Ciencias Físicas y Matemáticas

CARLO FEDERICI

SOBRE UNA LEY DE DUALIDAD EN LOGICA

La expresión "ley de dualidad" fue usada por primera vez por el matemático francés Gergonne en 1826, para indicar una propiedad, entendida e interpretada por él, descubierta en el campo de la geometría proyectiva por su compatriota y contemporáneo Poncelet; geometría que se llama proyectiva porque estudia las propiedades de las figuras que se conservan a través de las proyecciones y secciones.

Como es necesario tener una idea clara de la "ley de dualidad", creo oportuno mostrar cómo puede encontrarse en el campo en donde fue descubierta por primera vez.

Para tal fin consideramos dos rectas en un plano; se presentan dos casos: o se encuentran, y entonces se llaman "incidentes" y tienen un punto común, o no se encuentran y entonces se llaman "paralelas" y tienen en común, según la nomenclatura de Desargues, matemático francés de la primera mitad del siglo XVII, la "dirección" o el "punto impropio" o el "punto en el infinito".

Análogamente consideramos dos planos; se presentan dos casos: o se encuentran y entonces se llaman "incidentes" y tienen en común una recta, o no se encuentran y entonces se llaman "paralelos" y tienen en común, según la misma nomenclatura de Desargues, la "yacitura" o la "recta impropia" o la "recta en el infinito".

Con Poncelet es natural introducir el concepto de "plano impropio" como la clase o el lugar (geométrico) de todos los "puntos impropios" y de todas las "rectas impropias".

La introducción de estos entes geométricos "impropios", además de los propios, o sea la introducción de los conceptos "amplificados" de "punto" y "recta" y 'plano", nos permite enunciar las proposiciones de geometría proyectiva en una forma concisa, sea en extensión, sea en número, como puede verse a través de los siguientes ejemplos, y este precisamente a causa de la uniformidad así producida en los enunciados.

"dos puntos determinan una recta que pertenece a ambos"	"dos planos determinan una recta que pertenece a ambos"
"tres puntos no pertenecientes a la misma recta determinan un plano que pertenece a los tres"	"tres planos no pertenecientes a la misma recta determinan un plano que pertenece a los tres"
"si dos puntos distintos pertenecientes a una recta pertenecen a un plano entonces la recta pertenece al plano"	"si dos planos distintos pertenecientes a una recta pertenecen a un punto, entonces, la recta pertenece al punto"
"si dos rectas distintas pertenecen a un mismo plano, ellas determinan un punto que pertenece a ambas"	"si dos rectas distintas pertenecen a un mismo punto, ellas determinan un plano que pertenece a ambas"

Entre los enunciados que preceden subsiste la siguiente relación notable, y en el sentido etimológico de la palabra "evidente": "las proposiciones de derecha se obtienen de las de izquierda cambiando, entre sí y doquiera, la palabra "punto" con la palabra "plano", y dejando invariadas las otras, entre estas la palabra "recta". Es costumbre expresar tal hecho diciendo que: "los enunciados de derecha y los de izquierda son entre sí ordenadamente duales en el espacio", y en general dos enunciados de geometría proyectiva se llaman "entre sí duales en el espacio" si pueden obtenerse uno del otro por medio del cambio de las palabras indicadas.

Análogamente podríamos mostrar que existen enunciados de geometría proyectiva que se obtienen uno del otro por medio del cambio de la palabra "plano" con la palabra "recta", y en tal caso se habla de "enunciados entre sí duales en la "radiación", y por fin podríamos mostrar todavía que existen enunciados de geometría proyectiva que se obtienen uno del otro por medio del cambio de la palabra "recta" con la palabra "punto" y en tal caso se habla de "enunciados entre sí duales en el plano".

Resulta en seguida la importancia "heuristica" y la fecundidad de búsqueda de una ley semejante; en efecto una mitad de las proposiciones cuyo sistema compone la geometría proyectiva puede obtenerse de la otra mitad con el sencillo cambio automático de la palabra "punto" con la palabra "plano" (o "plano con recta o recta con punto") como es, en el último caso, por los célebres teoremas de Pascal y de Briauchón, sobre los exágonos sencillos inscritos en una cónica, el primero; y sobre los exaláteros sencillos circunscritos a una cónica el segundo.

¿Qué interpretación puede recibir tal ley de dualidad en el espacio? Gergonne la interpreta como posibilidad de construír dos geometrías, igualmente coherentes y lógicamente equivalentes; una que tiene como elemento el "punto" y la otra el "plano". Pero, más profundamente podemos observar que si damos por desarrollada una geometría proyectiva abstracta (o sea una geometría en la que los entes geométricos no gozan de su significado intuitivo, mientras sí lo tienen sus relaciones), entonces la ley de dualidad en el espacio puede interpretarse como posibilidad de atribuír a las palabras "punto" y "plano" ora los significados (amplificados) de las palabras mismas, ora los significados (amplificados) de las palabras "plano" y "punto".

Pasamos ahora al campo de la lógica y precisamente al campo del cálculo proporcional.

Evidentemente se necesita fijar qué cosa entendemos por "proposición". Por "proposición" entendemos toda expresión (escrita) que pueda ser afirmada o negada, o sea que pueda ser llamada verdadera o falsa, es decir, que es suceptible de los valores lógicos "verdadero" y "falso", o sea, por fin, toda expresión tal que, precedida por la expresión "es verdadero que" o "es falso que", se transforme en una nueva expresión que tenga todavía significado. Así por ejemplo "$2+2 = 4$", es una proposición en el sentido prefijado porque "es verdadero que $2+2 = 4$" y "es falso que $2+2 = 4$" son dos nuevas expresiones que tienen todavía significado y precisamente la primera es verdadera, y la segunda falsa, mientras que la expresión "levantáos!" que según los gramáticos es una proposición, para nuestra manera de ver no lo es, porque las expresiones "es verdadero que levantáos!" y es "falso que levantáos!" no tienen sentido.

Ahora como se habla de "cálculo proposicional", es evidente que se necesita hablar de "operadores sobre" y de "operaciones o relaciones entre" proposiciones. La gramática indica como operaciones o relaciones entre proposiciones, las palabras que pueden denominarse las articulaciones del discurso, quiero decir las "conjunciones". El cálculo proposicional entonces es el estudio de las conjunciones "more aritmético".

Y como en aritmética sabemos reducir, o mejor dicho analizar o definir las operaciones por medio de una operación más sencilla v. gr. el contar, así en el cálculo proposicional buscamos reducir las varias conjunciones a una conjunción más sencilla que las otras y a algunas expresiones conjuncionales.

Precisamente mostraremos (y no demostraremos) que las varias conjunciones pueden analizarse (por lo menos aproximadamente) por medio de la conjunción copulativa "y", que indicaremos con el símbolo "." y de las expresiones conjuncionales (en cuanto contienen la "reina"de las conjunciones: "que") "es verdadero que" y "es falso que" que indicaremos repectivamente con "|—" y "—".

Para tal fin indicamos con los signos "p" y "q" dos proposiciones arbitrarias (variables proposicionales) e indicamos con "Ω" una conjunción cualquiera (variable conjuncional) y consideramos la proposición compuesta "p Ω q", cuyos valores lógicos, habiéndose fijado Ω, dependen de los valores lógicos que p y q asumen simultáneamente; y como cada variable proposicional puede asumir los valores lógicos V (verdadero) y F (falso) se sigue que los valores de p y q se pueden acoplar de cuatro maneras diversas (variaciones con repetición de dos objetos (V y F) de dos en dos, o sea 2^2) tal como sigue: VV, FV, VF, FF. Se necesita entonces para fijar el significado de Ω, determinar los valores que asume "p Ω q" cuando los valores de p y q son los indicados respectivamente por la primera, segunda, tercera, cuarta pareja.

Para tal fin, consideramos una tabla compuesta de tres columnas: en la primera pongamos los valores de p, en la segunda los de q, y por fin en la tercera los de p Ω q de manera que los valores de p y q se presenten acoplados como ya se ha dicho según las parejas VV, FV, VF, FF.

Es evidente entonces que la tercera columna puede llamarse de 16 modos diferentes, y precisamente según el número de las variaciones con repetición de dos objetos (V y F) de cuatro en cuatro o sea 24.

Los resultados están consignados en la Tabla número 1. Por falta de signos tipográficos adecuados para indicar las conjunciones, en lo que sigue usaremos los números de 1 a 10 en vez de los símbolos relativos (Véase Tabla número 1).

De las 16 conjunciones así buscadas, 8 tienen como base gráfica el signo "." y las otras 8 el signo "o"; las primeras se llaman "sencillas" y las segundas "compuestas".

La forma de los símbolos de las sencillas sugiere inmediatamente sus lecturas, si se observa que cada uno de tales símbolos es del tipo gráfico $\frac{V^{2}}{_{3}}{}_{4}$ en donde los signos marcados respectivamente con 1, 2, 4 son sustituíbles de todas las maneras posibles con los signos " |—" "—" (variaciones con repetición de dos objetos (V y F) de tres en tres, es decir 2^3 o sea 8) y que el signo marcado con *1* indica el valor de p, el marcado con 2 el de q, el marcado con 3 o sea "." indica que 1 p y 2 q forman sistema, y por fin el marcado con 4 indica el valor de p Ω q cuando p tiene el valor 1 y q el valor 2.

Veamos ahora de interpretar los varios signos conjuncionales: "p *1 q*" es la proporción compuesta con "p" y "q", y tal que es falsa si p es falsa y si (simultáneamente) q es falsa (verdadera entonces en los otros 3 casos), y que puede entonces leerse "es falso que, es falso que p y es falso que q" y como el hombre más fácilmente habla en términos de verdad antes que de falsedad, la proposición dicha puede también leerse "es verdadero que, es verdadero que p o es verdadero que q" y como por otra parte el hombre también tiende a subentender las afirmaciones, más brevemente se puede leer "p o q".

En resumen podemos afirmar que el signo *"1"* corresponde a la conjunción "o" pero en el sentido latino de "vel".

"p *2* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que "es falsa si p es verdadera y si (simultáneamente) q es falsa" (verdadera entonces en los otros tres casos) y que puede entonces leerse "es falso que, es verdadero que p, y es falso que q" o todavía hablando en términos de verdad como arriba "es verdadero que, si p es verdadero entonces q es verdadero" y como antes, más brevemente se puede leer "si p entonces q". En resumen podemos afirmar que el signo *"2"* corresponde a las conjunciones correlativas "si... entonces".

"p *3* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que es falsa si p es falsa y si (simultáneamente) q es verdadera (verdadera entonces en los otros tres casos) y que puede entonces leerse "es falso que, es falso que p y es verdadero que q" o hablando en términos de verdad como de costumbre "es verdadero que p es verdadero si q es verdadero" y más brevemente 'p si q".

En resumen podemos afirmar que el signo *"3"* corresponde a la conjunción "si".

"p *4* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que "es falsa si p es verdadera y si (simultáneamente) q es verdadera" (verdadera entonces en los otros tres casos) y que puede entonces leerse" es falso que es verdadero que p y es verdadero que q" y más brevemente", "es falso que, p y q" o todavía "es verdadero que p o q son falsos" y más brevemente "p o q son falsos" en donde "o" tiene el sentido latino de "vel".

En ese caso no hay una conjunción correspondiente al signo.

"p *5* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que es verdadera si p es verdadera y si (simultáneamente) q es verdadera" (falsa entonces en los otros tres casos) y que puede entonces leerse" es verdadero que; es verdadero que p y es verdadero que q", y más brevemente "p y q".

En resumen podemos afirmar que el signo "*5*" corresponde a la conjunción "y".

"p *6* q" es la proposición compuesta con "p y q" y tal que "es verdadera si p es falsa y si (simultáneamente) q es verdadera" y que puede entonces leerse "es verdadero que, es falso p y es verdadero que q" y más brevemente 'no p, pero q".

En resumen podemos afirmar que el signo "*6*" corresponde a la conjunción o forma conjuncional "no... pero"

"p *7* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que "es verdadera si p es verdadera y si (simultáneamente) q es falsa" y que puede entonces leerse "es verdadero que, es verdadero que p y es falso que q" y más brevemente "p pero no q".

En resumen podemos afirmar que el signo "*7*" corresponde a la conjunción o forma conjuncional "pero no".

p" *8* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que "es verdadera si p es verdadera y si (simultáneamente) q es falsa" y que puede entonces leerse "es verdadero que, es verdadero que p y es falso que q" y más brevemente "ni p, ni q".

En resumen podemos afirmar que el signo "*8*" corresponde a las conjunciones correlativas "ni... ni".

"p *9* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que es verdadero si p y q son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas o sea si p y q tienen el mismo valor lógico.

Podemos entonces decir que "*9*" es el signo de equivalencia lógica y se puede leer "es lo mismo que" que es una forma conjuncional.

"p *10* q" es la proposición compuesta con "p" y "q" y tal que "es verdadera si p es verdadera y si (simultáneamente) q es falsa o si p es falsa y si (simultáneamente) q es verdadera, o sea si p y q tienen valor lógico contrario y que puede entonces leerse "p o q", donde, pero, en ese caso la conjunción "o" tiene el sentido de la latina "aut".

De estas primeras diez conjunciones damos la lectura en resumen en la Tabla número 0.

Las otras seis conjunciones compuestas no tienen importancia en el desarrollo del cálculo proposicional; entonces las dejamos.

Ahora dos sistemas de postulados que permitan desarrollar el "cálculo proposicional" son los consignados en la tabla número 2 y están numerados de 0 a 19 y de 0' a 19'.

En todos ellos, las comas son signos de puntuación, y la pausa es mayor si mayor es el número de las mismas. Las letras "p, q y r" son "variables proposicionales" o sea signos que representan proposiciones, es decir signos que pueden ser substituídos por proposiciones.

Las letras "p q" son "variables matriciales" o sea signos que representan respectivamente lo que queda de un postulado, o de un teorema, cuando se elimine el signo "|—" o "—" que precede a todo postulado o teorema; por ejemplo *P* puede representar, y entonces puede ser substituído por —,—p,, *9* ,,|—, ı— *p o* P *5* p *9* p ó p *2* q, *5*, q *2* r, *2*, p *2* r y así sucesivamente, mientras que q puede representar y entonces puede ser substituído por

p 1 p, 10 p ó —,—p,, 10 p ó p 1 q, 1 r,, 10,, p 1, r 1 q

Y así sucesivamente, en donde substituímos los símbolos por los números relativos de orden de la Tabla número 1.

Veamos pues la lectura de algunos de estos postulados; por ejemplo el 17 que es el *sylogismo*: en efecto se puede leer: "es verdadero que si p implica a q, y si q implica a r,, entonces, p implica a r"; el 16 es la enunciación de la propiedad asociativa y conmutativa de "*1*"; en efecto se puede leer: "es verdadero que, p y q, y r, es equivalente a, p y, r y q"; y así sucesivamente.

Es menester anotar que mientras los postulados entre sí duales tienen la misma complejidad que si se toman en su forma simbólica, lo mismo no puede decirse si se toman en la forma del hablar común (Véase en particular 17 y 17").

Como hemos observado por los enunciados de la geometría proyectiva también aquí podemos observar que entre los enunciados del cálculo proposicional existe una evidente relación que es la siguiente: "las proposiciones de derecha se obtienen de las de izquierda cambiando entre sí y dondequiera los símbolos "|—" y "—", o sea, las expresiones "es verdadero que" y "es falso que" y los símbolos "P" y "q" es decir "la proposición verdadera "P" y la proposición falsa "q".

También en tal caso solemos expresar el hecho diciendo que "los enunciados de izquierda y los de derecha son entre sí duales en el cálculo proposicional", y también en ese caso podemos relevar la importancia heuristica de esta ley. Además, como ha sido hecho en geometría podemos también aquí decir que la ley de dualidad puede ser interpretada a la manera de Gergonne como posibilidad de construir dos cálculos proposicionales igualmente coherentes y lógicamente iguales, uno que tiene como ente fundamental "el verdadero" y el otro "el falso"; o en la segunda manera interpretar la ley de dualidad como posibilidad de una doble interpretación de un cálculo proposicional abstracto (en el cual, o sea, se hace abstracción del significado intuitivo de los símbolos); de esta doble interpretación se obtiene una de ellas atribuyendo a los símbolos "|—" y "—" los significados respectivos de "es verdadero que" y es falso que", y la otra atribuyendo a los mismos símbolos los significados respectivos de "es falso que" y "es verdadero que".

Las consideraciones que preceden llevan a dos conclusiones: La primera en forma paradojal, o sea verdadera pero falsa aparentemente, puede enunciarse como sigue: "dos personas pueden muy bien hablar con las mismas palabras sobre las mismas cosas, por ejemplo sobre "verdadero" y "falso" entenderse muy bien, y llegar a las mismas conclusiones, pero, mientras una tácita y constantemente atribuye a las palabras "verdadero" y "falso" el significado corriente que ellas tienen la otra puede atribuir a aquellas palabras el significado consciente que tienen las palabras 'falso y "verdadero".

La segunda puede enunciarse así: "mientras es costumbre creer que una palabra, por ejemplo "verdadero" tenga un significado por sí mismo, intuitivamente claro, lo que hemos dicho comprueba, antes, que el significado de una palabra es determinado por el conjunto de sus reglas de uso, o, como más brevemente podemos decir, por su "sintaxis" y entonces en forma más suscinta podemos afirmar que "el significado de una palabra es su sintaxis".

TABLA N°0

⊢	se lee "es verdadero que "		—	se lee "es falso que "	
⩡	" " " y "	5	⊻	" " " vel "	1
⩡	" " " no... pero "	6	⊻	" " " si ... entonces"	2
⩡	" " " si... pero "	7	⊻	" " " si "	3
⩡	" " " ni .... ni "	8	⊻	" " " "	4
⊢⊖⊣	" " " o sea "	9	⊖	" " " aut "	10

TABLA N°1

p	q	⊻	⊻	⊻	⊻	⩡	⩡	⩡	⩡	⊢⊖⊣	⊖	⊢o	o⊣	−o	o−	ɸ	ɸ	−p	−q
V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V
p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	−p	−q

TABLA N°2

0	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} \vdash_{\|} \vdash p, \bullet, \vdash q$	0'	$-_{\|\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|\|} -_{\|\|} -p, \bullet, -q$
1	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} -_{\|} -p, \bullet, \vdash q$	1'	$-_{\|\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|\|} -_{\|} -p, \bullet, -q$
2	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} \vdash_{\|} \vdash p, \bullet, -q$	2'	$-_{\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|} -_{\|} -p, \bullet, -q$
3	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|\|} \vdash_{\|\|} -p, \bullet, -q$	3'	$-_{\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|} -_{\|} -p, \bullet, -q$
4	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} -_{\|} -p, \bullet, -q$	4'	$-_{\|\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|} \vdash_{\|} -p, \bullet, -q$
5	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} -_{\|} \vdash p, \bullet, -q$	5'	$-_{\|\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|\|} -_{\|} -p, \bullet, \vdash q$
6	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} -_{\|\|} -p, \bullet, \vdash q$	6'	$-_{\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|} -_{\|\|} -p, \bullet, -q$
7	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} -_{\|} \vdash p, \bullet, \vdash q$	7'	$-_{\|\|\|\|} p \veebar q, \ominus_{\|\|\|} \vdash_{\|\|} -p, \bullet, -q$
8	$\vdash_{\|\|\|} p \vdash\ominus\dashv q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} p \veebar q, \veebar, p \veebar q$	8'	$-_{\|\|\|} p \ominus q, \ominus_{\|\|} p \veebar q, \veebar, p \veebar q$
9	$\vdash_{\|\|\|} p \ominus q, \vdash\ominus\dashv_{\|\|} p \veebar q, \veebar, p \veebar q$	9'	$-_{\|\|\|} p \vdash\ominus\dashv q, \ominus_{\|\|} p \veebar q, \veebar, p \veebar q$
10	$\vdash_{\|\|} \vdash q, \vdash\ominus\dashv, -P$	10'	$-_{\|} -P, \ominus, \vdash q$
11	$\vdash_{\|\|\|} -, -p_{\|\|} \vdash\ominus\dashv_{\|\|} \vdash, \vdash p$	11'	$-_{\|\|\|} \vdash, \vdash p_{\|\|} \ominus_{\|\|} -, -p$
12	$\vdash_{\|\|\|} \vdash, -p_{\|\|} \vdash\ominus\dashv_{\|\|} -, \vdash p$	12'	$-_{\|\|\|} -, \vdash p_{\|\|} \ominus_{\|\|} \vdash, -p$
13	$\vdash_{\|\|\|} \vdash, \vdash p_{\|\|} \vdash\ominus\dashv\ p$	13'	$-_{\|\|\|} -, -p_{\|\|} \ominus_{\|\|} p$
14	$\vdash_{\|\|} p \veebar p, \vdash\ominus\dashv, p$	14'	$-_{\|\|} p \veebar p, \ominus\ p$
15	$\vdash_{\|\|} P \veebar p, \vdash\ominus\dashv, p$	15'	$-_{\|\|} q \veebar p\ \ominus\ p$
16	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \veebar r_{\|\|} \vdash\ominus\dashv_{\|\|} p \veebar, r \veebar q$	16'	$-_{\|\|\|} p \veebar q, \veebar r_{\|\|} \ominus_{\|\|} p \veebar, r \veebar q$
17	$\vdash_{\|\|\|} p \veebar q, \veebar, q \veebar r_{\|\|} \veebar, p \veebar r$	17'	$-_{\|\|\|} p \veebar q, \veebar, q \veebar r_{\|\|} \veebar, p \veebar r$
18		18'	
19		19'	