NUEVAS PERSPECTIVAS EN LA MATEMATICA MODERNA

por WALDEMAR BELLON

Poco después de salir en esta Revista (Nº 3, Pp. 353 a 372) mi ensayo sobre Cantor, su teoría de los conjuntos y las consecuencias para la matemática moderna, me llegaron revistas que tratan del mismo problema según las últimas publicaciones del profesor Paul Finsler, de la Universidad de Zurich, Suiza. En una serie de publicaciones (véase lista al final), Finsler disuelve y lleva a una cierta solución el problema de las contradicciones en la matemática, contradicciones que habían surgido en torno a la teoría de los conjuntos. Otro problema, estrechamente vinculado con el primero, también se resuelve en los trabajos de Finsler: ¿Hay teoremas que no se pueden demostrar?

Tenemos, por falta de los trabajos originales, que seguir a la descripción que el doctor Georg Unger, un discípulo de Finsler, da en la revista *Goetheanum,* Dornach, Suiza, Nos. 39 y 42 del año 1944.

Ya en la antigüedad se conocieron problemas insolubles, pero sin que los hombres se hayan dado cuenta de que no existe tal solución, al contrario: por siglos siguieron los esfuerzos de resolverlos, como por ejemplo el famoso problema de la cuadratura del círculo. Hace menos de setenta años, en 1882, Ferdinan Lindemann (1852-1939, alemán) demostró que el problema no puede resolverse, que, para decirlo en la forma que comúnmente usamos, *Pi* es trascendental. Y como éste, la matemática moderna conoce muchas otras demostraciones de que ciertos problemas son insolubles.

El desarrollo de la matemática en las últimas décadas del siglo pasado, sin embargo, ha dado un nuevo aspecto a todas las discusiones sobre este punto. La teoría de los conjuntos, como vimos en el estudio sobre Cantor, introduce no solamente *una* idea sino muchas clases del infinito. Y aquí se levanta la pregunta: ¿Es posible verificar todas las partes de una demostración dentro del infinito, siendo el infinito nunca expresable por una finidad de pasos, sino una infinidad? Hemos visto que los matemáticos quedaron divididos en dos bandos, de los cuales uno gritaba: *¡Prohibido!* Y el otro trataba de salvar lo más posible, tomando refugio en un puro formalismo. Pero aun así queda la pregunta: ¿Puede la lógica así formalizada solucionar todos los problemas del caso, o es solamente un instrumento limitado? "Esta es la última forma de nuestra pregunta por la solubilidad básica de los problemas matemáticos. ¿Hay proposiciones que no tienen respuesta, ni afirmativa ni negativa, de las cuales se puede comprobar esto como anteriormente la imposibilidad de la solución exigida?".

Ya en 1923 Finsler mostró como tales *in conceptos* (Finsler dice *Un-Begriffe)* se podían introducir en la teoría de los conjuntos y con eso en los fundamentos del análisis. Escogió Finsler el ejemplo de una ecuación que no tiene solución, para explicar que hay ciertas definiciones que no pueden cumplirse. Al pasar por encima de esto y al usar un concepto *definido* de tal manera, concepto que no existe, deben presentarse contradicciones. El punto esencial es que tales definiciones contienen un círculo vicioso, es decir que lo que va a definirse forma parte integrante de la definición. Por ejemplo, aquel número que multiplicado por sí mismo da 9; o aquel número que aumentado por uno es igual a sí mismo. Es posible que tales círculos tengan una solución, como el primer ejemplo, pero no es indispensable que tal solución exista, como no la tiene el segundo ejemplo.

Sería un error querer prohibir todas las definiciones de la clase citada porque esto nos llevaría a una restricción indebida en la matemática. El hecho de que ciertas ecuaciones algébricas no tienen solución no nos lleva tampoco a prohibir todas las ecuaciones. Al contrario, averiguamos en cada caso si una cierta ecuación tiene solución o no. En su publicación sobre *La fundamentación de la teoría de los conjuntos* (1926) Finsler sigue un método similar en la definición. Principia con un sistema de axiomas a los cuales deben obedecer los conjuntos y comprueba que este sistema no tiene contradicciones. Los conjuntos así definidos son mucho más amplios en su aplicación que los de otros sistemas más restringidos. Claro está que Finsler logra con su sistema la exclusión de ciertos conjuntos y sucede, por ejemplo, que la suma de conjuntos ya no es un *conjunto* según su definición. Pero al excluir tales *conjuntos* Finsler llega a un grupo de conjuntos que justamente no contiene a aquellos conjuntos que anteriormente habían creado el problema de las antinomias. Así fue posible salvar la parte valiosa de la teoría de los conjuntos, sin incurrir en los problemas que han surgido de ella.

La manera como procede Finsler se ve del ejemplo siguiente, que tomamos de la citación en el estudio de Georg Unger:

"Sigamos con la disolución de una de las paradojas que debía demostrar la existencia de preguntas no contestables dentro de la lógica misma.

"Se había visto que la aplicación del pensamiento sobre sí mismo da lugar a todas las paradojas modernas. Así es preciso principiar aquí para quedar fieles a nuestro punto de salida, la coincidencia de instrumento y objeto. Al mismo tiempo podemos dar con este ejemplo más fuerza a la eficacia de nuestro procedimiento.

"La supuesta contradicción reside ahora en lo siguiente: El enunciado 'Esta proposición no se puede (absolutamente) demostrar' no debe ser ni verdadera, ni falsa. Llamemos por el momento una proposición que es ni verdad ni falsa, proposición absurda, la contradicción se precisa así que una proposición tampoco puede ser absurda."

Finsler resuelve este problema de la manera siguiente:

"*La contradicción se formula:* 1. Si la proposición fuese *falsa*, su contrario sería verdad, es decir, que la proposición *sí* puede demostrarse. Pero una proposición falsa *no* puede demostrarse (solamente puede refutarse). 2. Si la proposición fuese *basurda,* y por consiguiente no pudiese demostrarse (solamente una proposición verdadera puede demostrarse); pero éste es el contenido de la proposición, que por consiguiente sería *verdadera.* 3. Después de excluir las dos posibilidades *falso y absurdo, debería* quedar como única posibilidad la tercera: la proposición es verdadera (q. d. *no-demostrable*). Pero esta última conclusión sería exactamente la demostración.

"*La contradicción se disuelve:* 1. Cada proposición, y así también la presente, exige tácitamente su propia exactitud. En todas las otras proposiciones que no muestran tal retroacción de su forma sobre su contenido (o viceversa), no es necesario tener esto en cuenta, y por consiguiente lo pasamos por alto. 2. Pues, si la proposición fuese verdadera, solamente podría serlo bajo la suposición de que *verdadero* y *no-demostrable son ideas compatibles.* 3. Las contradicciones arriba indicadas son justificadas y muestran la *falsedad* de la suposición tácita. *Verdadero* y *no-demostrable* son por consiguiente incompatibles. 4. La proposición es por consiguiente *falsa*. Porque nos contradecimos desde el principio mismo si la enunciamos (exigiendo tácitamente que el enunciado sea verdadero y diciendo al mismo tiempo que no sea verdadero, es decir no-demostrable). 5. Esta reflexión es *en el pensamiento* la verdadera solución de la paradoja; *anotada* produce la *contradicción formal:* habríamos refutado así la proposición y demostrado su contrario, lo que equivaldría a decir, que la proposición es demostrable, mientras la hemos refutado."

El valor de los trabajos de Finsler nos parece estar en haber mostrado un camino que la matemática debe seguir para reconquistar su fama de la ciencia exacta sin contradicciones. La ciencia moderna, sobre todo la física nuclear, la teoría de la relatividad y otras están tan esencialmente basadas en la matemática que un quebrantamiento de esta última debía tener las consecuencias más graves para el futuro de todo el pensamiento humano. Abrigamos la esperanza de que el nuevo acercamiento del pensamiento humano en la post-guerra haga posible una mayor divulgación de las ideas de Finsler para que el mundo científico se dé cuenta de las nuevas perspectivas que se están abriendo. Mientras tanto esta corta nota quiere llamar la atención sobre una serie de trabajos cuyo estudio detallado es indispensable para todos los interesados.

WALDEMAR BELLON

PUBLICACIONES DEL PROFESOR PAUL FINSLER

(Todas escritas en alemán)

¿Hay Contradicciones en la Matemática? (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 34 (1926). Páginas 143-155).

Demostraciones Formales y la Posibilidad de Decisión. (Matematische Zeitschrift. 25 (1926). Páginas 676-682).

Sobre la Fundamentación de la Teoría de los Conjuntos. (Mathematische Zeitschrift. 25 (1926). Páginas 683-713).

Sobre la Solución de Paradojas. (Philosophischer Anzeiger. 1927. Páginas 183-192), y la respuesta a una réplica del señor Lipps. Páginas 193-201). Vol. citado. Páginas 202-203).

La Existencia de la Serie de Números y del Continuo. (Commentarii Mathematici Helvetici. Vol. 5 (1933). Páginas 88-94).

¿Hay Proposiciones sin Decisión? (Commentarii Helvetici. Vol. 16 (1944). Páginas 300-320).