CANTOR, EL CONQUISTADOR DEL INFINITO

por WALDEMAR BELLON

En el primer centenario de
Georg Cantor, 1845 - 1918.

Este ensayo sobre Cantor, que aquí se publica, tiene una doble actualidad. Porque aparece en sazón de centenario, y, a la vez, es el primer trabajo que entre nosotros se dedica a este genial escalador de los cielos, para usar una expresión de Hermann Weyl. Cualquiera que sea la firmeza de la teoría de Cantor, y sea cuales fueren las posturas que los matemáticos modernos adopten acerca de ella, es lo cierto que es mucho lo que tiene que quedar del juicio que sostiene que "la doctrina de Cantor sobre el infinito es la única matemática genuina desde el tiempo de los griegos". Por ello, esta revista acoge en sus páginas el presente trabajo del profesor Waldemar Bellon, estudiante incansable de esta región de las ciencias, desde sus años de estudio en varias universidades alemanas. Arrojado hasta aquí por la tormenta europea, prosigue tenazmente sus trabajos sobre matemática, que inició en las Universidades de Stuttgart y Tuebingen. El lector encontrará en este ensayo una oportunidad aprovechable para acercarse a Cantor, y con él a un gran sector de la matemática moderna. Al final de este ensayo se encontrará una breve biografía de Cantor, que ha sido extractada del libro "Men of Mathematics" de E. T. Bell, y que agrega al estudio del profesor Bellon un esbozo de la vida de Cantor.

El Hombre

En la matemática, que gozó durante siglos de la fama de ser la ciencia más exacta, la ciencia que no conoce contradicciones, la persona de Georg Cantor representa el papel del gran revolucionario, del transformador de todos los valores tradicionales.

Miramos el retrato del hombre que lanzó la duda al pensamiento matemático, de quien Tobías Dantzig dice: "Cantor encontró la matemática indivisa, la dejó dividida en dos campos contendores", miramos su retrato y no nos parece que este hombre de aspecto burgués sea un revolucionario. La barba cortada a la moda del principio del siglo, y algo grisosa; la gran calva y el vestido sencillo hacen pensar más bien en un comerciante en el apogeo de sus éxitos, a uno de esos "Kommerzienræte" de la época wilhelmina. Solamente la mirada aguda de los ojos claros, que se dirigen al espectador, dicen algo de aquella voluntad inquebrantable de un hombre decidido a seguir su camino en línea recta hasta el fin, voluntad que se expresó en el impresionante edificio de su "Mengenlehre", su Teoría de los Conjuntos.

Georg Cantor nació en Petersburgo el 3 de marzo de 1845. Absolvió sus estudios en las Universidades de Zürich (Suiza), Berlín y Gœttingen (Alemania) para graduarse como matemático en la Universidad de Halle a. S. (Alemania) en el año 1869. Diez años más tarde regresó a esta misma Universidad como profesor. Los primeros trabajos científicos de Cantor se refirieron a aplicaciones del cálculo diferencial. En 1883 publicó su gran obra "Grundlagen einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (Fundamentos de una teoría general de variedades), con la cual lanzó la controversia al campo matemático, una controversia que hoy, sesenta años más tarde, perdura en una contienda violenta, sin que ninguno de los dos bandos muestre signos de derrota. Mientras que unos quieren, no sólo abolir la teoría cuyo fundador es Cantor, sino revisar toda la matemática, un representante del otro bando, David Hilbert, declara: "Del paraíso que Cantor nos ha creado, nadie nos expulsará".

Aunque la fama de Cantor se base especialmente en su teoría de los conjuntos, no perdamos de vista la gran labor organizadora y publicista del hombre. La Asociación Alemana de Matemáticas (Deutsche Mathematiker Vereinigung), uno de los centros principales de la discusión y del desarrollo de la matemática, fue organizada por él. Lo tenían como redactor muchas publicaciones científicas como "Zeitschrift für Mathematik und Physik", "Mathematische Annalen", "Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik", "Acta Matemática". Pero además, revistas más ajenas a su campo principal de actividades llevaron durante mucho tiempo su nombre en la portada: "Natur und Offenbarung", "Zeitschrift für Philosophie" y hasta el "Magazin für Literatur". Una vida fecunda que quedó bruscamente interrumpida al morir Cantor en Halle, en el año 1918, víctima indirecta de la primera guerra mundial.

Que es un Conjunto?

Conjunto es una pluralidad determinada de objetos bien definidos y bien distinguidos, tales como se presentan a nuestra observación o a nuestro pensar; estos objetos se llaman elementos del conjunto. Tales objetos bien pueden ser objetos físicos, materiales, o puras ideas, abstracciones matemáticas, por ejemplo, los números. El conjunto puede ser limitado a cierta cantidad de elementos, como los números enteros entre 1 y 100, pero también pueden contener elementos como todos los números enteros, cuya cantidad se llama comúnmente infinita, porque a cualquier elemento, tan grande como sea, se puede siempre añadir otro, aún más grande, sin que se pueda descubrir un fin para tal proceso.

Conjunto es, desde luégo, una idea en matemática que inconscientemente se había usado mucho antes de los tiempos de Cantor. En el año de 1636 Galileo Galilei enunció en su "Diálogo sopra i due massimi sistemi del mondo" la idea de que hay conjuntos infinitos; todo el desarrollo de la matemática del siglo XIX tiende en la misma dirección, sin que se haya llegado a un claro concepto sobre el problema. Pero como muchas veces lo observamos en la historia de la ciencia, llegó el momento en que el tiempo había madurado, en que el desarrollo de la matemática había llegado a tal punto, que imperiosamente se impuso la solución, y llegó el espíritu que coordinó todo en un grandioso cuadro. Que el tiempo sí estaba maduro en aquellos años lo demuestra la casi coincidencia del descubrimiento de Cantor con la cuña o cortadura de Dedekind, que ataca el mismo problema de un punto de vista distinto.

Algunas Leyes sobre Conjuntos

Antes de ir a trabajar con conjuntos es preciso conocer algunas de las leyes o reglas fundamentales sobre ellos. Sean A y B dos conjuntos. Vamos a escribir los conjuntos de aquí en adelante siempre con mayúsculas cursivas, para distinguirlos fácilmente de otros elementos matemáticos. Para mayor comodidad consideremos a A y B como finitos, es decir, que la cantidad de sus elementos puede representarse por un número finito. Los llamamos iguales, si a cada elemento de uno de los dos corresponde en forma unilateral un elemento del otro, y viceversa, es decir, que los elementos se pueden ordenar en pares, sin que haya sobrantes. Tal correspondencia se llama a menudo biunívoca, y si existe entre A y B escribimos: $A = B$. Si uno de los dos conjuntos contiene mayor número de elementos que el otro, si, por ejemplo, en A hay más elementos que en B, el conjunto A se considera mayor que el conjunto B, hecho que se expresa por la desigualdad $A > B$. Si lo contrario fuese verdad, sería $A < B$.

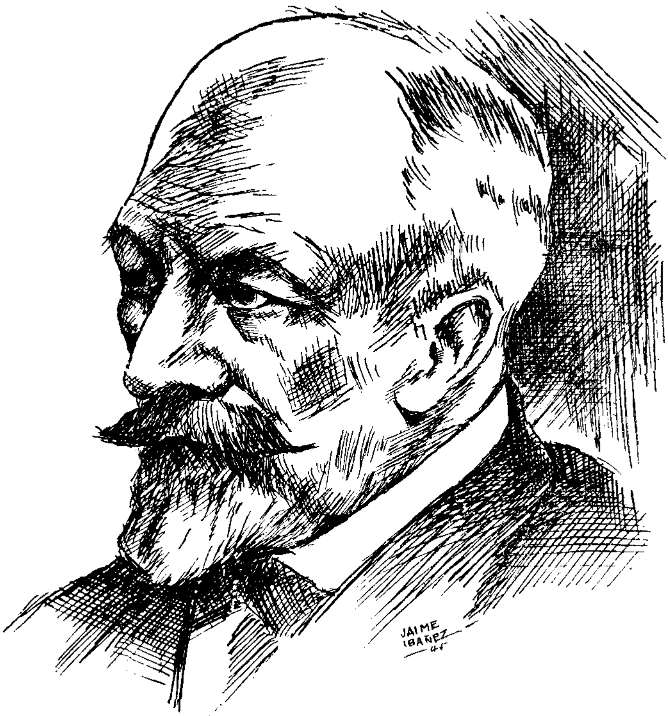
Muchos autores, sin embargo, evitan la idea de igualdad en conjuntos y prefieren el término "coordinables". Este último término se justifica porque dos conjuntos se comparan por la posibilidad de coordinar de manera biunívoca los elementos de uno a los del otro. Pero, úsese el término "coordinable" o "igual", nos parece que el símbolo indicado para establecer tal hecho debe ser el clásico $=$.

Para tales conjuntos existen pues reglas parecidas a las de la aritmética, en cuanto a suma, resta, multiplicación y división, cuyos detalles se han elaborado cuidadosamente pero se escapan al espacio disponible para este ensayo.

Conjuntos Infinitos

La idea del infinito inspiraba un horror, para nosotros casi inimaginable, a los griegos de la época clásica. Lentamente, y con muchas dificultades, penetraba en la mente matemática el concepto del infinito. Ya Galileo sintió, como vimos, la necesidad de introducir el infinito en la matemática, y en uno de sus diálogos llega a explicar el hecho de que cualquier línea contiene la misma cantidad de punto que otra, porque cada una contiene una infinidad.

Seguramente es esta una idea muy poco satisfactoria para la mente moderna, porque el concepto del infinito no está claramente determinado y nos escapa fácilmente. Añadir una canti-



GEORG CANTOR

dad finita o aun infinita a una u otra cantidad infinita no parece cambiar su carácter, pero como no sabemos exactamente qué ocurre, la manera de raciocinar que Galileo usa nos satisface poco.

Justamente el mérito de Cantor es haber sentido lo poco satisfactorio de este proceder, hasta tal grado que se dio a establecer la prueba exacta, y el estudio detenido del infinito. Siglos antes los matemáticos habían trabajado con la idea del infinito con más o menos claridad e introspección en lo que hacían. El gran Gauss se opuso violentamente hasta en 1831, al uso irrestricto del infinito, por lo poco preciso que la idea contenía; y estableció con su autoridad la norma para los cincuenta años siguientes, hasta que Cantor, con un valor cuyo alcance es difícil comprender para nosotros, desafió a la tradición.

Cuál cambio se ha producido en estos sesenta años, desde la primera publicación de Cantor, se puede ver, si tenemos en cuenta, que para nosotros la idea del infinito es una necesidad matemática, digan las razones lógicas y la experiencia cualquier cosa que quieran. Si en la matemática introducimos el infinito, lo hacemos por razones netamente matemáticas, y por ningunas otras. Ya el estudio de elementos tan sencillos como nuestros números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, ... nos lleva con una necesidad absoluta al infinito. Porque al preguntarnos cuál es el número más grande entre éstos, no hay respuesta finita. No existe ningún número finito que sea el mayor de todos, porque para cualquiera que escojamos, sea tan grande como se quiera, siempre existe uno que es mayor aún. Los números naturales, o como dice Cantor, el conjunto de los números naturales, es un conjunto infinito; al tratar de expresar el total de sus elementos, no encontramos ningún número finito que haga tal oficio.

Una vez establecida la idea de los conjuntos infinitos, surge automáticamente esta pregunta: ¿de qué manera podemos trabajar con ellos? ¿Existen algunas reglas para eso? Antes de todo se presenta el problema de la igualdad. ¿Puede decirse si dos conjuntos son iguales, siendo ambos infinitos? Cantor sale del problema de la comparación de dos conjuntos finitos. ¿Cuándo los llamamos iguales? Como expusimos arriba, son iguales cuando tienen igual número de elementos. En otras palabras, dos conjuntos finitos son iguales cuando a cada elemento del primero se puede coordinar un elemento del segundo, de una manera biunívoca.

De la misma manera Cantor formula la igualdad de dos conjuntos infinitos. Si es posible coordinar los elementos de un conjunto en tal forma biunívoca a los elementos del otro, los dos conjuntos se consideran como iguales. Especialmente un conjunto M con los elementos (a, b, c, d, e, ...) es igual al conjunto de los números naturales, si se puede decir cuál de los elementos de M es el primero, cuál el segundo, cuál el tercero, etc. Como los números naturales son usados para numerar o contar, Cantor llama los conjuntos iguales al conjunto de los números naturales, *conjuntos numerables.*

El Conjunto de los Numeros Racionales

El próximo paso que da Cantor es averiguar si además de los números naturales hay otros conjuntos numerables; y llega a una respuesta afirmativa en el campo de los números racionales. Los números racionales son definidos por un quebrado $\frac{p}{q}$, en el cual tanto el numerador p como el denominador q son números naturales cualesquiera. Para evitar que dos quebrados $\frac{p}{q}$ y $\frac{p'}{q'}$ representen el mismo número racional se exige además que p y q sean primos entre sí. ¿Existe, pregunta Cantor, la posibilidad de coordinar los elementos del conjunto de números racionales a los números naturales? En otras palabras, el conjunto de los números racionales ¿es numerable?

La respuesta que da es la siguiente: Si tomamos los ejes X y Y de un sistema rectangular de coordenadas, si establecemos la unidad y cubrimos el plano con una red de mallas que son formadas por las paralelas a los dos ejes en la distancia 1, 2, 3, etc., los nudos de tal red representan siempre un par de números enteros, una x y una y. Tomando y como numerador, x como denominador de un quebrado, los puntos del plano representan pues el conjunto de los números racionales, incluyendo, claro está, muchas repeticiones. Principiando con un punto cualquiera, sea $x = 1$, $y = 1$, se da una vuelta espiral con el centro 0 y se llega progresivamente a comprender todos los números racionales, incluyendo las ya mencionadas repeticiones. En nuestro ejemplo la serie será:

$1, 0, -1, +1, 0, -1, -2, +2, +1, +\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1,$
$-2, \ldots$ etc.

Tachando los números que ya se han anotado, obtenemos:

$+1, 0, -1, -2, +2, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -3, +3, +\frac{3}{2},$

$+\frac{2}{3}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -4, +4, +\frac{4}{3}, +\frac{3}{4},$

$+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \ldots$ etc.

Que este sistema comprende realmente todos los números racionales se ve fácilmente. Si queremos saber si un número racional cualquiera $\frac{p}{q}$ está comprendido, tenemos que buscar sencillamente la intersección de la paralela horizontal que lleva el número p con la paralela vertical que lleva el número q. La manera de ordenar los números racionales comprende, pues, todos los números racionales, y nos da además una manera de colocarlos en orden que permite coordinar a cada uno de los números racionales un número natural de una manera biunívoca. El conjunto de los números racionales es, pues, numerable, y por consiguiente igual al conjunto de los números naturales.

Conjunto de los Numeros Algebricos

Ya Euclides demostró la existencia de números irracionales de una manera tan ingeniosa que la damos en seguida en nuestros símbolos modernos, porque su manera de proceder es casi exactamente la misma usada en la teoría de conjuntos.

Euclides demuestra que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Para esto dice: Sea $\sqrt{2}$ un número racional; entonces tenemos $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Como cualquier quebrado puede reducirse a su forma más sencilla, o sea a una forma donde numerador y denominador son primos entre sí, suponemos que $\frac{p}{q}$ sea tal forma, que no se puede reducir más. Si p y q son primos entre sí, es imposible que ambos sean números pares; uno por lo menos debe ser impar. Si $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ tenemos $\frac{p^2}{q^2} = 2$, o sea, $p^2 = 2\,q^2$. Eso quiere decir que p^2 es par. Siendo un cuadrado perfecto de p, éste también debe ser par. Si p es par, podemos escribir $p = 2r$, donde r es un número entero. Teníamos $p^2 = 2q^2$. Sustituyendo el nuevo valor de p tenemos: $4r^2 = 2q^2$, de donde: $q^2 = 2r^2$. Eso significa que también q debe ser par, lo que va contra nuestra suposición de que ambos no pueden ser pares.

Establecida así la existencia de los números irracionales como distintos de los racionales, falta estudiar el alcance completo de este nuevo tipo de números. Otra vez se presenta una enorme dificultad, porque pronto descubrimos que los números irracionales nos llevan al problema de la solución de la ecuación algébrica más general, que es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots\dots\dots$$
$$+ a_{n-2}\,x^2 + a_{n-1}\,x + a_n = 0,$$

donde los coeficientes a_p son números naturales. (Esta suposición se puede luégo ampliar a la admisión de que sean ellos mismos números algébricos. Esto es posible, porque el campo algébrico es un campo cerrado; es decir, aplicando cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética a ellos, y admitiendo también la extracción de raíces de cualquier grado a un número algébrico, el resultado es siempre un número algébrico).

El teorema fundamental del álgebra dice que toda ecuación como la descrita arriba debe tener una solución que puede ser real o compleja; y si n es impar, debe por consiguiente siempre tener una solución real. Al conjunto de todas las soluciones reales de todas las ecuaciones algébricas llamamos conjunto de los números algébricos. Fue un golpe maestro de Georg Cantor el demostrar que también este conjunto es numerable! Por ser de gran interés, y porque deja ver el ingenio de Cantor, damos en seguida la prueba, tal como él mismo la ha dado:

Como primer cosa Cantor introduce la idea de la "altura" de una ecuación algébrica. Se obtiene la altura de una ecuación si se suman los valores absolutos de sus coeficientes, más el grado de la ecuación menos uno. La altura de una ecuación se representa, pues, en la forma siguiente:

$$\text{Altura} = (n - 1) + \sum_{p=0}^{p=n} [a_p].$$

Dos ejemplos pueden ilustrar el proceso:

La ecuación $3x^2 + 5x - 7 = 0$ tiene una altura:

$$h = (2 - 1) + 3 + 5 + 7 = 16.$$

La ecuación $2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 2x - 9 = 0$ tiene por altura:

$$h = (4 - 1) + 2 + 4 + 5 + 2 + 9 = 25.$$

En seguida Cantor demuestra que existe solamente una cantidad finita de ecuaciones que tienen la misma altura h, así que es posible ordenar las ecuaciones algébricas de acuerdo con su altura, principiando con las ecuaciones de altura $h = 1$. Dentro de los grupos con ecuaciones de la misma altura se pueden ahora formar subgrupos de ecuaciones que tienen el mismo grado, y entre estos subgrupos, si fuese necesario, se pueden ordenar las ecuaciones una vez más por sus coeficientes, poniendo como primera aquella que tiene el mayor primer coeficiente. Si en tal caso se encuentran dos con el mismo primer coeficiente, éstas se ordenan de acuerdo con su segundo coeficiente, etc. Procediendo de esta manera las ecuaciones algébricas se pueden ordenar en forma unívoca, lo que es equivalente a decir: el conjunto de las ecuaciones algébricas es numerable.

Cada ecuación algébrica puede tener una o más raíces reales, pero ninguna puede tener más raíces que su grado, y por consiguiente su altura. De suerte que las raíces se pueden también ordenar. Si convenimos en que cada número algébrico que obtenemos de esta manera se suprime al presentarse por segunda vez, eliminando así toda repetición, tenemos, pues, un conjunto ordenado de los números algébricos, en el cual a cada número algébrico corresponde un lugar bien definido y podemos decir que el conjunto de los números algébricos es también numerable.

Aquí conviene demorarnos un poco y mirar hacia atrás. Los números enteros o naturales forman, como vimos, un conjunto infinito que sin embargo es fácil de controlar. Ya más difícil es el control sobre los números racionales, pero también en ellos hay algo familiar. Si tratamos de representar el conjunto de estos números racionales por una recta, la recta de los números, parece que tal recta está densamente ocupada por puntos y que no queda ningún espacio desocupado. Pero Dedekind con su cuña o cortadura (Schnitt) y Euclides, como vimos arriba, han demostrado que entre los puntos que marcan los números racionales sí queda una infinidad de espacios desocupados que corresponden a los números irracionales, así, pues, solamente entonces tenemos un conjunto que parece representar a todos los puntos de la recta. Los números racionales forman un conjunto más denso que los números naturales, aunque sean coordinables o formen conjuntos iguales. El conjunto de los números algébricos es aún más denso, y mucho más denso que el conjunto de los números racionales. Su densidad es tal, que no podemos imaginarnos que entre estos números quepan otros, ni mucho menos que tales otros, si los hay, pudiesen tener una densidad aún mayor. Sin embargo, desde los tiempos de Liouville (1844) sabemos que existen números que no pueden ser representados por ecuaciones algébricas. Y aunque la recta parece densamente llenada con puntos, representantes de los números algébricos, tenemos que convencernos que queda una infinidad de puntos que todavía no tienen, para decirlo así, su rótulo. Pronto veremos además, que su cantidad es mucho más grande que los puntos con rótulo algébrico.

Después de que para tantos conjuntos inimaginablemente grandes se haya demostrado que son numerables, se presenta la idea, o tal vez la sospecha, de que todos los conjuntos infinitos son numerables, o sea, que el infinito es en el fondo uno y el mismo. Si así fuera, los números algébricos más los trascendentales, es decir, los números reales, deberían ser numerables; en otras palabras, se podrían escribir en cierto orden.

Otra vez se muestra el gran genio de Cantor al refutar esta idea. Fracasado el ensayo de demostrar la numerabilidad del conjunto de los números reales, Cantor quedó convencido, desde el año 1874, de que debe haber una segunda clase de infinidad:

los conjuntos infinitos no numerables, y que los números reales forman tal conjunto. La prueba la encontró solamente nueve años más tarde, en 1883.

Procediendo de la manera clásica, es decir, llevando al absurdo lo contrario de lo que se quiere demostrar, Cantor supone que los números reales sean numerables y que estén escritos en una forma ordenada. Como en tal conjunto aparecen también los números racionales, cuya representación en forma decimal no siempre corresponde a una fracción infinita, Cantor resuelve escribirlos con infinidad de ceros. Así obtiene su conjunto de números reales, del cual supone que es numerable, en la forma siguiente:

$$
\begin{array}{l}
0,\ a_1 \,/\, a_2 \,/\, a_3 \,/\, a_4 \,/\, a_5 \,/\, a_6 \,/\, a_7 \,/\, a_8 \,/\, \ldots\ldots\ldots \\
0,\ b_1 \,/\, b_2 \,/\, b_3 \,/\, b_4 \,/\, b_5 \,/\, b_6 \,/\, b_7 \,/\, b_8 \,/\, \ldots\ldots\ldots \\
0,\ c_1 \,/\, c_2 \,/\, c_3 \,/\, c_4 \,/\, c_5 \,/\, c_6 \,/\, c_7 \,/\, c_8 \,/\, \ldots\ldots\ldots \\
0,\ d_1 \,/\, d_2 \,/\, d_3 \,/\, d_4 \,/\, d_5 \,/\, d_6 \,/\, d_7 \,/\, d_8 \,/\, \ldots\ldots\ldots \\
0,\ e_1 \,/\, e_2 \,/\, e_3 \,/\, e_4 \,/\, e_5 \,/\, e_6 \,/\, e_7 \,/\, e_8 \,/\, \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Y así ad infinitum.

Los números representados por letras con índices son una de las cifras entre 0 y 9. Por el sistema llamado diagonal se construye ahora un número que con toda la seguridad no está entre los números ordenados en el diagrama de arriba. Este número sea: $0,\ a_0 \,/\, b_0 \,/\, c_0 \,/\, d_0 \,/\, e_0 \,/\, \ldots\ldots\ldots$, donde cada una de las letras con índice 0 representa una cifra entre 1 y 8 pero teniendo cuidado que $a_0 \ddagger a_1$, $b_0 \ddagger b_2$, $c_0 \ddagger c_3$, $d_0 \ddagger d_4$, $e_0 \ddagger e_5$, etc., etc., y todos $\ddagger$ 9, porque de otra manera sería posible que tal número terminase en una serie infinita de nueves y sería por consiguiente racional.

El nuevo número construído de esta manera es así seguramente distinto en una de sus cifras de cada uno de los números del diagrama ordenado, su primera cifra es distinta a la primera cifra del primer número, y por consiguiente el nuevo número es distinto al primer número del conjunto numerable, su segunda cifra es distinta a la segunda cifra del segundo número del conjunto numerable, y por consiguiente el nuevo número es también distinto del segundo número del conjunto numerable. Así podemos seguir y queda claramente demostrado, que el número construído por el sistema diagonal es distinto a todos los números del conjunto numerable, o sea, que no puede pertenecer a este conjunto. Pero el número construído es seguramente un número real. Esto contradice nuestra suposición de que el diagrama comprende todos los números reales, lo que equivaldría a decir que el conjunto de los números reales es numerable. Con esto Cantor ha demostrado que la suposición de la numerabilidad de los números reales nos lleva a una contradicción, y que por consiguiente el conjunto de los números reales no puede ser numerable, o sea: que el infinito tiene por lo menos dos clases, una de los conjuntos numerables, y otra de los conjuntos no numerables.

Desde el punto de vista del infinito, Cantor ha llegado con esta demostración al punto central de toda su teoría. Por primera vez en la historia quedó demostrado en forma clara e inequívoca, que infinito e infinito no es necesariamente lo mismo, que hay un infinito que es mucho más grande que otro infinito.

NUMERO CARDINAL

Para facilitar hasta cierto grado la discusión de estas distintas clases de infinitos, Cantor introduce la idea del "Número Cardinal". En el campo finito el número cardinal está bien definido. Para cualquier conjunto número cardinal significa lo mismo que el número de sus elementos. Decimos que dos conjuntos finitos son iguales, o mejor equivalentes, si el primero tiene tantos elementos como el segundo, o cuando tienen el mismo número cardinal. En tales dos conjuntos los elementos del primero se pueden siempre coordinar con los miembros del segundo, formando pares sin que del uno ni del otro sobre un elemento.

Si traspasamos esta idea a los conjuntos infinitos numerables, es lógico asumir que dos conjuntos numerables deben tener el mismo número cardinal, pudiéndose coordinar con cada elemento del primero un elemento del segundo. Así, todos los conjuntos numerables deben tener el mismo número cardinal, que Cantor llama A, de acuerdo con la palabra alemana para numerable: "abzæhlbar".

Luégo se da el segundo número cardinal C al continuo. Se tiene aquí la tentación de pasar por encima de la idea del continuo, esperando que el lector se forme su idea del continuo más o menos según la receta: ¿El continuo, no sabe Ud. qué es? ¡El continuo es algo continuo! Esto me recuerda a uno de nuestros profesores de la facultad. Cuando un estudiante decía: "Y ahora se ve inmediatamente...", el profesor interrumpía y observaba: "Cuando Ud. dice que se ve inmediatamente, comprendo que Ud. no lo ve, porque si fuera tan fácil, nos diría por qué".

El continuo es, pues, una serie de objetos, supongamos puntos en una recta, que llenan la recta en forma densa, tal que en ninguna parte se pueda encontrar un punto que no pertenezca a dicho continuo. Sin saltos, sin interrupciones, sin staccatos, los puntos del continuo se siguen uno al otro, como la naturaleza que no hace saltos, como el tiempo que transcurre sin intermedios, por pequeños que sean. El tiempo es en su transcurso la imagen perfecta del continuo.

Lo contrario del continuo, y un ejemplo que nos puede familiarizar algo con el problema que se presenta, es la serie de las imágenes en el cine. En realidad vemos en un segundo 24 imágenes distintas y solamente la rapidez del cambio y la incapacidad de nuestros ojos al observar este hecho, nos hacen creer que vemos un movimiento continuo. Pero realmente el espacio de un segundo está cortado en 24 intervalos, y en vez de ver un *legato*, ocurre un *staccato*. El continuo sería luégo el movimiento real; la película nos muestra una selección de ciertos momentos staccatos. Los números reales representan análogamente el continuo, los números algébricos apenas un staccato que nuestra imaginación deficiente confunde con el continuo.

De Dedekind tenemos el postulado de la continuidad en su forma más sencilla y rígida. Si tenemos en la recta una serie de segmentos A_pB_p de longitud decreciente y si A_qB_q es siempre contenido en A_pB_p si $q > p$, existe un punto X que es punto de todos estos segmentos. Dicho punto X es representante de un número real y hay para cada serie A_pB_p solamente un punto X. Si no fuera así, existiría otro punto Y y desde un cierto $p = k$ todos los A_kB_k serían mayor que un cierto segmento XY, lo que contradice a la idea del decrecimiento continuado.

Falta espacio para exponer cómo Cantor demuestra que no solamente los números reales forman un conjunto del número cardinal C, sino también los mismos números trascendentales. La idea es que añadir o quitar a un conjunto no numerable un conjunto de número cardinal menor, no cambia nada en su carácter. Si quitamos al conjunto de los números reales el conjunto numerable de los números algébricos, el resultado no puede ser numerable. Si fuera así, la suma de dos conjuntos numerables resultaría un conjunto no numerable, lo que es imposible.

Siendo el número cardinal del conjunto de los números reales C, Cantor demuestra, pues, que la cantidad de números trascendentales es mucho más grande que la cantidad de números algébricos. En nuestra recta de puntos que representan los números, los espacios vacíos que quedan después de colocar todos los puntos que corresponden a números algébricos son mayores que los puntos ocupados.

Numeros Cardinales mas Grandes

Surge ahora la pregunta, si hay otros conjuntos con números cardinales distintos a A y C. ¿Existe, por ejemplo, un número cardinal mayor a A y menor a C? A esta pregunta se debe contestar en forma dudosa, es decir: hasta hoy no ha sido posible construír tal conjunto. O resulta el conjunto $= A$, o $= C$. Pero sí fue posible encontrar conjuntos cuyo número cardinal es mayor que C, por ejemplo, el conjunto funcional, o sea, el conjunto formado por todas las correspondencias que se pueden establecer entre dos continuos. Este conjunto no se puede coordinar con los puntos de un continuo, como éste no se puede coordinar con los números naturales. El número cardinal de este conjunto funcional es F. Con método similar al método diagonal descrito arriba, se pueden entonces derivar nuevos conjuntos con números cardinales aún mayores a F, y el proceso se puede continuar libremente, de modo que parecido a los números naturales no existe el número cardinal más grande, idea a la cual volveremos más tarde.

Cubo Igual a Recta

Siguiendo los pasos de Cantor experimentamos raras ideas con las cuales tenemos que familiarizarnos lenta y cuidadosamente. Que el infinito mismo tiene su estructura, que hay distintos grados de infinidad es una idea tan nueva y sorprendente, que vemos que la teoría de los conjuntos nos tiene reservadas nuevas sorpresas. Hélas aquí:

¡La cantidad de los puntos de un segmento de recta cualquiera no es menor que la cantidad de los puntos de una recta infinita! La prueba es relativamente sencilla y fue publicada hace poco tiempo en Colombia. Sin embargo, y porque al lector como al autor, será tal vez tan difícil encontrar dicha demostración, se explica en seguida. En el punto medio del segmento en cuestión AB se levanta la perpendicular. Luégo se escoge un punto S cualquiera que tenga la misma distancia de la perpendicular A y se trazan por S todas las rectas que caben entre SA y SO. Cada una de estas rectas une un punto p de AO con un punto P de la semirrecta infinita de O hacia la izquierda, coordinando así en forma biunívoca a todos los puntos de AO con los puntos de la semirrecta infinita. Como el mismo procedimiento se puede repetir con la semirrecta hacia la derecha y el segmento OB, hemos coordinado los puntos del segmento de recta AB a los puntos de una recta infinita, demostrando así que el continuo es el mismo para un segmento de recta que para una recta infinita; ambos tienen el número cardinal C.

Pero Cantor no se contentó con eso. Si preguntamos a cualquiera de entre nosotros que no tenga conocimientos detallados sobre estos problemas, cuál de las dos ideas es correcta: que en el espacio hay más puntos o igual cantidad de puntos que en una recta, la respuesta se inclinará naturalmente a confirmar la primera. Sin embargo, nuestra imaginación nos engaña. La verdad es que el espacio no tiene más puntos que la recta, o sea: el número cardinal de todos los puntos del espacio es también C; el continuo linear y el continuo cúbico es el mismo. Cantor va aún más allá; dice y comprueba que hasta para un espacio que tiene una infinidad numerable de dimensiones, el continuo tiene el mismo número cardinal C que una recta; ni siquiera es más grande su número cardinal que el de un segmento de recta de un centímetro de largo.

En vez de dar la demostración completa para este teorema en su mayor amplitud posible, vamos a dar en seguida la demostración para el espacio de tres dimensiones. Como el conjunto de los puntos de un segmento de recta de un centímetro es equivalente al conjunto de los puntos de una recta infinita, es suficiente dar la demostración para tal segmento de recta y para un cubo de 1 cm. de arista, porque tanto el conjunto de los puntos del espacio es igual al conjunto de los puntos en el cubo de un centímetro, como el conjunto de los puntos de una recta infinita es igual al conjunto de los puntos de un segmento de recta de un centímetro de largo.

Construyamos un sistema de coordenadas rectangulares, que tenga su origen en uno de los vértices del cubo y cuyos tres ejes coincidan con las aristas del cubo; a cada uno de los puntos en el interior del cubo le corresponden tres coordenadas x, y, z que se pueden representar por fracciones decimales infinitas así:

$$x = 0, a_1 / a_2 / a_3 / a_4 / a_5 / \ldots\ldots\ldots$$
$$y = 0, b_1 / b_2 / b_3 / b_4 / b_5 / \ldots\ldots\ldots$$
$$z = 0, c_1 / c_2 / c_3 / c_4 / c_5 / \ldots\ldots\ldots$$

Ahora procedemos a formar un número nuevo, combinando estas tres fracciones decimales en la forma siguiente: tomamos primero la primera cifra de cada una, luégo la segunda, luégo la tercera, etc., y las escribimos en orden alternando:

$$r = 0, a_1 / b_1 / c_1 / a_2 / b_2 / c_2 / a_3 / b_3 / c_3 / a_4 / \ldots\ldots\ldots$$

El número r es seguramente un número real, menor que 1 y designa un cierto punto sobre un segmento de recta de longitud un centímetro. A todos los puntos x, y, z del cubo se puede coordinar de esta manera un cierto punto r del segmento de recta y como para cada punto del cubo los a_p, b_p, c_p son diferentes, a cada punto del cubo corresponderá otro punto de la recta. La relación entre puntos del cubo y puntos de la recta es también recíproca, porque fácilmente un número real, que representa un punto de la recta, se descompone en tres números, representantes de un punto x, y, z del cubo.

LAS PARADOJAS

No puede ser tema de este corto ensayo una discusión de todas las antinomias de la teoría de los conjuntos y de todas las controversias que han surgido de ellas. Pero sería incompleta si no indicara por lo menos dos entre ellas para mostrar en dónde atacan los adversarios y hasta qué grado la teoría de Cantor ha podido estremecer todo el edificio de la matemática moderna, sin que se pueda ver hasta hoy cómo salir del problema. Es un caso parecido al famoso argumento de Zenón, en el que Aquiles persigue a la tortuga sin poder alcanzarla.

La primera paradoja o antinomia en que pensamos se presenta en la forma siguiente: Imaginémonos que todos los conjuntos estén divididos en dos conjuntos. Uno, S, que contenga todos los conjuntos que se contienen a sí mismos como subconjuntos; y el otro, T, que contenga todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Que el conjunto T existe, no necesita prueba. La existencia de S se puede comprobar con la existencia de uno de sus elementos. El conjunto de todas las ideas abstractas es seguramente una idea abstracta; y por consiguiente se contiene a sí mismo como elemento. Otros ejemplos se pueden construír de manera semejante.

Como hemos dividido todos los conjuntos en los dos S y T, seguramente cualquier conjunto debe pertenecer o a S o a T. Vamos ahora a ver a cuál de los dos pertenece T. Existen dos posibilidades: 0 es el elemento de T o de S; supongamos que es elemento de T; entonces es, según definición, un conjunto que no se contiene a sí mismo como subconjunto, lo que evidentemente contradice la suposición de que todos los elementos de T son conjuntos que no se contienen como elemento. Por consiguiente T debe ser un elemento de S. Pero siendo T subconjunto de S, es un conjunto que se contiene a sí mismo como elemento. Luégo T sí es elemento de sí mismo, lo que no puede ser, según lo antes expuesto. La contradicción a la cual se llega de esta manera no tiene solución. Fue históricamente una de las primeras que se descubrieron en la teoría de Cantor, y saliendo de ella los adversarios ocupan sus posiciones.

Una u otra antinomia se presenta cuando formamos el conjunto de todos los conjuntos. Si éste es un conjunto cantoriano, debe tener un número cardinal; y dicho número cardinal debe ser el más grande imaginable. ¿O puede uno imaginarse un conjunto aún más poderoso? Al final del párrafo sobre números cardinales más grandes habíamos comprobado que no existe un número cardinal más grande, y ahora sin embargo lo encontramos, lo que nos pone frente a una segunda contradicción insoluble.

Los dos Bandos

Como ya se dijo, alrededor de estas antinomias se han formado dos bandos adversarios. Un grupo de matemáticos, encabezado por Hilbert, Russell y Zermelo, defiende la teoría de Cantor y tratan de salvarla con la admisión de que el uso irrestricto de las palabras "todo", "conjunto", "correspondencia" y "número" no es posible. Parece que procediendo de esta manera, y buscando una base nueva para la teoría, construyéndola en forma perfectamente lógica y puramente formal, encontraremos la solución del problema. Entonces tal vez se podrá crear un nuevo concepto del infinito, que no puede atacarse y que nos pondrá encima del problema de las paradojas mencionadas.

El grupo adversario, que fue encabezado por Kronecker († 1891), y en nuestros días por Brouwer y Weyl, exige una nueva modestia. Dicen que el mal ha entrado a la matemática mucho antes de Cantor. Ellos exigen que para la admisión de un concepto en la matemática no solamente debe ser "bien definido", sino también construíble. Con esto excluyen en principio el infinito, limitándose a procesos finitos, aunque, como una especie de concesión, admiten tales procesos infinitos que pueden reducirse a un número finito de reglas.

Un estudio bien documentado sobre esta lucha científica lo encuentra el lector en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas*, Vol. IV, Nº 14, correspondiente al primer trimestre de 1941, donde Francisco Vera fija las posiciones de los dos bandos en un estudio titulado "El Tertium Non Datur en la Matemática".

Aunque el autor de estas líneas es partidario en esta lucha, y no oculta que se inclina hacia el primer grupo, cuya actitud le parece contener en esencia la escuela filosófica del indeterminismo, no puede ser el contenido de este ensayo tomar parte en la lucha. En conmemoración del primer centenario del gran fundador de la teoría de los conjuntos, queríamos dar una idea de lo que es la teoría. Si estas líneas pueden despertar por lo menos en tres lectores un interés por la teoría y los incita a estudiarla a fondo, habremos hecho suficiente labor.

La actitud del no iniciado a la ciencia muchas veces es: ¿para qué se hace todo eso? ¿De qué me sirve? Abordar un problema científico con tal criterio no sirve de gran cosa. ¿Para qué hicieron los griegos su estudio de las secciones del cono? Si hubieran preguntado en tal forma, tal vez Kepler no habría podido hallar sus leyes sobre el movimiento de los planetas. ¿Y de dónde obtendría Einstein el fundamento matemático de su teoría si otros no hubieran estudiado antes la geometría de espacios multidimensionales? La teoría de Cantor ha tenido efecto mucho más allá de su campo original. Formó no solamente el punto de salida para la discusión fecunda de los fundamentos de toda la ciencia; se nota su influencia estimulante en la teoría de los números, en la teoría de las funciones, y el concepto de los integrales de Cauchy y Lebesgue se basa esencialmente en la teoría de Cantor.

Es demasiado temprano para dictar un veredicto sobre una teoría que apenas tiene sesenta años. Pero cualquiera que sea la decisión del futuro, el hombre cuyo centenario se celebra este año ha contribuído con ella a la matemática en una forma como pocos antes de él y su nombre no podrá ser borrado de los anales de la ciencia.

De pura ascendencia judía por ambas ramas, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor fue el hijo mayor del próspero comerciante Georg Waldemar Cantor y de su esposa, la artista María Bohm. El padre nació en Copenhague, Dinamarca, pero emigró joven a San Petersburgo, donde el matemático Georg Cantor nació el 3 de marzo de 1845. Una enfermedad pulmonar forzó al padre a trasladarse a Frankfurt, Alemania, en 1856, donde vivió en confortable reposo hasta su muerte, en 1863. De esta curiosa mezcla de nacionalidades es posible que muchas patrias reclamen a Cantor como hijo. Cantor mismo prefería a Alemania, aunque ciertamente no puede decirse que Alemania lo prefiera a él.

Georg tenía un hermano llamado Constantin, que llegó a ser oficial del ejército alemán (¡vaya una carrera para un judío!), y una hermana, Sophie Nobiling. El hermano fue un buen pianista; la hermana una notable dibujante. La naturaleza artística de Georg encontró su turbulento escape en las matemáticas y en la filosofía, clásicas y escolásticas. Los temperamentos artísticos muy

marcados de estos hermanos fueron heredados de la madre, cuyo abuelo fue un director musical, uno de cuyos hermanos, en Viena, fue maestro del célebre violinista Joachim. Un hermano de María Cantor fue músico, y una de sus sobrinas, pintora. Si es cierto, como dicen los psicólogos, que la normalidad y la estabilidad flemática son equivalentes, todo este brillo artístico en su familia debió ser la raíz de la inestabilidad de Cantor.

Su familia era cristiana; su padre fue convertido al protestantismo; su madre era católica de nacimiento. Como su archienemigo Kronecker, Cantor prefirió el protestantismo y adquirió una afición singular hacia las interminables sutilezas de la teología medioeval. Si no hubiera sido matemático posiblemente hubiera dejado huellas en la filosofía o en la teología. Como detalle interesante al respecto, la teoría de Cantor sobre el infinito fue estimulada por los jesuítas, cuyas mentalidades lógicas veían en las imágenes matemáticas situadas más allá de su comprensión teológica, indudables pruebas de la existencia de Dios y de la consistencia de la Santísima Trinidad. Sobra decir que Cantor, que tenía agudos el espíritu y la lengua, ridiculizó el absurdo de tales pruebas.

(El estudio sobre Cantor que aparece publicado arriba, detalla la parte de su biografía referente a su carrera como matemático).

En la primavera de 1884, cuando contaba 40 años de edad, Cantor sufrió por primera vez una de las crisis que hubieron de repetirse con diversa intensidad durante el resto de su larga vida y lo apartaron de la sociedad, llevándolo al amparo de una clínica de enfermedades mentales. Choques depresivos lo rebajaron a sus propios ojos, y llegó a dudar de la solidez de su obra. Durante uno de sus intervalos lúcidos pidió a las autoridades de Halle que lo trasladaran de su cátedra de matemáticas a una de filosofía. Muchos de sus mejores estudios sobre la teoría positiva del infinito fueron realizados entre un ataque y otro. Al recuperarse de uno de ellos, notaba que su mente se tornaba extraordinariamente clara.

Cantor murió en un hospital de enfermedades nerviosas de Halle, el 6 de enero de 1918, a la edad de 73 años. Se le rindieron por fin honores y reconocimientos, y hasta su amargo antagonismo con Kronecker fue olvidado. Sin duda fue satisfactorio para Cantor recordar que ambos se habían reconciliado, por lo menos superficialmente, algunos años antes de la muerte de Kronecker, en 1891.

(Traducido y extractado del libro "Men of Mathematics" de E. T. Bell).