CURSO DE ANALISIS MATEMATICO DICTADO EN LA FACULTAD DE MATEMATICAS E INGENIERIA

por JORGE ACOSTA V.

(CONTINUACION)

II—Funciones algebraicas que se saben integrar

3.—*Integración de las funciones racionales.*

Las funciones algebraicas racionales pueden ser enteras o fraccionarias: las primeras son los polinomios enteros, cuya integración es inmediata. Vamos a ocuparnos, pues, en el estudio de la integración de las fracciones racionales.

Para encontrar el valor de la integral

$$\int \frac{F(x)\,dx}{f(x)}$$

en que F y f representan polinomios enteros en x se comienza por descomponer la fracción en elementos simples, lo que se hace de la siguiente manera:

Si el grado del numerador es por lo menos igual al del denominador se efectúa la división, ordenando los dos polinomios por las potencias decrecientes de x y se llega así a obtener un cociente entero $Q(x)$ y un residuo $\phi(x)$ que satisfacen a la identidad

$$F(x) = Q(x)\,f(x) + \phi(x)$$

en la que $\phi(x)$ es un polinomio de grado inferior a $f(x)$, y por consiguiente:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{\phi(x)\, dx}{f(x)}$$

Como el primer término del segundo miembro es la integral de un polinomio entero, su valor se puede escribir inmediatamente y el problema se reduce a integrar una fracción en que el numerador es de grado inferior al denominador.

Para efectuar la descomposición de esta fracción en elementos simples se comienza por simplificarla suprimiendo los factores comunes a los dos términos, si los hay.

Una vez simplificada la fracción se resuelve la ecuación obtenida al igualar a cero el denominador para encontrar los factores binomios en que éste se descompone, y se obtiene así la expresión:

$$f(x) = N(x-a)^m (x-b)^p (x-c)^q \ldots (x-k)$$

en que N es el coeficiente del término de mayor grado del polinomio, $a, b, c, \ldots k$ son las raíces de la ecuación $f(x) = o$ y $m, p, q, \ldots$ son sus respectivos grados de multiplicidad.

Según la naturaleza de las raíces $a, b, c, \ldots k$ ocurren en la descomposición de la fracción en elementos simples diversos casos que vamos a considerar en seguida:

a) *Caso en que las raíces son todas sencillas.*

En este caso es posible encontrar n constantes perfectamente determinadas que satisfagan a la relación idéntica:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{K}{x-k} \qquad 1)$$

siendo n el grado del polinomio $f(x)$. Podríamos determinar los valores de esas constantes por el método de los coeficientes indeterminados, multiplicando los dos miembros de la ecuación 1) por $f(x)$ e igualando en seguida los coeficientes de las mismas potencias de la variable, pero el procedimiento que expondremos en seguida tiene la ventaja de dar una expresión muy sencilla de las constantes $A, B, C, \ldots K$ y mostrar al mismo tiempo que estas constantes no son ni nulas ni infinitas, sino perfectamente determinadas.

Al suprimir en la igualdad 1) el denominador $f(x)$ se obtiene la ecuación:

$$\phi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \ldots + K\frac{f(x)}{x-k} \qquad 2)$$

cuyo segundo miembro es un polinomio entero del grado $n-1$, puesto que $x-a$, $x-b$, ... son factores de $f(x)$.

Démosle a x en la ecuación 2) el valor de la raíz a: la ecuación se reducirá a

$$\phi(a) = A\frac{f(a)}{a-a}$$

puesto que por hipótesis $f(a)$ es idénticamente nulo y ninguna de las diferencias $a-b$, $a-c$, ... lo es.

Determinando el valor de la fracción indeterminada $\frac{f(a)}{a-a}$ que es de la forma $\frac{o}{o}$, por la regla conocida del cociente de las derivadas, resulta:

$$\phi(a) = A\frac{f'(a)}{1}$$

lo que da para el numerador de la primera fracción del segundo miembro de 1) el valor:

$$A = \frac{\phi(a)}{f'(a)} \qquad 3)$$

Este valor es perfectamente determinado y no puede ser nulo ni infinito porque los dos términos del quebrado que lo representa son diferentes de cero, ya que por ser irreductible la fracción $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ la raíz a del denominador no puede anular el numerador y por ser a raíz sencilla de $f(x)$ no anula a su derivada $f'(x)$.

Procediendo de la misma manera encontramos para las otras constantes los valores:

$$B = \frac{\phi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\phi(c)}{f'(c)}, \quad \ldots \quad K = \frac{\phi(k)}{f'(k)}$$

Sólo resta establecer que estos valores convierten la igualdad 1), o su equivalente 2), en una identidad.

Ahora bien, al sustituírlos la igualdad 2) se satisface para los n valores de la variable $x = a, x = b, x = c, \ldots x = k,$ y como este número es mayor que el grado del polinomio $\phi(x)$, la igualdad debe satisfacerse para cualquier otro valor de la variable, es decir, que debe ser idéntica.

En consecuencia, cuando las raíces del denominador son sencillas la integral propuesta se reduce a la suma de integrales simples:

$$\int \frac{\phi(x)}{f(x)}\, dx = A \int \frac{dx}{x-a} + B \int \frac{dx}{x-b} + \ldots + K \int \frac{dx}{x-k}$$

cuyos valores pueden escribirse inmediatamente, y así se tiene:

$$\int \frac{\phi(x)}{f(x)}\, dx = A\, l(x-a) + B\, l(x-b) + \ldots + K\, l(x-k)$$

Esta fórmula es aplicable sólo para los valores de x que hagan positivas todas las diferencias $x-a, x-b, \ldots x-k,$ puesto que si una de ellas, $x-a$, por ejemplo, es negativa, su logaritmo será imaginario y la fórmula se vuelve ilusoria, pero entonces podemos escribir:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \int \frac{d(a-x)}{a-x} = l(a-x)$$

y vemos así que en este caso basta cambiarle el signo a la diferencia, o sea que $\int \frac{dx}{x-a} = l\,[\pm(x-a)]$, tomándose siempre el logaritmo de valor absoluto de la diferencia.

b) *Caso particular de las raíces sencillas imaginarias.*

Si algunas de las raíces de la ecuación $f(x) = o$ son imaginarias los correspondientes elementos simples de la descomposición resultan imaginarios, pues si, por ejemplo, a es de la forma $\alpha + \beta i$ resulta:

$$A = \frac{\varphi(\alpha + \beta i)}{f'(\alpha + \beta i)} = G + H i,$$

y entonces:

$$\frac{A}{x-a}=\frac{G+H\,i}{x-\alpha-\beta\,i} \qquad 5)$$

Tendríamos así al aplicar la fórmula 4) una suma de logaritmos de cantidades imaginarias, que son imaginarios y el resultado es ilusorio.

Pero como el polinomio $f(x)$ es de coeficientes reales, si la ecuación $f(x)=o$ tiene una raíz imaginaria de la forma $a=\alpha+\beta\,i$, tendrá necesariamente como raíz a la conjugada $b=\alpha-\beta\,i$ y la fracción simple correspondiente a esta segunda raíz imaginaria será:

$$\frac{B}{x-b}=\frac{G-H\,i}{x-\alpha+\beta\,i} \qquad 6)$$

Agrupando los dos términos imaginarios conjugados 5) y 6), resulta:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{G+H\,i}{x-\alpha-\beta\,i}+\frac{G-H\,i}{x-\alpha+\beta\,i}$$

y al reducir a un común denominador los dos quebrados del segundo miembro se tiene:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{2\,G\,(x-\alpha)-2\,H\,\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \qquad 7)$$

expresión en que sólo hay cantidades reales.

Se tiene así:

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}+\int\frac{B\,dx}{x-b}=\int\frac{2\,G\,(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}-\int\frac{2\,H\,\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

y el problema se reduce a calcular las integrales de las dos fracciones del segundo miembro.

Al observar la primera de esas fracciones vemos que, a menos del factor constante G, el numerador es la diferencial del denominador, y así puede escribirse inmediatamente su integral:

$$\int\frac{2\,G\,(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=G\,l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$

En la segunda fracción, sacando del signo el factor constante $2H\beta$ queda la integral:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

que se puede escribir así:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int \frac{d\,\dfrac{x-\alpha}{\beta}}{\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1} = \frac{1}{\beta}\, arc\ tg\, \frac{x-\alpha}{\beta}$$

Procediendo de la misma manera con todos los demás pares de raíces imaginarias vemos que queda completamente resuelto el problema de la integración de la fracción racional cuando las raíces del denominador son sencillas, bien sean reales o imaginarias.

Ejemplos:

1º $$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2}$$

Las raíces del denominador son aquí -1 y $+2$, de manera que podemos escribir:

$$\frac{3-2x}{(x+1)\,(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

y aplicando la fórmula 3), se tiene:

$$A = -\frac{5}{3}\ ,\ B = -\frac{1}{3}$$

de donde resulta finalmente:

$$\int \frac{3-2x}{x^2-x-2}\,dx = -\frac{5}{3}\,l\,(x+1) - \frac{1}{3}\,l\,(x-2) + C.$$

2º $$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$$

Haciendo $\dfrac{1}{a^2 - x^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x+a}$ y observando que

aquí $\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)} = -\dfrac{1}{2x}$ se ve que $A = -\dfrac{1}{2a}$ y $B = \dfrac{1}{2a}$

o sea que

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2a}\, l\,(x-a) + \frac{1}{2a}\, l\,(x+a) + C,$$

y haciendo $2\,a\,C = l\,c$ en que c es otra constante arbitraria la integral se reduce a:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\, l\left(c\ \frac{x-a}{x+a}\right)$$

3º

$$\int \frac{3x+1}{2(x^3-8)}\,dx$$

El denominador se puede descomponer así:

$$2(x^3 - 8) = 2(x-2)(x^2 + 2x + 4),$$

y el tercer factor tiene las raíces imaginarias $-1 \pm i\sqrt{3}$; podemos por tanto hacer:

$$\frac{3x+1}{2(x^3-8)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

Quitando denominadores resulta:

$$3x + 1 = 2A(x^2 + 2x + 4) + 2(Bx + C)(x-2).$$

Si aquí hacemos $x = 2$ resulta $7 = 24A$ de donde $A = \dfrac{7}{24}$ que es el mismo valor dado por la fórmula 3).

Haciendo ahora $x = -1 + i\sqrt{3}$ que es una de las raíces imaginarias del trinomio $x^2 + 2x + 4$ resulta:

$$-2 + 3\sqrt{3}\,i = -6C + (2C - 8B)\sqrt{3}\,i$$

ecuación que se descompone en dos, así:

$$-2 = -6C, \quad 3\sqrt{3}\,i = (2C - 8B)\sqrt{3}\,i,$$

y nos da:

$$C = \frac{1}{3} \qquad B = -\frac{7}{24}$$

de manera que

$$\int \frac{3x+1}{2(x^3-8)}dx = \frac{7}{24}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{24}\int \frac{7x-8}{x^2+2x+4}dx.$$

La primera de las integrales del segundo miembro es inmediata y la segunda puede escribirse así:

$$\int \frac{7x-8}{x^2+2x+4}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2(x+1)\,dx}{(x+1)^2+3} - 15\int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

y como $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

resulta finalmente:

$$\int \frac{3x+1}{2(x^3-8)}dx = \frac{7}{24}\,l\,\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+4}} +$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{24}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

c) *Caso en que el denominador tiene raíces múltiples.*

Si alguna de las raíces del denominador es múltiple la fórmula 3) se vuelve ilusoria, pues, entonces esa raíz anula a la derivada $f'(x)$. Para descubrir la descomposición aplicable en ese caso supongamos que el denominador tiene una sola raíz con el grado n de multiplicidad, es decir que se trata de una fracción de la forma

$$\frac{\varphi(x)}{M\,(x-a)^n}$$

Desarrollando a $\phi(x)$ por las potencias de $x-a$ según la fórmula de Taylor, se tiene:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\varphi''(a)(x-a)^2 + \ldots}{M\,(x-a)^n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(a)\,(x-a)^{n-1}}{M\,(x-a)^n}$$

El desarrollo del numerador no puede tener más términos porque el polinomio $\phi(x)$ es cuando más del grado $n-1$ según la hipótesis.

Separando los términos del segundo miembro vemos que en este caso la fracción se descompone así:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a}$$

o sea, en una suma de fracciones que tienen numeradores constantes y cuyos denominadores son las potencias decrecientes de $x-a$ a partir del grado n.

Si la raíz a es de un grado m de multiplicidad, inferior a n, podemos escribir:

$$f(x) = (x-a)^m f_1(x)$$

llamando $f_1(x)$ al producto de todos los demás factores del polinomio.

Hagamos entonces:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)} \qquad 8)$$

en que A, A_1, ... A_{m-1} son cantidades constantes y $\psi(x)$ es un polinomio entero en x, de grado inferior al de $\phi(x)$.

Multiplicando los dos miembros de la ecuación 8) por $f(x)$ resulta:

$$\phi(x) = f_1(x)\left[A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + \right.$$
$$\left. + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\right] + \psi(x)(x-a)^m.$$

o sea:

$$\phi(x) - f_1(x)\left[A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + \right.$$
$$\left. + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\right] = \psi(x)(x-a)^m.$$

Si reemplazamos a $\phi(x)$ y $f_1(x)$ por sus desarrollos, por las potencias crecientes de $x-a$ y extractamos esas potencias como factores, resulta:

$$\phi(a) - A f_1(a) + (x-a)[\phi'(a) - A f'_1(a) - A_1 f_1(a)] +$$
$$+ \frac{(x-a)^2}{2}[\phi''(a) - A f_1''(a) - 2A_1 f_1'(a) + 2A_2 f_1(a)] +$$
$$+ \dots\dots = \psi(x)(x-a)^m. \qquad 9)$$

Como el segundo miembro de esta ecuación es divisible por $(x - a)^m$, el primero debe serlo también, lo que exige que los coeficientes de las potencias de $x - a$ inferiores al grado m sean idénticamente nulos, y al expresar esta condición se obtienen las m ecuaciones:

$$\phi(a) - A\, f_1(a) = 0$$

$$\phi'(a) - A\, f_1'(a) - A_1\, f_1(a) = 0$$

$$\phi''(a) - A\, f_1''(a) - 2\, A_1\, f_1'(a) + 2\, A_2\, f_1(a) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

que son de primer grado en $A, A_1 \ldots A_{m-1}$ y determinan perfectamente los valores de estas constantes pues los denominadores de los quebrados que las representan son las potencias de $f_1(a)$, que por hipótesis es diferente de cero.

Anulados en el primer miembro de la ecuación 9) los coeficientes de los m primeros términos, la división del resto por $(x - a)^m$ da el valor del polinomio $\psi(x)$.

Al aplicar el mismo procedimiento a la fracción $\dfrac{\psi(x)}{f_1(x)}$ se obtiene:

$$\frac{\psi(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{\psi_1(x)}{f_2(x)}$$

y continuando de la misma manera se llega finalmente a descomponer la fracción dada así:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^p} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{C}{(x-c)^q} + \ldots + \frac{C_{q-1}}{x-c} +$$

$$+ \ldots + \frac{K}{x-k}$$

y el problema se reduce entonces a integrar expresiones de la forma $\displaystyle\int \frac{A\, dx}{(x-a)^m}$ cuyo valor puede escribirse inmediatamente, así:

$$\int \frac{A\, dx}{(x-a)^m} = \frac{A}{(1-m)\,(x-a)^{m-1}}$$

d) *Caso de las raíces imaginarias múltiples.*

Si una de las raíces múltiples, a por ejemplo, es imaginaria de la forma $\alpha + \beta i$, otra raíz b tendrá que ser la imaginaria congujada $\alpha - \beta i$ y entrará en el mismo grado de multiplicidad. Agregando las fracciones que tienen por denominadores dos potencias iguales de los binomios imaginarios conjugados se pueden hacer desaparecer los términos imaginarios, pero es más ventajoso el procedimiento que se indica en seguida.

Hagamos: $$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A x + B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}} + \\ + \cdots + \frac{A_{m-1} x + B_{m-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)} \qquad 10)$$

en que $A, B, A_1, B_1, \ldots$ son constantes que se trata de determinar, $\psi(x)$ es un polinomio entero en x desconocido y $f_1(x)$ es el cociente de $f(x)$ por $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m$.

Multiplicando la ecuación 10) por $f(x)$ y pasando al primer miembro todos los términos con excepción del último, resulta:

$$\phi(x) - (A x + B) f_1(x) - (A_1 x + B_1) [(x-\alpha)^2 + \beta^2] f_1(x) \\ - (A_2 x + B_2) [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2 f_1(x) - \ldots - (A_{m-1} x + B_{m-1}) \\ [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1} f_1(x) = \psi(x) [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m. \qquad 11)$$

Las constantes $A, B, A_1, B_1, \ldots$ deberán determinarse por la condición de que el primer miembro sea divisible por $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m$, o lo que es lo mismo que se anule, lo mismo que sus derivadas hasta el orden $m-1$ para el valor

$$x = \alpha + \beta i.$$

Escribiendo estas condiciones se obtendrán m ecuaciones entre cantidades imaginarias, que determinan perfectamente las $2m$ constantes de que se trata: en la ecuación 11) todos los términos a partir del segundo tienen el factor $(x-\alpha)^2 + \beta^2$ y por tanto, se anulan al dar a x el valor $\alpha + \beta i$, reduciéndose así la ecuación a:

$$\phi(\alpha + \beta i) = [A(\alpha + \beta i) + B] f_1(\alpha + \beta i).$$

Esta ecuación sólo contiene las constantes A y B y como se descompone en dos al igualar separadamente las partes reales y las imaginarias de los dos miembros, estas dos constantes quedarán perfectamente determinadas.

Al derivar la ecuación 11) y hacer en esa derivada $x = \alpha + \beta i$ resulta una ecuación de primer grado en que sólo figuran las cuatro constantes A, B, A_1 y B_1 y como las dos primeras son conocidas podrán determinarse perfectamente las otras dos. La aplicación sucesiva de este mismo procedimiento conduce a determinar todas las constantes.

Como consecuencia de lo expuesto, cuando el denominador de la fracción por integrar contiene raíces múltiples imaginarias, el problema se reduce a calcular integrales de la forma

$\int \frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} dx$ en que m es un número entero.

Esta integral se puede descomponer en dos, así:

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} = \int \frac{A\,(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} + \int \frac{(A\alpha + B)\,.dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m}$$

Haciendo $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = t$ la primera integral del segundo miembro se reduce a:

$$\frac{1}{2} A \int \frac{dt}{t^m} = \frac{A}{2\,(1-m)\,t^{m-1}} \qquad \text{y por tanto:}$$

$$\int \frac{A\,(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} = \frac{A}{2\,(1-m)\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}}$$

y cuando $m = 1$

$$\int \frac{A\,(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} A\, l\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2].$$

La segunda integral puede escribirse así:

$$\int \frac{(A\alpha + B)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} = \frac{A\alpha + B}{\beta^{2m}} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1\right]^m}$$

y haciendo $\frac{x-\alpha}{\beta} = t$ con lo que $dx = \beta\,dt$ el problema

se reduce al cálculo de la integral: $I_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$.

Agregando y restando $t^2\, dt$ al numerador de la fracción tendremos idénticamente:

$$I_m = \int \frac{(1+t^2)\, dt}{(1+t^2)^m} - \int \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^m}$$

o sea,
$$I_m = I_{m-1} - \int \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^m} \qquad 12)$$

pero
$$\frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{2}\, t\, \frac{2\, t\, dt}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{2}\, t\, \frac{d\,(1+t^2)}{(1+t^2)^m}$$

e integrando por partes:

$$\int \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^m} = -\frac{t}{2(m-1)(1+t^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$$

Al reemplazar este valor en la ecuación 12), resulta:

$$I_m = I_{m-1} + \frac{t}{2\,(m-1)\,(1+t^2)^{m-1}} - \frac{1}{2\,(m-1)}\, I_{m-1}$$

que se reduce a:

$$I_m = \frac{t}{2\,(m-1)(1+t^2)^{m-1}} + \frac{2\,m-3}{2\,m-2}\, I_{m-1}$$

De este modo la integral I_m se expresa en función de I_{m-1} y ésta se expresará en función de I_{m-2} y así sucesivamente, disminuyendo de unidad en unidad el exponente de $1+t^2$ hasta llegar a la integral conocida

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = arc\, tg\, t$$ con lo cual resulta finalmente:

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \frac{t}{2\,(m-1)\,(1+t^2)^{m-1}} + \frac{2\,m-3}{2\,m-2}$$

$$\frac{t}{2(m-2)\,(1+t^2)^{m-2}} + \frac{2\,m-3}{2\,m-2} \cdot \frac{2\,m-5}{2\,m-4} \cdot \frac{t}{2\,(m-3)\,(1+t^2)^{m-3}}$$

$$+ \ldots + \frac{2\,m-3}{2\,m-2} \cdot \frac{2\,m-5}{2\,m-4} \cdot \frac{2\,m-7}{2\,m-6} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} \right.$$

$$\left. + \, arc\, tg\, t \right) + C.$$

4.—*Otro procedimiento para la descomposición de la fracción racional.*

Puede también descomponerse la fracción racional en fracciones sencillas por medio del procedimiento que se verá adelante, de más sencilla aplicación que el expuesto en muchos casos y que se funda en los dos principios siguientes:

1º *Una fracción racional cuyo denominador no tiene la raíz* a *se puede desarrollar en serie ordenada por las potencias positivas crecientes de* x — a.

Si en la fracción $\frac{Q\,(x)}{P\,(x)}$ desarrollamos los dos términos por las potencias crecientes de $x - a$ mediante la fórmula de Taylor, tendremos:

$$\frac{Q\,(x)}{P\,(x)} = \frac{Q\,(a) + Q'\,(a)\,(x - a) + Q''\,(a)\,\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots}{P\,(a) + P'\,(a)\,(x - a) + P''\,(a)\,\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots}$$

Al efectuar la división algebraica de estos dos polinomios enteros en $x - a$ así ordenados resulta:

$$\frac{Q\,(x)}{P\,(x)} = A + A_1\,(x - a) + A_2\,(x - a)^2 + \ldots$$

que es lo que nos proponíamos demostrar. Si el polinomio Q no es exactamente divisible por el polinomio P el desarrollo precedente será ilimitado y si queremos detenerlo en el término del grado m podemos, al hacer la división, prescindir de los términos de grado superior a m en dos polinomios.

Aplicando este principio a una fracción cualquiera podemos desarrollarla en serie ordenada por la potencias crecientes de uno de los factores binomios del denominador en la forma siguiente:

Sea la fracción $\frac{\phi\,(x)}{f\,(x)}$ y supongamos que el denominador tiene una raíz a múltiple de grado m, es decir que

$$f\,(x) = (x - a)^m f_1\,(x)$$

en que $f_1\,(x)$ es un polinomio entero que no tiene el factor $(x - a)$.

De acuerdo con el principio demostrado podemos escribir:

$$\frac{\phi(x)}{f_1(x)} = A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots A_m(x-a)^m + A_{m+1}(x-a)^{m+1} + \ldots$$

y entonces:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + A_m + A_{m+1}(x-a) + \ldots$$

y si queremos prescindir en este desarrollo de las potencias positivas de $x-a$ podemos limitar los desarrollos de $\phi(x)$ y $f_1(x)$, antes de hacer la división, a los términos inferiores al grado m, pudiendo escribir entonces:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{(x-a)} + \text{función entera en } x. \qquad 1).$$

2º—*Una fracción racional que no se hace infinita cuando se atribuye a la variable x cualquier valor real o imaginario, finito o infinito, es una constante.*

Sea la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ cuyo denominador, descompuesto en sus factores binomios de primer grado, tiene por expresión:

$$f(x) = N(x-a)^m (x-b)^p (x-c)^q \ldots (x-k).$$

Si esa fracción no se hace infinita al dar a x el valor a, necesariamente el numerador será divisible por $(x-a)^m$ y análogamente si no se hace infinita para ningún valor de x igual a una de las raices del denominador será el numerador divisible por todos los factores binomios del denominador en sus respectivos grados de multiplicidad y en consecuencia el cociente será exacto y la fracción será igual a un polinomio entero $P(x)$.

Si al dar a x el valor $x = \infty$ este polinomio no se hace infinito será porque es independiente de x y entonces tiene que ser constante, lo que demuestra la proposición.

Establecido esto desarrollemos la fracción $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ en serie por las potencias crecientes de $x - a$, conservando sólo las potencias negativas, como en la fórmula 1).

Hagamos el mismo desarrollo por las potencias de $x - b$ con lo cual obtendremos la expresión:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \text{función entera en } x$$

y lo mismo con todas las demás raíces y consideremos la suma de las fracciones que conservamos en todos los desarrollos o sea la función:

$$F(x) = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^p} +$$

$$\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{C}{(x-c)^q} + \frac{C_1}{(x-c)^{q-1}} + \ldots +$$

$$\frac{C_{q-1}}{x-c} + \ldots + \frac{K}{x-k} \qquad 2).$$

Vamos a demostrar que la función $F(x)$ es idéntica a la fracción propuesta.

En efecto, la diferencia $F(x) - \frac{\phi(x)}{f(x)}$ no se hace infinita para $x - a$ puesto que en ella desaparecen todos los términos que tienen como denominador el binomio $x - a$ y por la misma razón esa diferencia no se hace infinita cuando se le dé a la variable x los valores $b, c, \ldots k$; evidentemente esa diferencia permanente finita para $x = \infty$ porque $F(\infty) = o$ y y la fracción $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ se anula para $x = \infty$ por ser el numerador de grado inferior al denominador; luego en virtud del segundo principio esa diferencia, que es una fracción racional, tiene un valor constante y ese valor es cero porque tanto $F(x)$ como $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ se anulan para $x = \infty$.

En consecuencia la fracción $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ queda reemplazada idénticamente por la suma de fracciones sencillas que figura en el segundo miembro de la ecuación 2).

Para obtener los coeficientes $A, A_1, \ldots$ se desarrollan las funciones $\phi(a+h)$ y $f_1(a+h)$ por las potencias crecientes de h, limitando los desarrollos en los términos del grado

$m - 1$ y se hace la división llevando el desarrollo hasta ese mismo grado: los coeficientes de las potencias sucesivas de h serán las constantes buscadas. En la misma forma se procederá para determinar los demás coeficientes.

A cada raíz corresponde un número de coeficientes igual a su grado de multiplicidad, de manera que a una raíz sencilla k corresponde un solo coeficiente cuya expresión: $K = \dfrac{\phi(k)}{f'(k)}$

resulta en el nuevo método así:

$$\frac{\phi(k+h)}{f(k+h)} = \frac{\phi(k) + \phi'(k)\,h}{f(k) + f'(k)\,h} = \frac{\phi(k)}{f'(k)}\frac{1}{h} + \text{función entera en } h$$

puesto que $f(k) = o$, lo que da la forma indicada para el coeficiente de $\frac{1}{h}$.

Ejemplos:

1º—Sea la integral de uso frecuente: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$;

como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

se puede escribir:

$$x^2 - 1 = f(x) \qquad 2x = f'(x)$$

y por tanto:

$$\frac{\phi(1)}{f'(1)} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\phi(-1)}{f'(-1)} = -\frac{1}{2}$$

y entonces:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\, l\,(x - 1) - \frac{1}{2}\, l\,(x + 1) + C = l\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

2º—Sea la integral: $\dfrac{dx}{(x^2 - 1)^3}$

Como las raíces son triples podemos escribir:

$$\frac{1}{(x^2 - 1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1} \qquad a).$$

Para determinar los coeficientes A desarrollamos la fracción $\dfrac{1}{(x+1)^3}$ por el método de la división, así:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 8 + 12\,h + 6\,h^2 \\ \cline{2-2}
-1 - \dfrac{3}{2}\,h - \dfrac{3}{4}\,h^2 & \dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{16}\,h + \dfrac{3}{16}\,h^2 \\ \cline{1-1}
-\dfrac{3}{2}\,h - \dfrac{3}{4}\,h^2 & \\
+\dfrac{3}{2}\,h + \dfrac{9}{4}\,h^2 & \\ \cline{1-1}
+\dfrac{3}{2}\,h^2 & \\
-\dfrac{3}{2}\,h^2 - \ldots &
\end{array}
$$

Lo que nos da: $\quad A = \dfrac{1}{8}\ ,A_1 = -\dfrac{3}{16}\ ,A_2 = \dfrac{3}{16}$

Para calcular los valores de B, B_1 y B_2 podríamos aplicar el mismo procedimiento pero la operación puede efectuarse directamente así: al cambiar en la igualdad *a)* a x por $-x$ el primer miembro no cambia y por consiguiente el segundo debe conservar su valor, lo que exige que:

$$B = -\frac{1}{8} \qquad B_1 = -\frac{3}{16} \qquad B_2 = -\frac{3}{16}$$

o sea que los coeficientes de los términos de grado impar en $x+1$ sean iguales y de signos contrarios a los de los términos correspondientes en $x-1$, y que los de los términos de grado par en $x+1$, sean iguales y de mismo signo que los de los términos correspondientes en $x-1$.

Efectuada así la descomposición en fracciones sencillas la integración es inmediata y resulta:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\,(x+1)^2} - \frac{1}{2\,(x-1)^2}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)$$
$$+ \frac{3}{16}\, l\, \frac{x-1}{x+1} + C.$$

3º. $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2+1)^3}\, dx$

El denominador tiene dos raíces imaginarias triples y por tanto se puede escribir:

$$\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^3}=\frac{A}{(x-i)^3}+\frac{A_1}{(x-i)^2}+\frac{A_2}{x-i}+\frac{B}{(x+i)^3}$$
$$+\frac{B_1}{(x+i)^2}+\frac{B_2}{x+i}$$

Para encontrar los coeficientes A desarrollamos por las potencias de $x-i$ las funciones $\phi(x)=x^4+x^2+1$ y $f_1(x)=(x+i)^3$, haciendo para abreviar $x-i=h$ y deteniendo los desarrollos en el término en h^2 y hacemos la división limitándola a los tres primeros términos, cuyos coeficientes serán los valores buscados, así:

$$\begin{array}{r|l}
1-2hi-5h^2 & -8i-12h+6h^2i \\ \cline{2-2}
-1+\frac{3}{2}hi+\frac{3}{4}h^2 & \frac{i}{8}+\frac{1}{16}h-\frac{7}{16}h^2i \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{2}hi-\frac{17}{4}h^2 & \\
+\frac{1}{2}hi+\frac{3}{4}h^2 & \\ \cline{1-1}
-\frac{7}{2}h^2 &
\end{array}$$

de donde resulta $\quad A=\frac{i}{8} \qquad A_1=\frac{1}{16} \qquad A_2=-\frac{7i}{16}$

Podríamos obtener los otros tres coeficientes por el mismo método, pero haciendo igual consideración que en el ejemplo anterior vemos inmediatamente que sus valores son:

$B=-\frac{i}{8} \qquad B_1=\frac{1}{16} \qquad B_2=\frac{7i}{16}$ y por tanto se tiene:

$$\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^3}=\frac{i}{8(x-i)^3}+\frac{1}{16(x-i)^2}-\frac{7i}{16(x-i)}-$$
$$\frac{i}{8(x+i)^3}+\frac{1}{16(x+i)^2}+\frac{7i}{16(x+i)}$$

Como las integrales del tercer quebrado y el último nos darían logaritmos de cantidades imaginarias, reunimos esos dos quebrados antes de integrar, lo que da:

$$\frac{7i}{16}\left(\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right)=\frac{7}{8}\,\frac{1}{x^2+1}$$

y entonces

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{i}{8}\left|\frac{1}{2\,(x^2+i)^2} - \frac{1}{2\,(x^2-i)^2}\right| - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right) + \frac{7}{8}\,arctg.\,x + C.$$

que después de hechas las reducciones queda:

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{x}{4\,(x^2+1)^2} - \frac{x}{8\,(x^2+1)} + \frac{7}{8}\,arctg.\,x + C.$$

Al aplicar a este mismo ejemplo el primer método haríamos:

$$\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^3} = \frac{A\,x+B}{(x^2+1)^3} + \frac{A_1\,x+B_1}{(x^2+1)^2} + \frac{A_2\,x+B_2}{x^2+1}$$

lo que da: $x^4+x^2+1 = A\,x+B+(A_1\,x+B_1)\,(x^2+1) + (A_2\,x+B_2)\,(x^2+1)^2$

Al hacer aquí $x=i$ la ecuación se reduce a $1 = A\;\; i+B$ lo que da $A=o$, $B=1$ y por tanto:

$$x^4+x^2 = (A_1\,x+B_1)\,(x^2+1)+(A_2\,x+B_2)\,(x^2+1)^2$$

y dividiendo por x^2+1:

$$x^2 = A_1\,x+B_1+(A_2\,x+B_2)\,(x^2+1)$$

Haciendo aquí nuevamente $x=i$ resulta:

$-1 = A_1\,i+B_1$ lo que da: $A_1=o$, $B_1=-1$

y por tanto:

$1+x^2 = (A_2\,x+B_2)\,(x^2+1)$ o sea: $1 = A_2\,x+B_2$

lo que da: $A_2=o$ $B_2=1$ y entonces:

$$\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{(x^2+1)^3} - \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$$

Es fácil ver que la integración de estas tres fracciones da un resultado idéntico al obtenido por el segundo método.

5º—Simplificaciones en casos particulares.

En algunos casos particulares el método general de integración de las fracciones racionales es susceptible de simplificaciones importantes, como se muestra en los siguientes ejemplos:

a)—Sea la integral $\int f(x)dx$ en que $f(x)$ representa una fracción racional *impar en x* es decir que cambia de signo con x. Se tendrá entonces $f(x) = x\,\phi(x^2)$ en que $\phi(x)$ representa una función racional.

En este caso haciendo $x^2 = t$ resulta $xdx = \frac{1}{2}\,dt$ y por tanto:

$$\int f(x)\,dx = \int x\,\phi(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \phi(t)\,dt$$

con lo que el problema se reduce a integrar la función $\phi(t)$, cuyos términos son de grado inferior a los de $f(x)$.

Si por ejemplo la fracción por integrar es: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(x^2+1)^2}$ multiplicando los términos del quebrado por x resulta:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2\,(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\,(t+1)^2}$$

que se descompone en elementos simples así:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\,(t+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}$$

integrales que son inmediatas, y volviendo a la variable x resulta finalmente:

$$\int \frac{dx}{x\,(x^2+1)^2} = \frac{1}{2\,(x^2+1)} + l\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + C.$$

b)—Sea calcular más generalmente la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x}\,\phi(x^m)$ en que ϕ es una función racional de x^m. (No es necesario que el exponente m sea entero).

Se puede escribir: $\displaystyle\int \frac{dx}{x}\,\phi(x^m) = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^m}\,\phi(x^m)$

y haciendo $x^m = t$ resulta: $\displaystyle\int \frac{dx}{x}\,\phi(x^m) = \frac{1}{m}\int \frac{dt}{t}\,\phi(t)$, fracción racional en t, más sencilla que la propuesta.

Por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x\left(a + bx^{\frac{5}{7}}\right)} = \int \frac{x^{\frac{5}{7}-1}\,dx}{x^{\frac{5}{7}}\left(a + bx^{\frac{5}{7}}\right)} = \frac{7}{5}\int \frac{dt}{t\,(a+bt)}$$

fracción que integrada nos da:

$$\int \frac{dx}{x\left(a + bx^{\frac{5}{7}}\right)} = \frac{7}{5a}\left[l\, x^{\frac{5}{7}} - bl\left(a + bx^{\frac{5}{7}}\right)\right] + C.$$

c)—Si en el denominador de la fracción no hay sino un solo factor, como en:

$$I = \int \frac{P\,(x)\,dx}{(x - a)^m}$$

en que $P\,(x)$ es un polinomio entero de grado n, la descomposición en fracciones sencillas es inmediata haciendo $x - a = t$, así:

$$\int \frac{P\,(x)}{(x - a)^m} dx = \int \frac{P\,(a + t)}{t^m} dt = \int dt\, \frac{A_0 + A_1\, t + A_2\, t^2 + \ldots + A_n\, t^n}{t^m}$$

$$= A_0 \int \frac{dt}{t^m} + A_1 \int \frac{dt}{t^{m-1}} + \ldots + A_n \int \frac{dt}{t^{m-n}}$$

d)—Sea la integral $\displaystyle\int \frac{x^n\,dx}{(x^2 + 1)^m}$

Si n es impar la función por integrar es impar, y por la transformación $x^2 = t$ se reduce al caso anterior.

Si n es par se aplica la integración por partes así:

$$\int \frac{x^n\,dx}{(1 + x^2)^m} = \int x^{n-1} \frac{x dx}{(1 + x^2)^m} = \frac{1}{2} \int x^{n-1} \frac{d\,(1 + x^2)}{(1 + x^2)^m}$$

lo que da:

$$\int \frac{x^n\,dx}{(1 + x^2)^m} = -\frac{1}{2}\,\frac{x^{n-1}}{(m - 1)\,(1 + x^2)^{m-1}} + \frac{1}{2\,(m - 1)} \int \frac{(n - 1)\,x^{n-2}\,dx}{(x^2 + 1)^{m-1}}$$

y finalmente:

$$\int \frac{x^n\,dx}{(1 + x^2)^m} = -\frac{x^{n-1}}{2\,(m - 1)\,(1 + x^2)^{m-1}} + \frac{n - 1}{2(m - 1)} \int \frac{x^{n-2}\,dx}{(x^2 + 1)^{m-1}}.$$

lo que reduce simultáneamente los dos exponentes m y n.

e)—Para simplificar el cálculo de las integrales de la forma:

$$\int \frac{P\,(x)\,dx}{(x^2 - 1)^n}$$

en que P representa un polinomio entero se puede aplicar la transformación

$$x = \frac{t+1}{t-1} \quad \text{que da} \quad dx = -\frac{2\,dt}{(t-1)^2} \quad \text{y} \quad x^2 - 1 = \frac{4\,t}{(t-1)^2}$$

Este método es muy rápido cuando el grado del polinomio P no pasa de $2\,n - 2$ porque entonces se tiene:

$$\int \frac{P\,(x)\,dx}{(x^2 - 1)^n} = -2 \int \frac{P\left(\frac{t+1}{t-1}\right) dt\,(t-1)^{2n}}{(t-1)^2\,(4t)^n} =$$

$$= -2 \int \frac{P\left(\frac{t+1}{t-1}\right)(t-1)^{2n-2}}{4^n\,t^n}\,dt$$

y en virtud de la hipótesis sobre el grado del polinomio P el numerador de la fracción será un polinomio entero en t y la integración será inmediata.

(Continuará)