CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

ESTUDIO DE UNA FORMA DE EQUILIBRIO

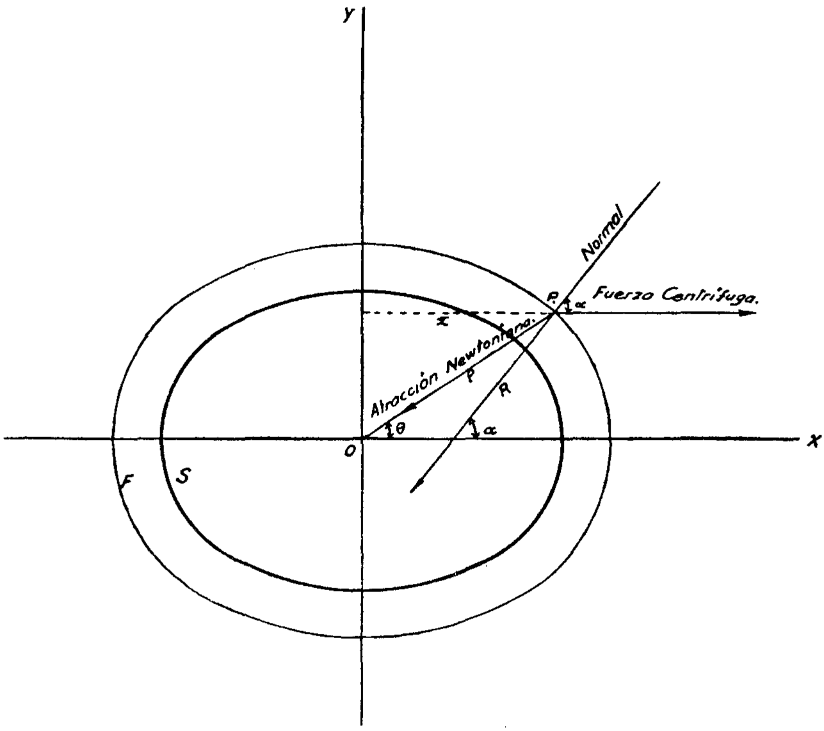
por BELISARIO RUIZ WILCHES

Vamos a estudiar la forma de equilibrio que toma un cuerpo parcial o totalmente flúido, cuando gira alrededor de un eje que pasa por su centro de gravedad, estando sujeto, por una parte, a la atracción Newtoniana y por la otra, a una acción que tiende a darle una forma de equilibrio dinámico, diferente del estático. Esta acción trata de alejar del eje de rotación las moléculas del cuerpo y suponemos que esa fuerza está representada por la expresión $F_2 = \frac{2\, m\, v^2}{r}$, es decir, por un valor doble del que hasta hoy se ha adoptado para la fuerza centrífuga.

Estudiaremos solamente la curva que representa la sección meridiana del cuerpo, pues como la superficie de éste es engendrada por la rotación de dicha curva alrededor de un eje, se conocerá también la superficie engendrada por ella en su revolución.

Consideremos en la figura un núcleo sólido S, sobre el cual hay una capa flúida F. Supongamos que el eje de las ordenadas sea el de rotación y consideremos establecido el equilibrio. Sea en el punto P de la superficie una molécula de masa m que ya está en reposo, pues se han equilibrado las acciones que se ejercen sobre ella. Por tanto, la suma de las fuerzas exteriores dará una resultante que sigue la dirección de la normal a la curva de equilibrio.

Las dos fuerzas son pues: $F_1 = -\frac{K\, M\, m}{\rho^2}$ $\quad F_2 = \frac{2\, m v^2}{x}$



Proyectándolas sobre los ejes coordenados se tiene:

$$-\frac{KMm}{\varrho^2}\ cos\,\theta + \frac{2\,mv^2}{x} + R\ cos\,\alpha = o$$

$$-\frac{KMm}{\varrho^2}\ sen\,\theta + R\ sen\,\alpha = o$$

o sea:

$$-R\ sen\,\alpha = -\frac{KMm}{\varrho^2}\ sen\,\theta$$

$$-R\ cos\,\alpha = -\frac{KMm}{\varrho^2}\ cos\,\theta + \frac{2\,mv^2}{x}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$tg\,\alpha = \frac{-\dfrac{K\,M}{\varrho^2}\ sen\,\theta}{-\dfrac{K\,M}{\varrho^2} cos\,\theta + \dfrac{2\,v^2}{x}}$$

Pero como el coeficiente angular de la normal es $-\dfrac{dx}{dy}$:

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{-\dfrac{KM}{\varrho^2}\ sen\,\theta}{-\dfrac{KM}{\varrho^2}\ cos\,\theta+\dfrac{2v^2}{x}}$$

$$\frac{KM}{\varrho^2}\ (cos\,\theta\,dx+sen\,\theta\,dy)=\frac{2v^2}{x}\ dx$$

Pero como: $cos\,\theta=\dfrac{x}{\varrho}$

$sen\,\theta=\dfrac{y}{\varrho}$

$$\frac{KM}{\varrho^3}\ (x\,dx+y\,dy)=\frac{2v^2}{x}\ dx$$

Pero teniendo en cuenta que: $x^2+y^2=\varrho^2$, $2x\,dx+2y\,dy=2\varrho\,d\varrho$
Ahora bien: $v=Wx=2\pi\,\omega\,x$ (Siendo ω el número de revoluciones por segundo)

$$\frac{KM}{\varrho^2}\ d\varrho=\frac{2v^2}{x}\ dx=8\pi^2\omega^2 x\,dx$$

Integrando:

$$\int\frac{KM}{\varrho^2}\ d\varrho=\int 8\pi^2\omega^2 x\,dx$$

$$-\frac{KM}{\varrho}=4\pi^2\omega^2x^2+C$$

El valor de C se puede fijar así: para $x=O$, y llamando $\varrho_0=b$

$$-\frac{KM}{\varrho_0}=-\frac{KM}{b}=C$$

por tanto:

$$\frac{KM}{\varrho}=\frac{KM}{b}-4\pi^2\omega^2x^2$$

despejando a ϱ:

$$\varrho=\frac{KM}{\dfrac{KM}{b}-4\pi^2\omega^2x^2}\quad(1).$$

y elevando al cuadrado:

$$\rho^2 = \frac{K^2M^2}{\left(\frac{K\,M}{b} - 4\,\pi^2\,\omega^2\,x^2\right)^2}$$

De donde:

$$y^2 = \frac{K^2M^2}{\left(\frac{K\,M}{b} - 4\,\pi^2\,\omega^2\,x^2\right)^2} - x^2$$

y por tanto, teniendo en cuenta que en el segundo miembro aparece una diferencia de cuadrados, se tendrá:

$$y^2 = \frac{\left(K\,M - \frac{K\,M}{b}\,x + 4\,\pi^2\,\omega^2\,x^3\right)\left(K\,M + \frac{K\,M}{b}\,x - 4\,\pi^2\,\omega^2\,x^3\right)}{\left(\frac{K\,M}{b} - 4\,\pi^2\,\omega^2\,x^2\right)^2}$$

Esta es la ecuación de la curva meridiana del cuerpo.

Sin entrar en un análisis completo de tal curva, muy laborioso dado el grado de la ecuación, la simple inspección de ella nos suministra una serie de datos interesantes, suficientes para sacar una serie de conclusiones útiles respecto a la rotación de los cuerpos:

1)—La ecuación de la curva es de sexto grado en x.

2)—La curva es simétrica respecto al eje de las x y al de las y.

3)—La curva no se extiende más allá de la última raíz real de ecuación de sexto grado del numerador igualado a cero.

4)—Como la curva es simétrica, basta estudiar la parte comprendida en el primer cuadrante.

5)—Dada la forma de la ecuación que resulta de igualar a cero el numerador, ésta no puede tener sino, o dos raíces reales, una positiva y otra negativa, iguales en valor absoluto y cuatro imaginarias; o seis raíces reales, tres positivas y tres negativas, iguales dos a dos en valor absoluto.

6)—En el caso de dos raíces reales el cuerpo tiene una forma muy semejante a la de un elipsoide de revolución.

Vamos a tratar de estudiar numéricamente algunos aspectos de la ecuación que representa la curva que limita la sección meridiana.

Dividiendo el numerador y el denominador por la cantidad $(4\pi^2\omega^2)^2$ y llamando $C = \frac{KM}{4\pi^2\omega^2}$ la ecuación quedará:

$$y^2 = \frac{\left(C - \frac{C}{b}x + x^3\right)\left(C + \frac{C}{b}x - x^3\right)}{\left(\frac{C}{b} - x^2\right)^2} \quad (2)$$

Como el valor de C depende solamente de la masa del cuerpo en movimiento y de su rotación; y como además de este valor solamente figura en la ecuación el valor de b, resulta que conocida la masa, la rotación y el eje menor, quedará definida mecánicamente la forma del cuerpo que gira.

Si damos valores numéricos a los parámetros a que se ha hecho referencia se podrán encontrar para el caso singular que dichos parámetros representan, las soluciones de las ecuaciones de tercer grado del numerador y construír la curva por puntos. Bastará hacerlo en el primer cuadrante. Esto permitirá un completo análisis de todos los casos posibles y un estudio particular de cada uno de ellos; pero para ciertos casos especiales que vamos a estudiar resulta mucho más sencillo proceder de otra manera.

Supongamos, en primer lugar, que se trata de la TIERRA. Sustituyamos en el valor de C a ω por el valor de la rotación de la tierra, o sea:

$$\omega = \frac{1}{86164,1}$$

Este valor es esencialmente experimental y no interviene en su determinación otra magnitud que el tiempo. Además podemos determinar otros dos valores experimentalmente en el ecuador, sin que en ellos intervenga para nada la forma de la tierra; estos dos valores son: el radio ecuatorial de la tierra determinable por una operación geodésica y el valor de la gravedad determinable directamente por el péndulo. Con estos tres valores experimentales podemos, mediante la ecuación de equilibrio, determinar la forma que mecánicamente correspondería a la tierra así:

En la ecuación (2) hacemos $x^3 - \frac{C}{b}x + C = O$

para obtener tres de las soluciones del numerador.

Pero si a es una de las raíces de la ecuación (radio ecuatorial que conocemos experimentalmente), entonces tendremos

$$a^3 - \frac{C}{b}a + C = O$$

y por consiguiente:

$$b = \frac{Ca}{C + a^3} \quad (3).$$

Todos los valores que figuran en el segundo miembro son experimentales. El valor de $K\,M$ lo deducimos directamente de la gravedad g. Si aceptamos que el valor de a es de 6378429 metros (elipsoide de Clarke) y verificamos operaciones encontramos el siguiente resultado:

Valor de b deducido de operaciones geodésicas:	6356515 mtrs.
Valor de b deducido de la fórmula de equilibrio:	6356390 mtrs.
Diferencia	125 mtrs.

Si en vez de aceptar el valor de la gravedad de 9.78 en el ecuador para determinar a $K\,M$ de acuerdo con la ley de Newton, aceptamos como bueno para tal fin el valor deducido para el polo de la fórmula de Helmert, considerado siempre el elipsoide de Clarke, tendremos:

Valor de b deducido de operaciones geodésicas:	6356515 mtrs.
Valor de b deducido de la fórmula de equilibrio:	6356503 mtrs.
Diferencia	12 mtrs.

Es notable la concordancia de valores entre los deducidos de la medida geodésica de la tierra y los que se derivan de valores exclusivamente experimentales de acuerdo con la fómula que se obtiene de las tesis propuestas.

Pero la concordancia no es solamente en los ejes entre el elipsoide de comparación y la figura producida por la fórmula de equilibrio que se ha establecido; lo es en toda la extensión de la curva.

Supongamos que concuerdan los ejes del elipsoide de comparación con los de la figura de sexto grado y encontremos el radio vector en ambas figuras a los 45°, donde es presumible que pueda encontrarse la mayor diferencia.

El radio vector de la elipse es: $\varrho_e = \dfrac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}$ Tomando la fórmula (1) y haciendo $x = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ (lo que da para la elipse un ángulo de 45° 5′ 54″), tendremos:

$$\varrho = \frac{K\,M}{\dfrac{K\,M}{b} - 4\,\pi^2\,\omega^2\,\dfrac{b^2}{2}} = \frac{b}{1 - \dfrac{4\,\pi^2\,\omega^2\,b^2\,b}{2\,K\,M}}$$

pero teniendo en cuenta que $\omega^2 = \dfrac{1}{T^2}$ (Siendo T el período) y que la fuerza de la gravedad en el polo es $g_p = \dfrac{K\,M}{b^2}$ nos queda:

$$\varrho = \frac{b}{1 - \dfrac{2\,\pi^2\,b}{g_p\,T^2}}$$

Encontrando el valor numérico, hecha la comparación con el elipsoide de Hayford que da una diferencia mayor que el de Clarke, tendremos:

Radio vector en la curva:	6367278	metros
Radio vector en la elipse:	6367294	metros
Diferencia	16	metros

Como la concordancia en la tierra, en donde las medidas geodésicas se han practicado con tan riguroso esmero, es tan perfecta como se acaba de ver y como la fórmula es general para todo cuerpo en rotación, es fácil ensayar cómo resulta la comparación con JUPITER.

Sustituyendo valores en la ecuación (3) se obtiene el siguiente resultado:

Valor de b deducido de medidas micrométricas:	66617910 m. (Sampson)
Valor de b deducido de la fórmula de equilibrio:	65497800 m.
Diferencia:	1120110 m.

Esta diferencia no es exagerada pues como masa de Júpiter hemos tomado la masa total del sistema, incluyendo satélites; y para rotación, ya que la rotaciones observadas son varias, un promedio probable que es muy seguro no corresponda a la rotación verdadera del globo.

Pero todavía encontramos una relación de valores muy original y que se presta para otra comprobación.

En la fórmula (3) tendremos:

$$b = \frac{Ca}{C + a^3}; \quad \text{de donde:} \quad ba^3 = C\,(a - b); \quad \text{o sea:} \quad ba^2 = C\frac{a - b}{a}$$

de donde, teniendo en cuenta que $\frac{a - b}{a}$ es aplanamiento:

$$ba^2 = C.\ apl; \quad ba^2 = \frac{K\,M}{4\,\pi^2\,\omega^2}\ apl.$$

Sabiendo que la figura de equilibrio es muy semejante a un elipsoide de revolución, podemos suponer que no cometemos un gran error al sustituír su volumen por el del elipsoide de ejes iguales y poner por tanto:

$$\frac{4}{3}\pi\,a^2\,b = \frac{K\,M}{3\,\pi\,\omega^2}\ apl; \quad \text{o sea:} \quad \frac{3\,\pi}{K} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\,ba^2}\ \frac{1}{\omega^2}\ apl.$$

pero como $\frac{M}{V}$ es densidad absoluta ($\triangle$), nos quedará finalmente:

$$\frac{M}{V}\ T^2\,apl = \frac{3\,\pi}{K}$$

Como el segundo miembro es un número cuyo valor es idéntico para todo cuerpo en rotación, llamado T el número de segundos que gasta el cuerpo en dar una revolución tendremos:

$$\triangle\, T^2\, apl = \frac{3\,\pi}{K}$$

Esta relación que nos parece muy interesante puede enunciarse así: "EN TODO CUERPO TOTAL O PARCIALMENTE FLUIDO QUE GIRE ALREDEDOR DE UN EJE QUE PASE POR SU CENTRO DE GRAVEDAD, EL PRODUCTO DE SU DENSIDAD MEDIA POR EL CUADRADO DEL NUMERO DE SEGUNDOS QUE INVIERTA EN UNA REVOLUCION Y POR SU APLANAMIENTO ES IGUAL A UNA CONSTANTE".

Aplicando esto a la tierra tendremos: $\triangle_t\, T_t^2\, apl_t = \dfrac{3\,\pi}{K}$

Si aplicamos valores encontramos para densidad de la tierra la de

5,5765

la que está muy cerca de la encontrada por otros procedimientos.

Aplicándolo a Júpiter se tendrá: $\triangle_j\, T_j^2\, apl_j = \dfrac{3\,\pi}{K}$

Dividiendo la una por la otra: $\dfrac{\triangle_t}{\triangle_j} \cdot \dfrac{T_t^2}{T_j^2} \cdot \dfrac{apl_t}{apl_j} = 1$

de donde: $\dfrac{\triangle_t}{\triangle_j} = \dfrac{T_j^2}{T_t^2} \cdot \dfrac{apl_j}{apl_t}$

luego, sustituyendo valores, encontramos como resultado numérico que la densidad de Júpiter es de 0,29995, tomando la de la tierra como unidad.

Pero si tomamos como masa del globo de Júpiter la de todo el sistema, incluyendo satélites (no tenemos dato del valor de la masa aisladamente) y la dividimos por su volumen supuesto elipsoide, tendremos como densidad 0,30172, tomando la de la tierra como unidad.

La diferencia es muy pequeña máxime si se tiene en cuenta que en el segundo cálculo hemos cometido un error.

Por ahora nos contentamos con la presentación de la fórmula general de equilibrio de acuerdo con las hipótesis que hemos enunciado al principio y con haber mostrado unas coincidencias, no nos atrevemos a llamarlas comprobaciones, entre los números teóricos deducidos de la fórmula presentada y los números experimentales deducidos de las medidas verificadas.

En un próximo estudio haremos ver que las coincidencias con respecto a Saturno son aún más imprevistas y que las fórmulas (1), (2) y (4) dan todavía muchos motivos de esparcimiento para quienes tengan la afición a estos estudios. A ellos les indicamos que si quieren deducir algo con respecto a Saturno, no deben olvidar que el anillo gira en un tiempo mucho menor que el planeta.

Nos hemos atrevido a presentar estas hipótesis especialmente por tres razones:

1ª—Porque la hipótesis presentada en la forma en que lo hemos hecho, no obliga a nadie a creer en ella; pero sí puede mover la curiosidad para investigar el por qué de las coincidencias encontradas; nosotros no hemos podido hallar la razón.

2ª—Porque no hemos encontrado niguna fórmula en la cual se deduzca la forma del geoide directamente de las leyes mecánicas, de tal manera que coincida con la realidad experimentada.

3ª—Porque la gravedad deducida experimentalmente en la tierra resulta mayor de la que correspondería a un elipsoide en reposo de la figura del de Clarke o del de Hayford, de acuerdo con la ley de Newton solamente.

No creemos haber hallado una verdad. Aspiramos, sí, a que la curiosidad que despierte este asunto, haga que los demás la encuentren. Tal vez al rectificar los errores que este escrito pueda contener, nos hagan conocer una verdad para nosotros desconocida y y con ello habremos tenido una gran satisfacción.