instante t_2. La pregunta de Zenón para este caso es: dado que el tiempo es denso, existirá un instante t_3 intermedio a t_1 y t_2 ¿qué le sucedió al móvil en ese instante? La única respuesta posible aunque intuitivamente inaceptable es: se esfumó.

b) Tiempo dislocado y espacio denso.

Imaginemos una vez más un móvil M ubicado en el lugar L_1 en el instante t_1 y que se desplaza en la dirección

L_1L_2.

Como el tiempo es dislocado en el instante siguiente t_2 el móvil se encontrará en el lugar L_2. Pero el espacio es denso y así existe un lugar L_3 intermedio a L_1 y L_2 por el cual debió pasar el móvil M pero no tuvo tiempo para ello y una vez más tenemos algo imposible.

c) Tiempo denso y espacio denso.

Esta es la parte más conocida de la argumentación de Zenón: la paradoja de Aquiles y la tortuga. Según los matemáticos —cuestión por demás bastante dudosa— este argumento fue refutado primero por Weirstrass y luego por Cantor, con lo cual la metodología analítica estaría en condiciones de comprender el movimiento. Sin embargo, ninguna de tales refutaciones tiene en cuenta la necesidad de hacer intervenir simultáneamente el espacio y el tiempo en el razonamiento. Pero veamos el argumento de Zenón.

A C D B

Figura 3

Un móvil M partiendo del lugar A no puede alcanzar ningún otro lugar, no importa cual sea la dirección que tome. Así, no podrá llegar al lugar B, pues para ello tiene que alcanzar un cierto lugar intermedio C y luego D y así sucesivamente —y hay suficiente tiempo para tal cosa.

d) Tiempo y espacio dislocados.

En este caso, Zenón señala entonces la imposibilidad de comprender el movimiento relativo. De hecho, como todo movimiento es relativo, el argumento una vez más se refiere al movimiento en general.

$L_2 \longleftarrow L_1$

L

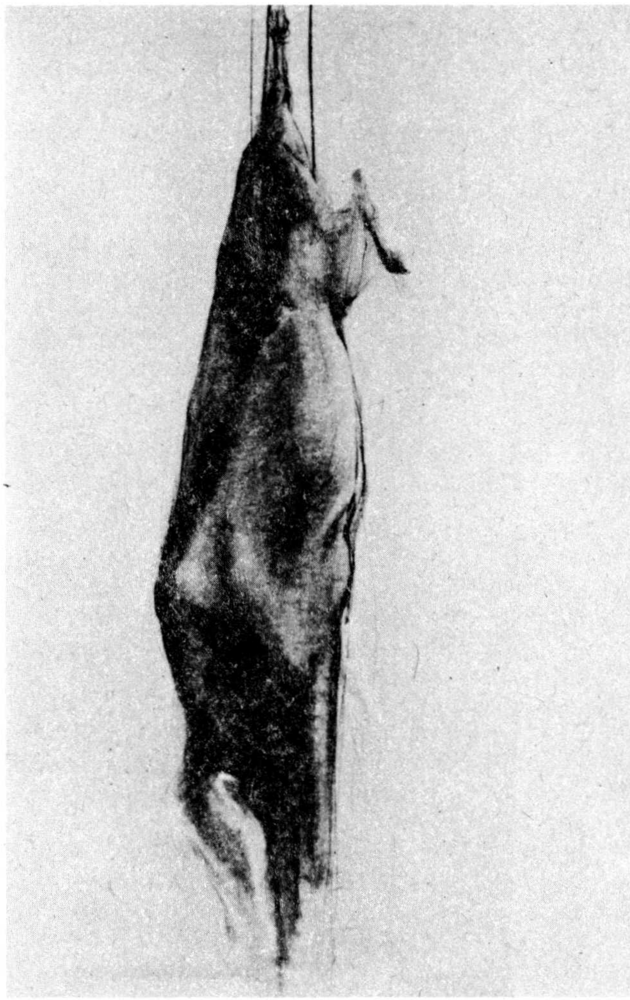
$L' \quad L_1' \longrightarrow L_2'$

Figura 4

La cuestión consiste aquí en imaginar dos móviles M y M' que se desplazan en sentidos opuestos respecto de un lugar de referencia L. El móvil M ubicado en L_1 en el instante t_1 se dirige al siguiente lugar L_2 al cual llegará en el instante t_2 siguiente a t_1. Por su parte, el móvil M' ocupando el lugar L'_1 en el instante t_1 se dirige al siguiente lugar L'_2 al cual llegará también en el instante t_2. Un observador ubicado en el lugar L comprende perfectamente lo sucedido; pero, un observador que acompañe a M no comprenderá lo sucedido con M'. En efecto, un observador que se desplaza con M verá que el móvil M' ha saltado desde L' hasta L'_2 sin pasar por L'_1, pues no ha tenido tiempo para ello.

Así pues, desde los inicios mismos de la actividad matemática, científica y filosófica, encontramos una importante discusión entre dos grandes metodologías que se alternan el dominio de las teorías unas veces o las comparten otras, sin la desaparición total en todo caso de ninguna de ellas. En la Grecia clásica por ejemplo, y a pesar del dominio bastante amplio de la metodología sintética después de la caída del pitagorismo, las visiones analíticas mantuvieron su presencia, y las manos de Arquímedes, pongamos por caso, lograron resultados que aún en la actualidad resultan impresionantes. Arquímedes de hecho, es el fundador del "análisis matemático", entendiendo este último como cálculo diferencial e integral, y por supuesto, calificado así por razones metodológicas.

Un ejemplo trascendental de una filosofía de las matemáticas en donde aparecen de manera equilibrada estas dos metodologías es la de Leibniz que amerita ser estudiada una vez más en forma profunda y detallada.



Martha Guevara. Sin título. Dibujo Carboncillo. 2.40 × 100 cms. 1985.

Por razones de espacio, no miraremos aquí este último ejemplo, ni el de Arquímedes, ni la extraordinaria disputa ("grotesca") entre analíticos y sintéticos del siglo XIX, ni el largo proceso que llevó partiendo de René Descartes al dominio una vez más de la metodología analítica, presente aún en nuestros días. Veremos eso sí algunas características importantes de esta dominación.

3. Cuestiones sobre los fundamentos de las matemáticas

El triunfo del análisis en las matemáticas del presente siglo, lo constituye el florecimiento y desarrollo de la teoría de conjuntos. Esta teoría cuyos orígenes se remontan a la matemática inglesa de los años 1850 con trabajos como los de Augustus de Morgan, William Hamilton, George Boole y otros, recibe un impulso extraordinario con las investigaciones de Cantor sobre el infinito; pero llega a su mayor esplendor con el descubrimiento del papel reduccionista de esta teoría, al cual contribuyeron personajes como el propio Cantor, Richard Dedekind, José Peano y muy particularmente Gottlob Frege y Bertrand Russell. Las diversas variantes del reduccionismo, es decir de las tendencias que buscan los fundamentos últimos o los primeros principios, son todas corrientes analíticas. Para el caso de la teoría de conjuntos, la situación es mucho más clara, no solamente por el hecho de que a ella se reduce toda la matemática, sino además, y esto es lo más importante, porque los objetos de esta teoría son por su propia naturaleza objetos descompuestos, analizados, constituidos de elementos que son sus partículas últimas.

Y el surgimiento de la teoría de conjuntos está muy ligado al desarrollo de corrientes filosóficas muy importantes que reivindican la metodología analítica, y que tienen sus fuentes no por azar en el pensamiento de Bertrand Russell. Tal el caso del positivismo lógico con el cuales tuvo muy relacionado Kurt Gödel y el de la filosofía analítica. Vale la pena mirar, así sea en forma muy superficial, el enlace tan extraordinario entre estos importantes mundos intelectuales: de un lado la teoría de conjuntos y del otro el análisis filosófico.

La popularidad de Russell en el ámbito de las matemáticas, reside en el descubrimiento de la paradoja que lleva su nombre y que resultó ser uno de sus aportes fundamentales. Para matemáticos y filósofos de comienzos de siglo estaba quedando clara la posibilidad de explicar toda la matemática en términos conjuntistas. Weierstrass y Dedekind habían reducido la teoría de los números reales, y por lo tanto el "análisis matemático", a la de números racionales, con la ayuda de ciertas nociones conjuntistas. Descartes hacía mucho tiempo nos había enseñado el procedimiento de reducir la geometría a la teoría de números reales; Peano, y antes de él François Viète, habían mostrado el camino para deducir los números racionales de los enteros y éstos de los naturales ayudándose también de nociones conjuntistas. Por último, terminando la búsqueda de los fundamentos últimos de las matemáticas, Frege y el propio Russell plantearon su propuesta para reducir los números naturales a conjuntos, momento en el cual surgió la paradoja. La paradoja de Russell no fue la primera relativa a los conjuntos. Cesare Burali-Forti, un discípulo de Peano, había presentado otra sobre los números ordinales. Mucho antes, incluso desde los antiguos griegos, venían circulando paradojas como la muy conocida del mentiroso: ¿es falsa o verdadera la afirmación del mentiroso al aseverar "todo lo que afirmo es falso"?

Pero volvamos a Russell: éste había descubierto que algunas colecciones se pertenecen como elementos en tanto que otras no. Para tomar sus propios ejemplos, la clase **C** de las cucharas no es una cuchara y por lo tanto $\mathbf{C} \notin \mathbf{C}$; de otra parte, la clase **D** de los objetos que no son cucharas tampoco es una cuchara con lo cual $\mathbf{D} \in \mathbf{D}$. Así pues, existen clases *propias* x para las cuales $x \notin x$ y clases *impropias* z que satisfacen la condición $z \in z$. Si llamamos ahora R a la clase de todas las clases propias, $R = \{x/x \notin x\}$, surge entonces la siguiente pregunta sobre R: ¿es R una clase propia o impropia? Si R es una clase propia entonces $R \notin R$ y en consecuencia $R \in R$. Si por el contrario, R es una clase impropia $R \in R$ y así $R \notin R$. Tenemos entonces la siguiente paradoja: $R \notin R \Leftrightarrow R \in R$.

Estas paradojas que llenaron de júbilo a los enemigos de la nueva teoría, entre ellos los defensores de la metodología sintética, fueron resueltas por el propio Russell mediante su famosa teoría de los tipos adoptada hoy en día, con los ajustes necesarios, por los matemáticos. La teoría de los tipos está indudablemente en los orígenes de la filosofía analítica, como veremos muy someramente a continuación.

El enorme poder expresivo del lenguaje manipula y confunde al usuario, cuestión que puede verse con un ejemplo muy sencillo. Consideremos las siguientes oraciones:

Pedro tiene un lápiz,
Juan tiene un carro,
José tiene una novia,
Miguel tiene un dolor.

La estructura gramatical muy semejante entre estas oraciones y el uso sistemático de las mismas, nos induce a colocar en el mismo nivel existencial a un lápiz, un carro, una novia o un dolor, y terminamos poco a poco creyendo que una novia se puede manejar como un lápiz o un carro, y que el dolor tiene una existencia tan real como la de un carro. Esta confusión de niveles ontológicos o existenciales originada en la semejanza gramatical, es la que produce las paradojas. Pero no se trata exclusivamente de una confusión en los niveles ontológicos, sino además en los niveles lógicos como sería el caso de la paradoja del mentiroso.

Cuando el mentiroso señala, "todo lo que afirmo es falso" y no hay posibilidad de decisión sobre la veracidad de tal oración, se están confundiendo proposiciones que corresponden a niveles lógicos diferentes. En efecto, la proposición en cuestión pertenece a un nivel diferente al de las proposiciones enunciadas previamente por el mentiroso a las cuales podríamos calificar de pertenecientes al primer nivel, y en tal caso aparece la paradoja, cuando consideramos la afirmación en cuestión que se refiere a las oraciones o proposiciones de primer nivel y es por lo tanto de segundo nivel, como una de las de primer nivel.

La salida que Russell encuentra a la paradoja del mentiroso puede extrapolarse al caso de las colecciones y del simbolismo correspondiente para manejarlas. Se tendrán entonces colecciones de diversos tipos o niveles y correspondientemente, sintaxis de órdenes diferentes. Para dar una idea de esta teoría que no podemos explicar detalladamente en estas notas, piénsese por ejemplo en lo siguiente: la diferencia última entre la teoría de los números racionales (cuerpo ordenado, denso y sin primero ni último elemento) y la de los números reales (cuerpo ordenado, denso, sin primero ni último elemento y completo) es de naturaleza lógica pues la primera es una teoría de primer orden en tanto que la segunda es de segundo orden. Esto último significa que en los axiomas de la teoría de los números racionales, se cuantifican variables que se refieren a elementos mientras que en la segunda, aparecen en algunos axiomas, cuantificadores que ligan variables referentes a conjuntos de elementos.

La consecuencia general que se puede sacar de las reflexiones anteriores es entonces la siguiente: las teorías científicas deben expresarse mediante sistemas simbólicos en los cuales no se confundan los niveles lógico-ontológico pues de lo contrario, se originan desviaciones que conducen a paradojas o a la reificación de entes abstractos. Surge así una nueva propuesta metodológica para los filósofos: el análisis lógico del lenguaje.

Existen pues métodos analíticos en filosofía que tienen como es natural su propia historia, pero que en tiempos modernos han tomado una forma particular estrechamente vinculada con el desarrollo de la teoría de conjuntos, la cual posee, en sus formas corrientes, una naturaleza eminentemente analítica. Aunque existen enfoques diferentes sobre lo que es el análisis y no hay una definición precisa acerca de en qué consiste el método analítico; en matemáticas, existe una situación un poco más clara. Hay incluso una propuesta de definición para el método sintético, que miraremos ahora rápidamente.

En general, digamos que un fenómeno o un objeto se comprende sintéticamente cuando en lugar de descomponerlo en busca de sus últimos elementos o de las relaciones entre ellos, lo contrastamos y ubicamos respecto a otros fenómenos o cosas análogas. En tal caso, no nos preguntamos cómo está constituido, sino más bien cómo adquiere una identidad dentro del mundo de los fenómenos o cosas que le son similares: los vemos como cajas negras y los entendemos contrastándolos con otras cajas negras. La teoría matemática más adecuada para modelar este tipo de concepción, es la teoría inaugurada por Saunders MacLane y Samuel Eilehberg, conocida con el nombre de "Teoría de Categorías" y que ha sido desarrollada por numerosos autores, entre los cuales mencionamos solamente a Alexander Grothendieck, William Lawvere, Gonzalo Reyes, Eduardo Dubuc, Anders Kock, Max Kelly, Jeke Moerdijk y André Joyal, dejando por fuera importantes matemáticos de diferentes países.

Resumiremos a continuación algunas ideas muy generales, sin detalles técnicos, sobre la teoría de categorías y presentaremos unos argumentos muy sencillos que nos permitirán mostrar, aunque de manera superficial, la relación entre la metodología sintética y la teoría de categorías.

Un universo de cajas negras **C** o una categoría, es una estructura matemática constituida por objetos (cajas negras) y puentes o flechas (morfismos o también mensajes) entre tales objetos de forma tal que se satisfacen ciertos axiomas.

Si pensamos en los conjuntos como una totalidad, tendremos entonces un ejemplo de lo que es una categoría. En tal ejemplo, los objetos o cajas negras son los conjuntos (o las colecciones) y los mensajes entre tales objetos, las funciones. Existen numerosos ejemplos de categorías; pero para no molestar al lector con cuestiones demasiado técnicas, no mencionaremos aquí ningún otro distinto al ya demasiado popular de los conjuntos. Veamos ahora de qué manera los conjuntos modelan analíticamente mientras otras categorías permitirían un modelaje sintético. Para ello, tomaremos ciertos conceptos claves con el propósito de mirarlos desde los dos puntos de vista: el analítico y el sintético. Son ellos los siguientes: "vacío" (o la nada matemáticamente hablando), "punto" (o partícula elemental) y "ser elemento de" (o también ser una partícula de).

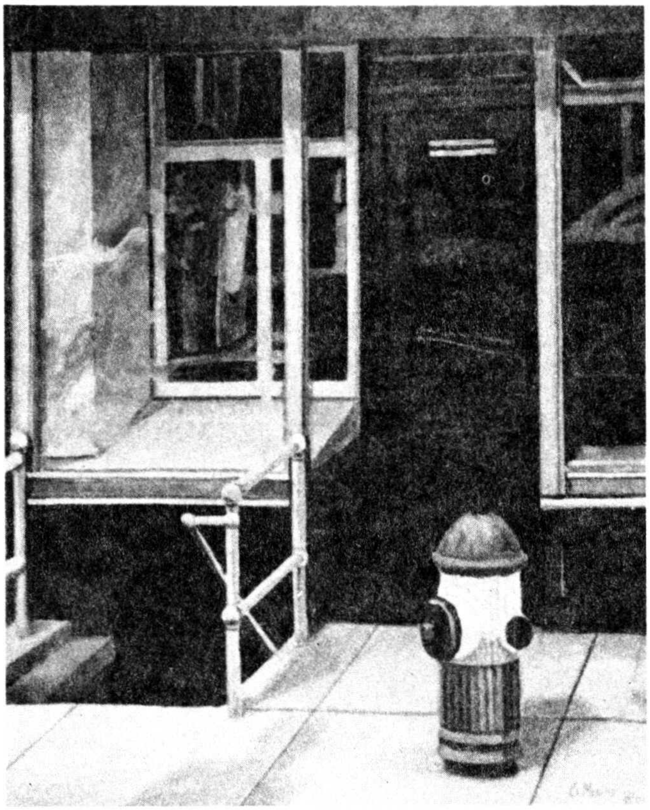
Comencemos por el concepto de "punto". Analíticamente hablando, un punto no es más que un conjunto unitario; es decir, si buscamos las componentes últimas de un punto, encontraremos solamente una, y tal componente determina completamente la caja negra "punto". Pero preguntemos ahora qué es lo que hace de un conjunto unitario $\{*\}$, un objeto especial dentro del mundo (léase categoría) de los conjuntos.

La respuesta es entonces la siguiente: los puntos son los únicos conjuntos que satisfacen la siguiente propiedad: dado un conjunto cualquiera **X**, existe un único mensaje o función (flecha o puente) de dominio (fuente) X y codominio (meta) el punto.

De manera análoga (de hecho dual) el vacío es el único conjunto ϕ que cumple la siguiente condición: dado un conjunto X cualquiera, existe una única función de dominio ϕ y codominio X (un único mensaje de ϕ a X).

En otras palabras, un punto en el mundo de los conjuntos es una caja negra que recibe un único mensaje desde cualquier otra caja negra (conjunto); mientras que la nada (el vacío) es aquella caja negra de la cual sale un único mensaje hacia cualquier otra caja negra. Estas últimas caracterizaciones, eminentemente sintéticas, se trasladan a cualquier categoría **C**, en la cual pueden entonces existir "puntos" y "nadas" (vacíos). En efecto, podemos ahora señalar lo siguiente; un punto 1, en una categoría **C** es una caja negra que recibe un único mensaje desde cualquier otra caja negra de **C**; un vacío **O** de **C**, o una nada en **C** será una caja negra que envía un único mensaje hacia cualquier otra caja negra de **C**.

Ahora bien, ¿qué significa que una caja negra A posea uno o más puntos o partículas? Respondamos primero tal pregunta para el caso de conjuntos. Si A es un conjunto no vacío, y **a** uno de sus elementos, existe una úni-



Gloria Merino. "Entradas". Oleo sobre lienzo. 1.60 × 1.15 cms. 1984

ca función de dominio $\{*\}$ y codominio A determinada por **a** y recíprocamente. Existen pues tantos elementos en A como funciones de dominio $\{*\}$ y codominio A. Sintéticamente hablando, cada puente o mensaje entre un punto y una caja negra determina un elemento de la caja negra.

Pasando ahora a una categoría cualquiera **C** en la cual exista un punto 1, diremos que una caja negra A de **C** posee elementos o partículas, si existen mensajes desde 1 hacia A. Cada uno de estos mensajes es una partícula o elemento de A. Resulta ahora bastante fácil imaginar o pensar en un objeto que, sin reducirse a *la nada* —es decir, distinto de un **O**— no posea partículas o elementos. De hecho, existen categorías en las cuales hay objetos A distintos de **O** y sin partículas.

Por este camino, podemos romper con la tradición analítica (conjuntista) de identificar, pongamos por caso, los objetos según la cantidad de sus elementos o partículas (principio de extensionalidad). Existen objetos extraordinariamente complejos sin partículas y la teoría matemática donde tal cosa puede modelarse es la teoría de categorías. Un cambio metodológico como el que se está produciendo, mediante el estudio de las categorías, lleva parejo numerosas transformaciones entre las cuales merece mencionarse la siguiente: la reivindicación definitiva de las lógicas intuicionistas.

4. Cuestiones pedagógicas

Lo planteado previamente tiene consecuencias importantes para la enseñanza de la matemática en todos los niveles; pero muy particularmente en la primaria y en la secundaria. Hablemos por ejemplo de la cuestión curricular, tema este no solamente de gran actualidad sino además de mucha trascendencia dentro de la problemática pedagógica en matemáticas. El currículum actualmente vigente y que está siendo replanteado, pues adolece indudablemente de numerosas fallas que ameritan su cambio, aunque también posee importantes cualidades, fue elaborado como parte de la tendencia mundial de los años 1950-1960, que se propuso como objetivo principal la modernización de la enseñanza de las matemáticas fundamentalmente desde el punto de vista de la actualización de sus contenidos. La arremetida feroz contra la mal llamada "matemática clásica", incluyendo allí por ejemplo a la geometría euclidiana, le abrió paso a temas de actualidad, cuestión a todas luces positiva; pero se produjeron unos cuantos efectos negativos entre los cuales está principalmente el gran desequilibrio metodológico. La modernización de los contenidos se entendió, desafortunadamente en nuestro país, como si se hubiera lanzado la consigna: todo el poder a los conjuntos. Conjuntos al desayuno, conjuntos al almuerzo, conjuntos a la comida y como si fuera poco a soñar con los conjuntos. ¿Dónde radicaba uno de los grandes problemas de esta orientación? No propiamente en la idea de involucrar los conjuntos y otros temas modernos en el currículum, sino más bien en la parcialización metodológica de los temas. Ya hemos explicado cómo la teoría de los conjuntos es, dentro de la matemática, la teoría analítica por excelencia. Hacer girar la matemática alrededor de los conjuntos, lleva al fortalecimiento y desarrollo exclusivo de formas de pensamiento analítico. No estamos en contra del método analítico, ni más faltaba. Lo que nos parece una gran equivocación es sencillamente que no se coloque también la enseñanza de la matemática al servicio de las formas de pensamiento sintético. Obviamente nuestra afirmación vale además respecto de otros estilos que han resultado desfavorecidos con el tratamiento curricular imperante: no se desarrollan hábitos difusos, ni informales, ni inductivos, ni flexibles, etc. Por fortuna, existen otras áreas del conocimiento que sí favorecen la vigorización de tales habilidades y así el estudiante no pierde la mitad de su cerebro; pero es realmente criminal ubicar la matemática de uno solo de los lados.

Mencionemos ahora cuestiones más concretas. Tomemos por ejemplo el caso de la geometría euclidiana tan injustamente maltratada por nuestros programas. Son muchas las razones que numerosos maestros aducimos al manifestar nuestra añoranza por el viejo Bruño. Entre todas ellas, la que me parece la más fundamental es la siguiente: tal disciplina desarrolla aptitudes de naturaleza sintética. Baste por ejemplo la siguiente reflexión, y quien quiera más argumentos que recurra a los trabajos de Inmanuel Kant: todos los objetos espaciales (en el sentido euclidiano) son de naturaleza sintética puesto que son *formas*. Una esfera no es un conjunto de puntos sino más bien la forma de ciertos objetos esféricos; una recta tampoco es un conjunto de puntos, es un doblez o un borde o un quiebre o un trazo; cualquier cosa, menos una multitud de puntos, lo cual no significa que no posea algunos.

En realidad, la geometría euclidiana es una disciplina inmensamente rica en posibilidades metodológicas. La inducción-deducción aparecen allí extraordinariamente enlazadas como nos lo demostró contundentemente Arquímedes en su trabajo fundamental no por azar titulado *El método*. ¿Y qué decir del enlace manifiesto entre lo concreto y lo abstracto, que va desde el inicio hasta el fin, en un texto como la geometría de Bruño del cual aprendimos tanto? Pero señalemos algo que puede ser más interesante: la geometría euclidiana es un arsenal casi inagotable para ilustrar conceptos matemáticos modernos. Y no me refiero al hecho trivial por lo demás importante, que allí se encuentran los mejores ejemplos de conjuntos o infinitos, una vez aceptamos la visión analítica de los objetos geométricos. El siguiente ejemplo originado en alguna de las reflexiones de Demócrito de Abdera, servirá como excelente ilustración.

¿Dónde podemos encontrar las cantidades infinitamente pequeñas o infinitésimos, predichos por Leibniz y que se han puesto tan en boga en los últimos años? Pues en la geometría euclidiana. Recordemos que una cantidad infinitesimal es en valor absoluto mayor que cero y menor que cualquier cantidad real positiva. Veamos ahora cómo exhibir tales "esperpentos".

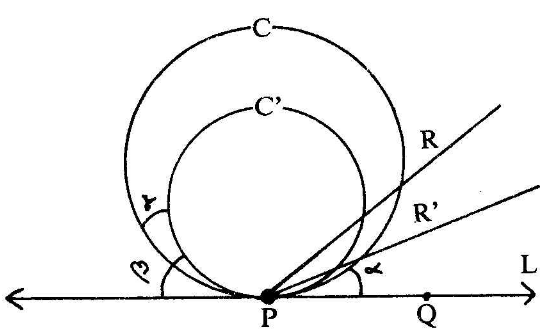


Figura 5

Consideremos la recta L tangente a las circunferencias C y C' en el punto **p.** La apertura α entre la circunferencia C y la recta L es indudablemente un ángulo aunque, claro está, un poco raro.

¿Cuánto mide este ángulo? Cero no puede ser evidentemente. Tampoco una cantidad real positiva. De hecho, es un infinitésimo; pues como la figura 5 lo indica, $m(\alpha)$ es menor que cualquier cantidad real positiva. Tal los casos $m(\alpha) < m(\measuredangle QPR)$ y $m(\alpha) < m(\measuredangle QPR')$[3].

Y digamos otra cosa a propósito de este ejemplo, señalado también por Demócrito (con razón lo combatieron tanto). ¿La intersección de L con C y C' es realmente un punto? ¿No es claro de la figura que la intersección de L con C es mayor que la de L con C'? Ahí están una vez más las cantidades infinitamente pequeñas.

Pero, lo más importante es lo siguiente: tenemos aquí una ilustración muy clara de la existencia de objetos irreducibles a sus partículas. De hecho, llamemos A a la intersección de C con L y B a la de C' con L. Como ya lo hemos afirmado, A y B son objetos geométricos diferentes y sin embargo el único elemento o partícula que contienen ambos es el punto p. Si la cuestión se explicara en términos meramente analíticos (cantidad de elementos) A y B deberían ser lo mismo; pero esto no es así, y la explicación analítica es insuficiente.

Para terminar, permítasenos hacer las siguientes aclaraciones:

1) No se crea en modo alguno que nuestra propuesta consiste en volver a los viejos tiempos o cualquier cosa por el estilo. Si hay algo que debe abonársele a los programas vigentes es de una parte, la modernización de la enseñanza de la matemática, y de la otra, la unificación de la misma. Lo que se reclama aquí simplemente es el equilibrio metodológico en los contenidos pues el Yo de los futuros ciudadanos no debe ser univisual.

2) Lo que se ha comentado aquí acerca de la geometría es aplicable a otros tópicos que se enseñan en nuestras escuelas y colegios. El álgebra, por ejemplo, no puede continuarse enseñando como una teoría meramente sintáctica, pasando por encima de sus profundos aspectos semánticos, y así sucesivamente.

3) Tampoco se trata de llevar a otros niveles la teoría de categorías pues ello, por ahora, no sería más que un nuevo exabrupto.

El problema como hemos dicho es ante todo metodológico y no únicamente de contenidos. Debemos procurar una enseñanza a través de la cual nuestros estudiantes puedan familiarizarse con las diferentes metodologías que se utilizan en el trabajo con las matemáticas, persiguiendo con ello un desarrollo integral de nuestros futuros ciudadanos.

3. $m(\alpha)$ indica la medida del ángulo α