CRITICA AL ESTUDIO DE UNA POSIBLE FORMA DE EQULIBRIO DEL GLOBO TERRESTRE (1)

por JULIO CARRIZOSA VALENZUELA

Con el fin de corresponder a la invitación hecha por el profesor Belisario Ruiz Wilches, para que quienes asistimos a su conferencia o leímos el resumen que de ella ha hecho la *Revista de la Universidad Nacional de Colombia,* analicemos sus teorías y las sometamos a nuestra crítica de meros aficionados, nos atrevemos a intervenir para presentarle al ilustre profesor algunas observaciones hijas del interés que ha despertado en nosotros su estudio, y del deseo que, por lo tanto, abrigamos, para que se siga discutiendo, por personas más autorizadas que nosotros, la tesis científica que él propugna, o, mejor dicho, la tesis que se desprende de la teoría expuesta por el doctor Ruiz, ya que él se limita a presentar los resultados de su estudio, admitiendo que no cree haber hallado una verdad, pero que espera que otros encuentren las razones de las concordancias por él observadas, o rectifiquen los errores que su escrito pueda contener —son sus propias palabras—.

La cuestión presentada ha sido objeto de muchas, muy variadas, y algunas muy profundas investigaciones, desde el descubrimiento de la ley de la gravitación universal por Newton (1688) hasta nuestros días. Según Paul Appell (2) se pueden distinguir tres ciclos en esta larga etapa de investigaciones sobre la forma de nuestro globo terrestre: el de los elipsoides de revolución, y de los anillos, como figuras de equilibrio en los cuerpos rotantes,

(1) Presentamos excusas a nuestros lectores por la manera como se edita el presente estudio dada la falta de fuente especial para fórmulas matemáticas. Prometemos mejorar las próximas ediciones cuando sean más completos los talleres de la Universidad Nacional.

(2) *Figures d'equilibre d'une masse liquide homógene en rotation sous l'atraction newtonienne de ses particules.*

caracterizado por los trabajos de Maupertuis (1732), Maclaurin (1742), Clairaut (1743), hasta Laplace (1776) y Legendre (1789); el de los trabajos de Jacobi (1834), Mme. Kowalevski (1888), y Poincaré (1885), en el cual se introducen los elipsoides de tres ejes, y se establece por Mme. Kowalevski de manera rigurosa la forma anular como figura de equilibrio; y, en fin, el ciclo actual singularizado por la introducción de nuevas e inesperadas figuras de equilibrio, como la llamada *periforme* establecida por el mismo Poincaré y por Liapounoff (1896). Para una información completa sobre el particular remitimos al lector a la excelente introducción histórica y a la bibliografía de más de cien obras sobre la materia, presentadas por Paul Appell en la obra ya citada.

A pesar de los trabajos nombrados, no puede decirse que el problema de la determinación de la forma que toma una masa líquida o fluída aislada en el espacio, y que se mueve de manera que las distancias entre sus partículas se mantengan invariables, haya sido resuelto de manera general. Ni en el sentido de haber obtenido todas las figuras de equilibrio posibles, ni desde el punto de vista del acuerdo perfecto entre la figura de equilibrio obtenida y la forma del llamado *geoide*. Existen, por lo tanto, amplias posibilidades para que el investigador moderno pueda cosechar aún muchos y muy variados frutos en este campo de la ciencia. Desde este punto de vista, pues, se justifican de sobra las hipótesis que introduce el profesor Ruiz Wilches en su estudio, ya que las cosas no han marchado satisfactoriamente con ninguna de las teorías hasta ahora expuestas. Sin embargo, y a pesar de las concordancias señaladas por el ilustre profesor, como consecuencia de su teoría, es nuestro parecer que se quedan atrás sin explicar algunas cuestiones, fundamentales unas, accesorias otras, las que valdría bien la pena discutir antes de acoger con demasiado optimismo los resultados alcanzados en el estudio en cuestión.

Nos referimos en primer término —y es ésta nuestra primera objeción— a las bases mismas del cálculo aceptadas por el profesor Ruiz Wilches. En este respecto puede decirse que se aparta de las hipótesis hasta ahora empleadas (lo cual no sería censurable desde luego) para seguir un derrotero muy cuestionable a nuestro juicio; pero lo hace sin detenerse a justificar dichas bases, entre las cuales figura su nueva expresión de la fuerza centrífuga, que está en pugna con lo que ha sido aceptado hasta hoy en la mecánica clásica. Adopta además como punto de

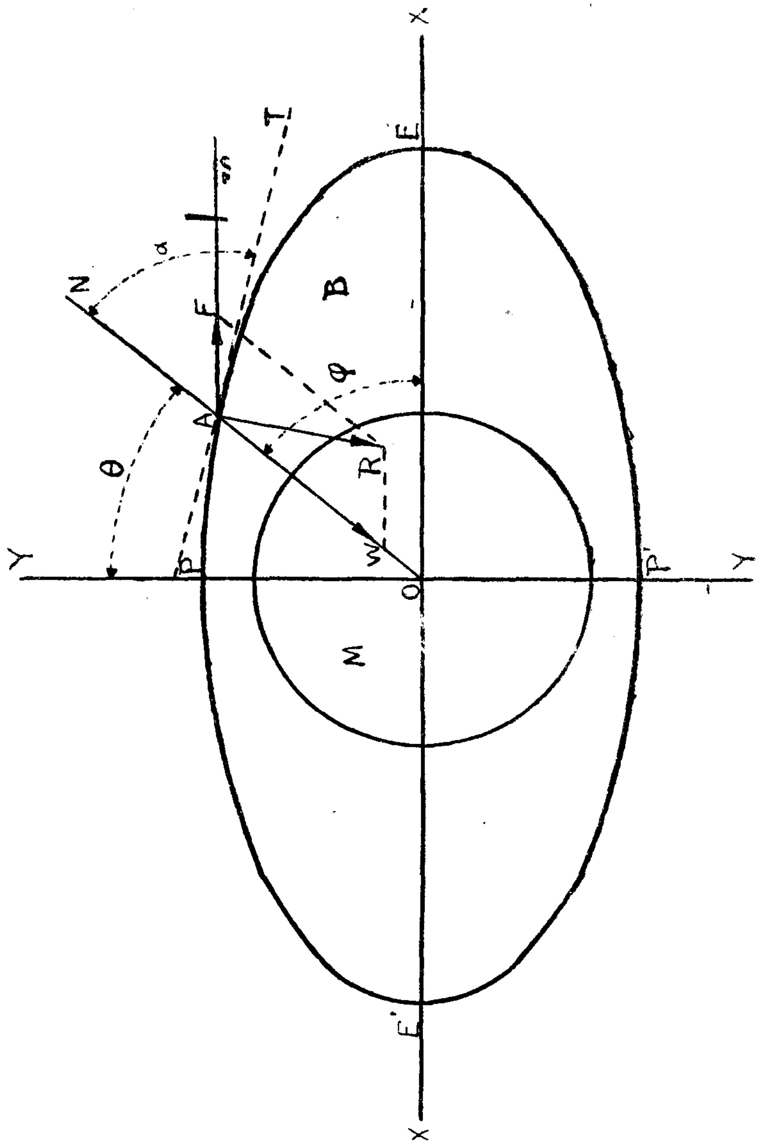

Fig. 1

partida el mismo que ha servido para estudiar la forma de los macizos gaseosos en rotación cuando se inicia en ellos una condensación central (nebulosa de Laplace) (1). Salvo la expresión adoptada por el profesor Ruiz, el cálculo que hacen los autores nombrados es idéntico y conduce naturalmente a la misma expresión desde el punto de vista analítico. Para puntualizar la trascendencia que tiene este punto de vista, nuevo si se mira al problema que con él se trata de resolver, consideremos la misma figura que trae el profesor Ruiz en su estudio, corregida en el sentido de hacer perfectamente esférica la parte central, como lo acepta él tácitamente. En estas condiciones, la forma de la tierra, o en particular la de uno de sus meridianos PE, se deduce mediante la hipótesis de que cualquiera de sus puntos A está en equilibrio, sometido a la acción atrayente de una masa M concentrada en el centro O de la tierra, y a la fuerza centrífuga F (igual al doble de lo normal según el profesor Ruiz), debida a la rotación de toda la masa alrededor del eje YY. Esto equivale a suponer un cuerpo central M esférico, o cuyo achatamiento séa prácticamente despreciable, y una región B, comprendida entre la parte esférica y la superficie exterior, cuya acción gravitatoria sea también despreciable; es decir, se suponen las mismas condiciones que se dan si se considera que M es un cuerpo celeste cualquiera, y B una atmósfera muy tenue, cuya masa se puede estimar como muy pequeña con respecto a la del cuerpo central.

Si se acepta la tesis anterior, el cálculo es tan sencillo como lo supone el profesor Ruiz, más si la región B interviene también en la atracción general, como es lo cierto si aceptamos sin restricción la ley de Newton, el cálculo presentará todas las complicaciones que le han dado a este problema tan singular atractivo para los hombres de ciencia atrás nombrados, y que en él se han ocupado sin resolverlo completamente.

Empleando el análisis y con relativa facilidad podemos hacer ver la diferencia apuntada. Llamemos, en efecto, X, Y, Z, las proyecciones de la fuerza atractiva W sobre los tres ejes coordenados. Como un punto cualquiera material de masa unidad, A, debe estar en equilibrio dinámico bajo la acción de dicha fuerza y de la fuerza centrífuga F, de proyecciones $2\omega^2 x$, O, $2\omega^2 z$ sobre los mismos ejes X, Y, Z, respectivamente, el

(1) V. F. Tisserand: *Traite de Mecanique Celeste*. Tome IV P. 233. También E. Roche: *Essai sur la constitution et l'origine du systéme*. También Poincaré: *Lecons sur les hypotheses cosmogoniques*.

principio del trabajo virtual nos permite escribir la siguiente ecuación:

$$\left(X+2\omega^2 x\right)\partial x + Y\partial y + \left(Z+2\omega^2 z\right)\partial z = 0 \qquad 1$$

Si llamamos V al potencial de las fuerzas de atracción W, se pueden poner las siguientes igualdades, cuya significación es por demás conocida, dado que el sistema de fuerzas de atracción es conservativo:

$$X=\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y=\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z=\frac{\partial V}{\partial z}$$

Substituyendo en (1):

$$\partial V + 2\omega^2\left(x\,\partial x + z\,\partial z\right) = 0$$

e integrando:

$$V + \omega^2\left(x^2+z^2\right) = C \qquad 2$$

en la que C es una constante igual a $C=\frac{KM}{b}$, si adoptamos los mismos símbolos del artículo que discutimos. Como se ve, hemos aceptado la misma expresión de la fuerza centrífuga utilizada por el profesor Ruiz; es decir, una fuerza centrífuga doble de la usual. Si hubiésemos empleado la fuerza centrífuga verdadera, habríamos llegado a la expresión:

$$V+\frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+z^2\right) = C \qquad 3$$

la que, como se ve, sólo difiere de la anterior en el coeficiente del segundo término. En ambas expresiones V es el potencial de las fuerzas de atracción. Para el caso supuesto de la esfera se tiene:

$$V=\frac{KM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad 4$$

en que K es la constante de la gravitación universal y M la masa de la tierra. Este valor de V reemplazado en (2) nos da para la superficie de nivel la ecuación siguiente:

$$\frac{KM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\omega^2\left(x^2+z^2\right)=C$$

Si hacemos en la expresión anterior Z igual O, y tenemos en cuenta que el radical es igual a la distancia de un punto cualquiera A al centro O, o sea *Rho* radio vector de un punto de la superficie de nivel, obtendremos la expresión de la curva meridiana, intersección de la superficie de nivel con el plano de los ejes YX; es decir, la misma expresión (1) establecida por el profesor Ruiz en su escrito.

Mas si, por otra parte, suponemos que la masa encerrada por la superficie exterior participa en la atracción, tendremos una expresión del potencial V mucho más complicada que la (4), debido a que, entonces, sería preciso calcular y adoptar el potencial de una masa distinta a la esférica y que satisfaga la condición (2). Dicha masa estaría limitada por una superficie cuya ecuación podemos representar por:

$$\phi(x\ y.z)=0$$

Como los desalojamientos virtuales del punto A a que se refiere el principio utilizado sólo pueden tener lugar en la superficie anterior, ellos deberán cumplir la siguiente relación:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\partial y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\partial z=0$$

Y como estos mismos puntos A deben cumplir la relación (1), es necesario que se tenga:

$$\frac{X+2\omega^2x}{\frac{\partial\phi}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial\phi}{\partial y}}=\frac{Z+2\omega^2z}{\frac{\partial\phi}{\partial z}}$$

Sería preciso, por consiguiente, determinar la función *Phi* de manera adecuada para que se cumplan las dos condiciones anteriores; pero, al mismo tiempo, las componentes X, Y, Z, de la atracción W, dependerán a su vez de la misma función, y por intermedio de una expresión bastante complicada, hasta el punto de que, como queda dicho, el problema no ha sido resuelto aún de manera general.

Volviendo a la solución simple (5), y aun admitiendo que ella sea aceptable como solución de este problema, quedaría por demostrar la conveniencia de introducir en el planteo inicial una fuerza centrífuga inusitada. ¿Qué razones puede aducir el profesor Ruiz, para introducir en sus cálculos el doble de la fuerza centrífuga que correspondería según la mecánica clásica? Y al hacerlo ¿cómo puede hablar de que su teoría respeta las leyes de esa mecánica, si comienza por establecer una expresión extravagante de la fuerza centrífuga, que nada tiene que ver con dichas leyes? Se nos ha replicado que, precisamente, en tal expresión nueva reside la originalidad de la tesis que él presenta, ya que no habiendo sido posible un acuerdo entre la teoría y la observación, queda abierto el campo a la hipótesis, así que él, usando de un derecho inobjetable en tales casos para el científico, se ha aventurado a proponer una nueva hipótesis, la suya propia, con la cual ha logrado obtener los notables acuerdos que él reseña en su trabajo. Mas nosotros nos atreveríamos a contestar que este recurso de las nuevas hipótesis es el más expedito, y que de él echan mano sin tasa ni medida los arbitristas en ciencias, donde también los hay como en todo. Pero el problema quedaría sin una solución en el fondo, porque ¿cómo conectar estas hipótesis con las teorías mecánicas antiguas o modernas? Bien estaría la nueva hipótesis si con ella encontráramos distintos y más seguros caminos hacia hechos nuevos, o conectáramos regiones de la ciencia hasta hoy separadas. Esta sí sería la hipótesis fecunda; mas la hipótesis que sólo sirve de trampolín para saltar por sobre la dificultad, nada representa ni significa fuéra de la cuestión por ella resuelta. Tememos que la hipótesis propuesta por el profesor Ruiz sea de estas últimas.

La segunda objeción que nosotros le hacemos se refiere a la discusión matemática de la ecuación que representa las curvas meridianas. Ya hemos dicho cómo se deduce esta ecuación de la expresión (5) haciendo en ella $Z = O$. Así se obtiene:

$$\frac{KM}{\sqrt{x^2+y^2}} + \omega^2 x^2 = C = \frac{KM}{b}$$

El profesor Ruiz le da a esta expresión en su conferencia un alcance exagerado, basándose en las seis soluciones que aparenta tener para el problema tal expresión, las cuales serían otros tantos puntos de cruce de la curva o curvas representadas por la ecuación con el eje de las X. Pensó así que de dicha ecuación podrían obtenerse, al reemplazar en ella las constantes correspondientes, no sólo la curva meridiana relativa a la tierra, sino otras configuraciones de equilibrio propias de otros planetas y en particular la del planeta Saturno con su curva meridiana relativa al cuerpo central, y dos curvas meridianas laterales que corresponderían a los anillos. En el escrito que analizamos se restringe este alcance dado a la ecuación, pero se insiste en el error de pensar que la expresión puede presentar seis soluciones reales todas aceptables desde el punto de vista del problema planteado.

Para realzar el inconveniente apuntado vamos a discutir la ecuación (7) en coordenadas polares. Si hacemos, pues

$POA = \theta \qquad OA = \rho$ se tendrá:

$$x = \rho \operatorname{sen} \theta \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

y la ecuación se puede escribir entonces:

$$\frac{KM}{\rho} + \omega^2 \rho \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{KM}{b} \qquad (8)$$

Esta nueva forma deja ver claramente que las soluciones extrañas serían los valores negativos del radio vector *Ro,* cuya existencia es imposible desde el punto de vista físico, pues no es de suponer un potencial gravitatorio negativo.

De la expresión anterior se deducen las fórmulas:

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{KM(\rho - b}{\omega^2 \rho^3 b}}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho^3 b - KM(\rho - b)}{\omega^2 \rho^3 b}} \qquad 10$$

Estas fórmulas dejan ver claramente que se debe tener en primer lugar:

$$\rho > b \qquad \omega^2 \rho^3 b - KM\rho + KM > 0$$

Además si en la ecuación (8) hacemos *Theta igual a* $\dfrac{\pi}{2}$

se tendrá la ecuación de tercer grado:

$$\rho^3 - \frac{KM}{\omega^2 b}\rho + \frac{KM}{\omega^2} = 0 \qquad 11$$

la cual nos dará como raíces los valores de los radios vectores en los puntos donde la curva o curvas representadas por la ecuación cortan el eje de las X.

Hagamos:

$$-\frac{KM}{\omega^2 b} = p \qquad \frac{KM}{\omega^2} = q \qquad 12$$

La ecuación (11) se puede escribir substituyendo los valores anteriores:

$$\varrho^3 + p\varrho + q = 0 \tag{13}$$

Según el teorema de Descartes esta ecuación tendrá siempre una raíz negativa y sólo una. Ahora bien, como esta raíz es inaceptable, la condición de realidad de las otras raíces está sujeta a que se cumpla la desigualdad:

$$4p^3 + 27q^2 < 0 \tag{14}$$

Pero se tiene según las igualdades (12):

$$4p^3 + 27q^2 = \left(\frac{KM}{\omega^2}\right)\left(27 - 4\frac{KM}{\omega^2 b^3}\right)$$

Luego si hacemos $\dfrac{4KM}{\omega^2 b^3} = 27P$, la desigualdad (14) quedaría:

$$27\left(\frac{KM}{\omega^2}\right)^2 (1-P) < 0 \tag{15}$$

Para el caso de la tierra, si tenemos en cuenta que $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2}$

y $\dfrac{KM}{b^2} = g_0$ aceleración de la gravedad en el polo, es fácil

comprobar que *P mayor que 1.* Luego la ecuación (13) pertenecería a la clase de las llamadas irreductibles, con una raíz negativa inadmisible, y dos soluciones reales positivas que pueden obtenerse por medio de las fórmulas conocidas del álgebra superior.

Para continuar la discusión de la expresión (8) en el caso supuesto de la tierra, o sea para P mayor que la unidad, formemos la expresión de la tangente del ángulo *alpha* que hace ON con la tangente geométrica a la curva en el punto A, Fig. 1. Se tiene:

$$tg\,\alpha = \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{3KM\left(b - \frac{2}{3}\rho\right)}{\sqrt{KM(\rho - b)\left[\omega^2 b \rho^3 - KM(\rho - b)\right]}} \qquad 16$$

Si llamamos *Ro sub-uno y Ro sub-dos* las dos raíces positivas de la ecuación (11) o (13), y suponemos $\rho_1 < \rho_2$, según la teoría de las ecuaciones se puede escribir inmediatamente el cuadro siguiente de resultados:

$0 < \rho < b$	Inadmisible según las fórmulas (9) y (10). No hay curva.
$\rho = b$	Euación (11) *Mayor que O.* Punto P. de la curva. (ó P').
$b < \rho < \rho_1$	Ecuación (11) *Mayor que O.* Puntos en una de las cuatro ramas PE.
$\rho = \rho_1$	Ecuación (11) *Igual a O.* Punto E. de la curva. (ó E').
$\rho_1 < \rho < \rho_2$	Ecuación (11) *Menor que O.* Inadmisible según (10). No hay curva.
$\rho = \rho_2$	Ecuación (11) *Igual a O.* Punto gog' de las ramas infinitas GS.
$\rho_2 < \rho$	Ecuación (11) *Mayor que O.* Puntos en estas mismas ramas infinitas.

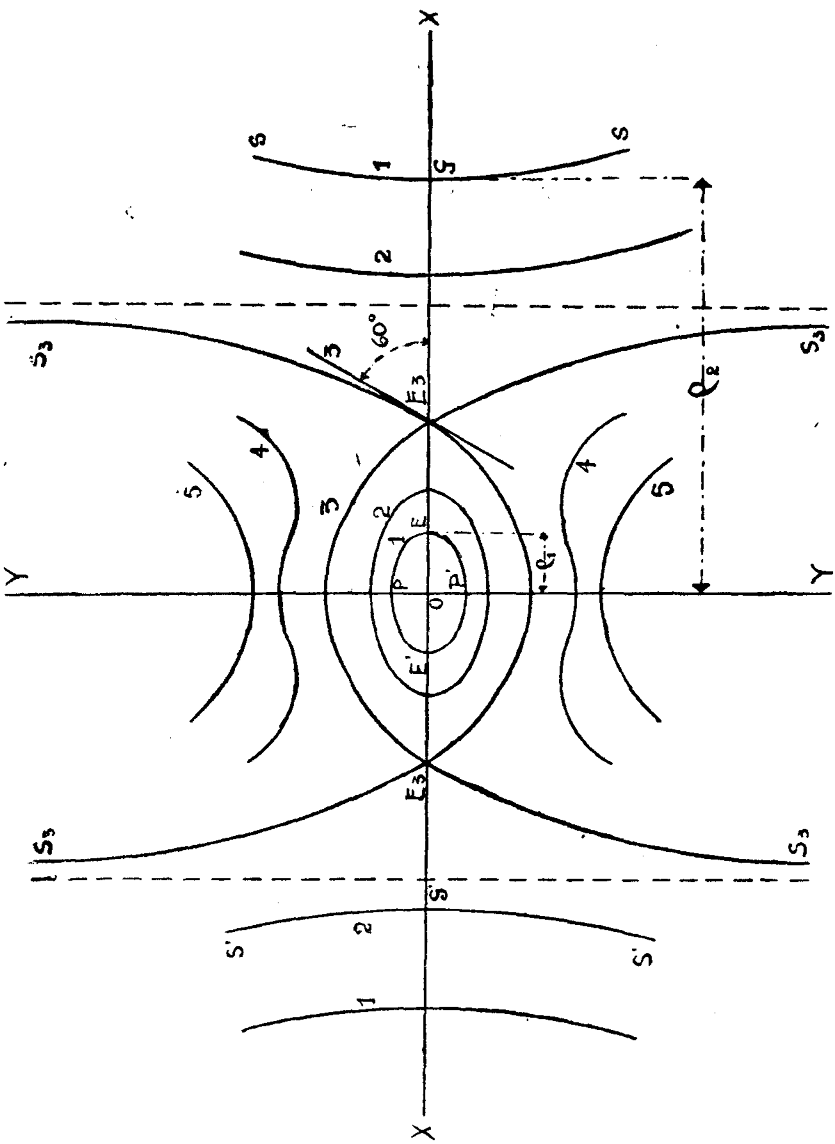

fig. 2

Se desprende del cuadro anterior que para el caso de la tierra, por ejemplo, *Ro* estará comprendido solamente entre b y *Ro sub-uno*, caso en que se obtendrá la curva cerrada PEP' E', o entre *Ro sub-dos* y un valor cualquiera mayor que éste, caso en que se obtendrán las dos ramas infinitas GS. Para cualquier valor de *Ro* comprendido entre estos límites se tendrá un valor perfectamente determinado de *Teta* deducido de una de las fórmulas (9) o (10). Recíprocamente, para cualquier valor del ángulo *Teta* comprendido entre o y 360º, se puede deducir uno determinado de *Ro* por medio de la ecuación de tercer grado que resultaría de la fórmula (8), cuyas características son idénticas a las de la ecuación (11), puesto que sus coeficientes p y q solamente quedarían divididos por un mismo número, lo cual no alteraría el sentido de la desigualdad (14).

Para el radio vector igual a la raíz superior *Ro sub-dos* el ángulo *Teta* se hace nuevamente igual a *Pi sobre dos y tangente alpha igual infinito*, lo que indica que la tangente en G a la rama infinita es vertical; pero esta curva ya no es cerrada, pues su radio vector admite todos los valores posibles hasta el infinito. Se trata por consiguiente de una curva abierta cuyas ramas se extienden simétricamente a un lado y otro del eje OX, pero cuya abscisa

x tiene un valor límite para $\rho = \infty$ igual a $\sqrt{\dfrac{KM}{\omega^2 b}}$;

es decir una *asíntota* que no está dibujada en la figura para todas las curvas. Estas ramas GS presentan un punto de inflexión. Esto quiere decir que la curvatura de dichas ramas no estará siempre dirigida en el sentido indicado por la figura, curva GS.

Si admitimos ahora que los coeficientes p y q puedan variar; es decir, si admitimos que la ecuación (11) pueda aplicarse a otras masas en rotación diferentes de la de la tierra, la constante P variará también, y sería preciso estudiar la modificación que sufrirían las curvas en consonancia con dicha variación. Se comprende que si P varía manteniéndose superior a la unidad, la disposición de las curvas sigue siendo la misma de la figura 2, aunque es de notar que para una disminución de P la curva central se dilata hasta 2, y las ramas infinitas se aproximan a 2 también.

Si suponemos que P llegue a ser igual a la unidad, la ecuación (11) o (13) presentará una raíz doble además de la negativa,

23

que es inaceptable. Sabido es también que en este caso las raíces son comensurables, y en cuanto a la raíz doble tendrá por valor:

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{3}{2} b$$

En este caso las curvas toman la posición marcada con 3 en el dibujo. Como se ve, la curva central se ha ampliado hasta unirse con las ramas laterales que se han aproximado hasta formar con la central una sola curva continua. En el punto de unión E las tangentes son comunes y el ángulo *Alfha* dado por la fórmula (16) es de 60°. Sobre las ramas ES el radio vector puede continuar creciendo indefinidamente, como lo demuestran las fórmulas (9) y (10) aplicadas al caso. Las ramas infinitas ES tienen una asíntota paralela al eje OY situada a la distancia

$\frac{3}{2} b\sqrt{3}$ tomada a partir de O sobre el eje X, según se deduce de la fórmula (9).

Vale la pena observar que la condición P = 1 significa mecánicamente

$$g = 2\omega^2\rho \qquad \text{o sea:} \qquad \frac{KM}{\omega^2 b^3} = \frac{27}{4} = \frac{g\rho^2}{\omega^2 b^3}$$

Es decir, si se hubiera adoptado la verdadera fuerza centrífuga, la curva obtenida marcaría el límite a partir del cual comienza a predominar la fuerza centrífuga sobre la gravedad. Este límite ha sido llamado de *Roche (1)*. En nuestro caso, dada citadas de Tisserand, Roche y Poincaré). En nuestro caso, dada la expresión singular admitida para dicha fuerza centrífuga, encontramos naturalmente que en este punto tal fuerza sería la mitad de la acción gravífica.

Podría suponerse, en fin, que *P Menor que 1,* mas este caso ofrece poco interés, ya que las curvas correspondientes, señaladas en la figura con los números 4 y 5, no cortan el eje X. Las soluciones de la ecuación, desde el punto de vista de la coordenada x serían imaginarias.

Se desprende de la discusión anterior que la expresión obtenida (7) no presenta para los casos de solución real sino cuatro raíces desde el punto de vista de la intersección de la curva o curvas representadas por dicha expresión con el eje X. Así, pues, no hay la posibilidad señalada por el profesor Ruiz de seis raíces, y por tanto no puede deducirse la existencia de curvas meridianas cerradas laterales, o dispuestas en forma tal que expliquen los famosos anillos del planeta Saturno.

Nuestra tercera objeción, o mejor dicho, duda, se refiere a las concordancias numéricas que presenta el profesor Ruiz Wilches al final de su escrito, como comprobación de su teoría. No nos parece, en efecto, que la fórmula que él somete al cálculo tenga el alcance que él le atribuye, ni que los resultados numéricos sean tan convincentes como él lo piensa.

La expresión comprobada numéricamente por el profesor Ruiz es la misma (11) de este escrito, mas en lugar de resolverla directamente, una vez substituídas las constantes correspondientes, despeja de ella el valor de b, radio polar, y supone conocido el radio ecuatorial a, el que toma igual numéricamente al del elipsoide de Glarke (1880). Así obtiene:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{\omega^2 a^3}{KM}} \qquad 17$$

Mas para resolver esta expresión numéricamente caben dos alternativas: o determinamos a KM a partir del dato experimental de g en el ecuador, o lo determinamos a partir del valor de g. obtenido para el polo por medio de la fórmula de Helmert. En el primer caso se tendría para la expresión de b:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{4\pi^2 a}{g T^2}} \qquad 18$$

y en el segundo:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{4\pi^2 a^3}{g_o T^2 b^2}} \qquad 19$$

Se comprende que no es indiferente el empleo de cualquiera de las fórmulas anteriores para la determinación de b; porque la (18) corresponde a la hipótesis de radio ecuatorial a conocido, y valor de g elegido en concordancia con la igualdad K M = a ^{2}g. Mientras que la (19) ha sido deducida suponiendo conocido el radio polar b y elegido g. de acuerdo con la igualdad correspondiente K M $=$ b ^{2}g. Además, como b sigue figurando en el denominador, en rigor habría que determinarlo por medio de una ecuación de segundo grado.

El resumen de nuestros cálculos con ambas fórmulas sería el siguiente:

Fórmula (18):

	Metros
Valor de b en el elipsoide de Clarke........	6356515
Valor de b deducido de la fórmula haciendo en ella g $=$ 9,8483 y a $=$ 6378249 (Clarke)...	6356358
Diferencia	157

O sea, un resultado casi igual al del doctor Ruiz, pero con la condición de corregir el g ecuatorial con una fuerza centrífuga doble de la ordinaria. para ser consecuentes con la teoría. Nótese que el valor introducido es superior al g polar, el cual tendría que ser modificado en consecuencia.

Fórmula (19):

	Metros
Valor de a en el elipsoide de Clarke	6378249
Valor de a deducido de la fórmula (raíz de la ecuación) (11) haciendo g. $=$ 9,832 y b igual al radio polar del mismo elipsoide: 6356515 metros	6378596
Diferencia	347

Se comprende que en este caso no es necesario corregir el valor de g. por fuerza centrífuga.

Se deduce de los cálculos anteriores que la expresión encontrada no representa exactamente el elipsoide de Clarke, ni ningún otro; porque si partimos del radio ecuatorial de Clarke y del g ecuatorial correspondiente, obtenemos un radio polar más corto en 157 metros, y al precio de haber afectado la aceleración de la gravedad con el doble de la fuerza centrífuga; y si, recíprocamente, partimos del radio polar de Clarke, y del g. polar correspondiente, llegamos a un valor del radio ecuatorial exagerado, el cual no es otra cosa que la menor raíz positiva de la ecuación (11), la que hemos designado en la discusión anterior con el símbolo *Rho sub-uno.*

Para disminuir la mayor discrepancia que presenta la fórmula

(19) quedaría el recurso de darle más crédito al g ecuatorial antes empleado y modificar en consecuencia el g. polar, a fin de conservar constante el factor KM. Creemos que así ha procedido el doctor Ruiz, basado en el hecho de que nadie ha medido el g. polar directamente, y de que no sería lógico suponer dicho factor KM variable, ya que la masa de la tierra, por grande que ella sea, y difícil de medir, no es una magnitud elástica. Sin embargo, habría que prescindir de la fórmula de Helmert tan laboriosamente establecida (1).

Dejando de lado las comprobaciones numéricas, y aun admitiendo que ellas pudieran ser mayores, creemos en fin que la expresión tan discutida tampoco tiene el alcance que se le atribuye en la 2ª de las conclusiones o razones justificativas de su cálculo dadas por el profesor Ruiz. La expresión (7) u (8) no representa en efecto la forma del Geoide, ni el profesor lo demuestra, puesto que sólo establece algunas concordancias con el elipsoide de Clarke o con el de Hayford, pero, él mismo lo sabe mejor que nadie que ninguno de estos elipsoides son el Geoide propiamente dicho, cuya superficie definida por modo empírico es imposible representar por medio de una expresión matemática explícita. Y decimos explícita porque en rigor la expresión (3) lo representaría; mas en la práctica esta expresión no ha podido hacerse explícita.

La razón del remoto parentesco que se nota con los elipsoides de referencia reside en el hecho de que la expresión (8) en cuestión, puede asimilarse a un elipsoide si despreciamos ciertas magnitudes relativamente pequeñas. En efecto: ya hemos visto cómo en la curva central *Rho* varía entre el radio polar b de 6356515 metros, y la raíz positiva menor *Rho sub-uno* o radio ecuatorial de 6378596 metros. Si llamamos d la diferencia variable entre el radio vector en un punto cualquiera de la curva y el radio polar, se tiene evidentemente: *p igual b más d.* Ahora bien, la ecuación (8) se puede escribir:

$$\omega^2 \cos^2\varphi = \frac{KM}{b}\left(\frac{\rho - b}{\rho^3}\right) = \frac{KM}{b^4}\, d\left(1 + \frac{d}{b}\right)^{-3}$$

(1) Substituyendo en la ecuación (11) en lugar de la aceleración 983,2 de Helmert para el polo, el nuevo valor 991,57 se obtiene para el radio ecuatorial 6378408, o sea una diferencia de 159 metros con el de Klarke.

Pero si desarrollamos $\left(1+\frac{d}{3}\right)^{-3}$ limitándonos a los términos de primer grado en d/b se obtiene:

$$\frac{1}{b^3}\left(1-3\frac{d}{b}\right)$$

y por tanto:

$$\omega^2\cos^2\varphi=\frac{KM}{b^3}\left(\frac{d}{b}-3\frac{d^2}{b^2}\right)$$

Dentro del orden de aproximación que nos hemos impuesto despreciemos a (d/b), se tiene entonces:

$$\omega^2\cos^2\varphi=\frac{KM}{b^4}d$$

de donde:

$$\frac{d}{b}=\frac{\omega^2 b^3}{KM}\cos^2\varphi$$

Reemplazando este valor en la igualdad establecida antes podemos escribir la siguiente ecuación aproximada del meridiano:

$$\rho=b\left(1+\frac{\omega^2 b^3}{KM}\cos^2\varphi\right) \qquad 20$$

Es sabido, por otra parte, que la ecuación de la elipse se puede escribir también:

$$\rho=b\left(1+\frac{e^2}{2}\cos^2\varphi\right) \qquad 21$$

en la que e es la excentricidad. $\sqrt{\dfrac{a^2 b}{2}}$ Luego la ecuación aproximada del meridiano obtenida se puede asimilar a una elipse cuya excentricidad será:

$$e = \left(\frac{2\omega^2 b^3}{KM}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 b}{g_o T^2}} \qquad 22$$

Ahora bien, esta excentricidad es aproximadamente igual a la del elipsoide de Clarke. Para éste se obtiene un efecto e = O, 082438, y para el elipsoide deducido de la curva propuesta: e = O, 082919. Esta es, pues, la razón del parentesco próximo o remoto que se nota entre ambas curvas.

Si hubiésemos dejado indeterminada la expresión o ley de la fuerza centrífuga, el mismo cálculo anterior nos habría llevado a la siguiente ecuación:

$$\rho = b\left(1 + \frac{F}{2KM} b^2 \cos\varphi\right)$$

en la F es la fuerza centrífuga.

A partir de esta ecuación el problema sería entonces buscar una ley para F, fuerza centrífuga, tal que se tenga:

$$\frac{F b^2}{2KM} = \frac{e^2}{2} \cos\varphi$$

en que e es la excentricidad del elipsoide de Clarke o de cualquier otro. La fuerza centrífuga *ad hoc* debería ser:

$$F = e^2 \frac{KM}{b^2} \cos\varphi$$

Efectuando este cálculo en el cual hemos despreciado las potencias superiores de la relación d/b, y a esta misma cantidad en frente de la unidad, se llega a la conclusión de que la fuerza centrífuga escogida por el profesor Ruiz es demasiado fuerte. No debiera haber tomado 2 sino 1,9768. (Siempre que la aceleración de la gravedad en el polo sea la de Helmert).

La afinidad de esta curva, no ya con el elipsoide de Clarke, por las razones vistas, sino con el llamado esferoide de Laplace deducido en su teoría de la forma de los planetas, explica el hallazgo de la relación (*)

$$\Delta T \hat{C} = \frac{3\pi}{K}$$

que el profesor Ruiz califica de muy interesante en apoyo de su tesis. (Hemos llamado aquí c al aplanamiento). Esta relación, en efecto, se puede escribir también: $C = \frac{Fe}{g}$

En la que Fe = fuerza centrífuga ecuatorial, g aceleración en el ecuador. Y si se admite que a es igual a b próximamente. Escrita así tal relación traduce simplemente un conocido teorema demostrado por Tisserand en su *Mecánica Celeste,* Tomo II, P. 90, el cual se enuncia así:

"El aplanamiento de la superficie de una masa fluida homogénea e incompresible, que ha alcanzado como forma de equilibrio la de un elipsoide de revolución de aplanamiento muy pequeño, es sensiblemente igual a los 5/4 de la relación entre la fuerza centrífuga ecuatorial y la pesantez correspondiente."

En el caso presente, dado que no se ha admitido la fuerza centrífuga corriente, se obtiene que el aplanamiento sería igual exactamente a dicha relación. La diferencia es desde luego relativamente pequeña, o sea lo que va de 1 a 1,25.

Para terminar podemos resumir las objeciones anteriores de la manera siguiente:

1).—No nos parece posible aplicar a la difícil cuestión de investigar la forma del globo terrestre el mismo criterio o procedimiento aplicado por Laplace, Roche o Poincaré, a la determinación de las superficies de nivel en el equilibrio de una masa gaseosa, compuesta por una condensación central esférica, y una

(*) Véase *Revista Universidad* Nº 4 P. 282.

atmósfera muy tenue en su derredor, cuya acción gravífica pudiera despreciarse.

2).—La expresión de la fuerza centrífuga empleada en el planteo de las ecuaciones es inadmisible si se pretende, como lo afirma el profesor Ruiz, resolver la cuestión sin salirse de la mecánica clásica.

3).—La discusión de la expresión matemática obtenida, debe realizarse en el sentido de rechazar las soluciones extrañas al problema, y por tanto inadmisibles. Como lo hemos demostrado, las soluciones no son más de cuatro, dos a dos iguales en coordenadas rectangulares, y en los casos que tales soluciones existen o son reales. Los anillos de Saturno no resultan de esta discusión.

4).—La expresión obtenida se reduce en primera aproximación a una elipse, que difiere poco del elipsoide de Clarke, debido a la introducción de dicha inusitada fuerza centrífuga. Sin embargo las concordancias anotadas son exageradas según nuestros cálculos si se adopta el g. polar. De otro modo habría que prescindir de la fórmula de Helmert. La similitud de la curva también con el esferoide de Laplace, deducido a partir de la fuerza centrífuga corriente, explica la expresión del aplanamiento encontrada conforme a un teorema ya conocido de la *Mecánica Celeste*.

5).—Finalmente, aunque las concordancias fueran aún más rigurosas, no sería el caso de asegurar que se ha encontrado la expresión matemática del Geoide, o superficie matemática de la tierra, pues dicha superficie no es identificable con la de un elipsoide, ya que unas veces pasa por debajo y otras por encima de las superficies elipsoidales que se han elegido como referencia. La superficie del Geoide resulta, pues, ligeramente ondulada respecto de aquellas superficies de referencia, y no parece posible, por lo tanto, expresarla o representarla con una expresión matemática extrínseca. Pasamos por alto las dificultades que tendría en la práctica una comprobación de ésta o de cualquier otra expresión matemática con el propio Geoide.

JULIO CARRIZOSA VALENZUELA