

EL METODO AZIMUTAL PARA DETERMINAR LA LATITUD

POR EL PROF. BELISARIO RUIZ WILCHES
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE GEOFISICA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL

ESPECIAL PARA "UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA"

En un estudio anterior (véase "Anales de Ingeniería" N° 383) insinuamos la posibilidad de obtener, mediante el método azimutal, latitudes tan exactas como las obtenidas con los procedimientos conocidos de alturas iguales; damos a continuación el proceso y las fórmulas que deben emplearse en este caso, ya que consideramos que el sistema en cuestión tiene ventajas, aun cuando no fuesen otras que las de aumentar con uno más los métodos exactos para la determinación de la latitud.

Con un instrumento de buena lectura en el limbo horizontal y habiendo obtenido meridiano exacto por el procedimiento de azimuts iguales, puede obtenerse la latitud por simple medida del ángulo azimutal para dos estrellas, una norte y otra al sur del zenit, en momentos en que sus alturas sean iguales.

La fórmula sería la siguiente:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\partial_1 + \partial_2) + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) + i \quad (A)$$

en la que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e''_1 - e''_2) &= \operatorname{sen} z \cos \varphi_0 \left(\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_1}{\cos \partial_1 \operatorname{sen} I''} - \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_2}{\cos \partial_2 \operatorname{sen} I''} \right) \\ &\quad + \operatorname{sen} I'' \left(ts \partial_1 \frac{e''_1^2}{2} + ts \partial_2 \frac{e''_2^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (B)$$

z = distancia zenithal instrumental;

φ_0 = latitud aproximada;
 i = inclinación del aparato dada por el nivel;
 ∂_1 y ∂_2 = declinaciones de las dos estrellas;
 A_1 y A_2 = ángulos azimutales de las dos estrellas.

El empleo de esta fórmula tiene estas ventajas:

1º La lectura del círculo horizontal en un aparato mediano puede hacerse con una aproximación no inferior a $5''$, lo que es suficiente;

2º La lectura del círculo es perfectamente invariable;

3º Observando ascenso y descenso de las dos estrellas puede prescindirse (no con ventaja) de la determinación previa del meridiano y por consiguiente no se necesitarán otros elementos que el teodolito y el reloj de bolsillo para prepararse para la observación; así el método puede ser empleado por cualquier topógrafo.

Deducción de las fórmulas:

Sean las dos fórmulas:

$$\operatorname{Sen} \partial = \cos Z \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} Z \cos \varphi \cos A_z$$

$$\operatorname{Cos} A_z = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_z$$

y combinando

$$\operatorname{sen} (Z + \psi) - \operatorname{sen} \partial = \operatorname{sen} Z \cos \varphi \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_z$$

pero para la estrella que esté hacia el polo elevado, llamando z_0 su distancia zenital de culminación, se tendrá:

$$Z_0 + \varphi = \partial_1 \quad y \quad Z_0 + l_1 = z$$

sustituyendo valores:

$$\operatorname{sen} (\partial_1 + e_1) - \operatorname{sen} \partial_1 = \operatorname{sen} z \cos \varphi \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_z$$

llamando A el ángulo azimutal y despejando $\operatorname{sen} e_1$:

$$\operatorname{sen} e_1 = \frac{\operatorname{sen} Z}{\cos \partial_1} \cos \varphi \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_1 + t s \partial_1 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} l_1$$

y análogamente para la estrella que esté al lado opuesto del polo elevado, llamando A_2 el suplemento del ángulo azimutal, se tendrá:

$$\operatorname{sen} l_2 = \frac{\operatorname{sen} Z}{\cos \partial_2} \cos \varphi . 2 . \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} A_2 - \operatorname{ts} \partial_2 . 2 . \operatorname{Sen}^2 \frac{1}{2} l_2$$

pero teniendo en cuenta que siendo e pequeño podemos poner: $e'' . \operatorname{sen} 1'' = \operatorname{sen} e$; y dividiendo por $\operatorname{sen} 1''$ y combinando las dos fórmulas tendremos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} (e''_1 - l''_2) &= \operatorname{sen} Z \cos \varphi \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_1}{\cos \partial_1 \operatorname{sen} 1''} - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A_2}{\cos \partial_2 \operatorname{sen} 1''} \right) \\ &\quad + \operatorname{sen} 1'' \left(\frac{1}{2} l''_1^2 \operatorname{ts} \partial_1 + \frac{1}{2} l''_2^2 \operatorname{ts} \partial_2 \right) \end{aligned}$$

que es la fórmula que habíamos empleado al principio.

Influencia de los errores de observación

Error en distancia zenital:

Diferenciando con relación a z la fórmula (A) teniendo en cuenta el valor de la fórmula (B) y despreciando el segundo término por ser muy pequeño se tiene:

$$d \varphi'' = \frac{1}{2} (l''_1 - l''_2) \cot Z . \operatorname{Sen} 1'' dz \quad (H)$$

Para $z = 7^\circ$ y $e - e = 1000''$, valores que son muy altos y a los cuales no hay para qué llegar, se tiene:

$$d \varphi'' < \frac{dz''}{50}$$

es decir, que el error de la latitud hallada será menor de $1''$ por cada $50''$ de error en la distancia zenital en estas desfavorables condiciones.

Error en la latitud aproximada:

Diferenciando con relación a φ las fórmulas (A) y (B) como se hizo para la z y llamando φ_0 la latitud aproximada, se tiene:

$$d\varphi'' = \frac{1}{2} (l''_1 - l''_2) \operatorname{ts} \varphi \operatorname{sen} l'' d\varphi''_0 \quad (L)$$

haciendo $= 64^\circ$ y $e''_1 - e''_2 = 1000''$, se tiene

$$d\varphi'' < \frac{d\psi''_0}{200}$$

es decir, que a una latitud tan alta como la de 64° se tendrá un error de menos de $1''$ en la latitud por cada $3'20''$ de error en la latitud aproximada; a 45° por $6'40''$; a 23° por más de $\frac{1}{4}$ de grado y de ahí en adelante por mucho más.

Error en el ángulo azimutal:

Diferenciando las fórmulas ya citadas con relación a A y empleando, por comodidad en la comparación el ángulo horario (semintervalo entre ascenso y descenso) puesto en segundos de tiempo, se tiene:

$$d\varphi'' = 15 (AH_1^s - AH_2^s \cos \varphi \operatorname{sen} 1'' dA'' z) \quad (M)$$

Haciendo $\varphi = O$ y $AH_1 - AH_2 = 15'$ tendremos:

$$d\varphi'' = \frac{dA'' z}{15}$$

es decir, que el error en la latitud será menor de $1''$ por cada $15''$ de error en el azimut en el ecuador; en latitudes más altas la fórmula dará todavía mejores resultados. Debe tenerse en cuenta que tanto la diferencia de $16'40''$ entre los ascensos de las estrellas (en el método de alturas iguales Talcott-Garavito se recomienda no pasar de $5'$) como la de 15 minutos en los intervalos son suficientemente grandes para que se encuentren siempre parejas de estrellas que cumplan ampliamente estas condiciones.

Por la inspección de las fórmulas (H) y (M) resalta la superioridad del empleo de la fórmula azimutal sobre la de tiempo.

OBSERVACIONES DE LA PRACTICA DEL METODO

1º El error índice debe determinarse previamente con cuidado para evitar su influencia en la distancia zenital (véase fórmula $[H]$).

2º En la escogencia de las estrellas deben tenerse en cuenta las fórmulas (H) y (M) .

3º La distancia zenital instrumental debe elegirse con criterio suficiente para satisfacer a las condiciones contradictorias de e pequeño y velocidad no muy reducida en el sentido vertical para apreciar mejor el contacto; la elección conveniente depende, pues, de la potencia óptica del anteojos.

4º Es claro que deben leerse los niveles después de cada observación para determinar a i .

5º Si no se ha determinado el error índice del aparato con precisión y siendo pequeña la diferencia probable entre la z leída y la efectiva ($5'$ cuando más) puede procederse por aproximaciones sucesivas así:

Calcular e_1 y e_2 con la z leída y con ellas φ y hacer $z_0 = \partial - \varphi$ y $z = z_0 + e$. Con estos nuevos valores se recalculan e_1 y e_2 .

6º El valor de z debe corregirse de refracción.

7º No debe olvidarse cuáles son los valores de A y A' que deben usarse en las fórmulas; como regla práctica puede servir la siguiente con azimuts contados de 0 a 360° : primer cuadrante $A =$ azimut leído; segundo cuadrante $A =$ suplemento de azimut sobre 180° ; tercer cuadrante $A =$ exceso de azimut; cuarto cuadrante $A = 360^\circ -$ azimut.

PREPARACION DE LA OBSERVACION

La preparación de la observación consiste en la determinación del meridiano por el método de azimuts iguales ("Anales de Ingeniería" N° 383), la elección de pares de estrellas dentro de las condiciones del método (diferencia de culminaciones inferior a $-5'$, etc.) y el cálculo para cada estrella de la hora de paso para ascenso por el hilo inferior de la retícula y el azimut aproximado; el cálculo del ángulo horario y el azimut aproximado pueden hacerse en la forma corriente, un poco laboriosa, como se ob-

tienen para los métodos de alturas iguales; pero mediante el empleo de tablas, que para otro género de operaciones publicaremos en otra ocasión, se simplifica de tal manera este cálculo que se reduce a una muy sencilla operación aritmética. Estas tablas dan, una vez elegida una distancia zenital instrumental, directamente, con factores muy fáciles de emplear, el ángulo horario y el ángulo azimutal.