Ciencias Físicas y Matemáticas

EDUARDO GAMBA ESCALLON

La Dinámica Clásica y la Mecánica Ondulatoria

El problema central de la Física en el siglo XX es el problema de la luz, o, en términos generales, el de la radiación. En efecto, según se sabe, los grandes ramales o vertientes entre los cuales se reparte el caudal de las más recientes y fecundas investigaciones en esta materia, son principalmente tres: la física quántica, la teoría de la relatividad y la nueva mecánica ondulatoria. Ahora bien: el origen de la física quántica, por ejemplo, hay que buscarlo en los estudios de Boltzmann, Wien, Rayleigh y, finalmente, Planck sobre las leyes de la radiación de los cuerpos negros. La teoría electromagnética y las clásicas experiencias de Michelson para determinar la velocidad absoluta por procedimientos ópticos, sirven de antecedente inmediato a la relatividad especial. Y, en fin, la dualidad inherente a los fenómenos luminosos —o sea el carácter ondulatorio y, al mismo tiempo, corpuscular de la luz— ha originado, históricamente hablando, la Meánica Ondulatoria.

Las circunstancias que han precedido la aparición de esta última son, por demás, bien conocidas: al culminar en el siglo XVII, la formidable construcción de la Dinámica clásica, propone Newton, con algunas reservas, la hipótesis corpuscular y, desde ese momento, la luz es considerada, como una manifestación material de carácter discontínuo o discreto. Más tarde, con las definitivas comprobaciones de Young, Fresnel y León Foucault sobre interferencia y difracción, cobra renovada fuerza la teoría ondulatoria, que con Maxwell alcanza, sin duda, su expresión más depurada y sistemática al final del siglo XIX. Mas, con el posterior descubrimiento de los fenómenos foto-eléctricos y del llamado «efecto» Compton, vuelve a adquirir vigencia la interpretación newtoniana, sin que, por tal motivo, se descarte definitivamente la hipótesis ondulatoria.

Coexisten así, durante uno de los períodos más apasionantes y fecundos de la historia de la Física, dos puntos de vista aparentemente incompatibles o contradictorios sobre la naturaleza de la luz. Por cierto que semejante dualidad, en sentir de algunos, parece, apenas, ejemplificar, en forma dramática, dos orientaciones opuestas que, de tiempo atrás, venían caracterizando la interpretación física del mundo y que se habían manifestado, de una parte, en un conjunto de nociones generales como las de «campo», «fluído», «acción a distancia», etc. y, por otra, mediante los conceptos de «masa», «carga», «impacto» y demás. Se trataba, por tanto, de una antítesis fundamental entre la *concepción atomística* y una imagen del mundo regida por el «*principio de continuidad*», que lógicamente requería un tremendo esfuerzo de síntesis, como el llevado a cabo por la Física en el siglo XX. para quedar definitivamente superada.

La primera expresión de este proceso sintético que enlaza dos aspectos aparentemente incompatibles de la realidad —el corpuscular y el ondulatorio— está acaso simbolizada en la «ecuación fotoeléctrica» formulada por Einstein en 1905 y comprobada experimentalmente por Millikan diez años más tarde: (1)

$$\frac{1}{2}\, m\, v_m^2 = h\, f - w_0$$

en la cual,

m = masa del electrón = 0.9107×10^{-27} gramos.
v_m = velocidad máxima de los «foto-electrones».
h = constante de Planck = 6.610×10^{-27} ergio segundo
w_0 = energía mínima de la emisión (ergios)
f = frecuencia de la luz incidente (c. p. s.)

O sea que la energía de la luz, o, más concretamente, la de los «corpúsculos» o «fotones», depende únicamente de la frecuencia (f) de la onda luminosa y está representada en cada caso por (h f).

Y así como la energía (W) de una onda electromagnética en el vacío está relacionada con la cantidad de movimiento (G) por la relación $G = \frac{W}{C}$, (2) siendo (c) la velocidad de la luz, la cantidad de movimiento (p) del fotón se relaciona, análogamente, con la energía (h f) por él transmitida por medio de la expresión: (3)

$$p = \frac{h f}{c}$$

Establecidas estas relaciones para los fenómenos luminosos, surge la posibilidad de aplicar al movimiento de las partículas materiales un criterio semejante al adoptado para los fotones o corpúsculos. Es decir, que si en el desarrollo de la óptica física en los últimos años se ha superado la hipótesis ondulatoria, para refundirla con la corpuscular, en la teoría de los quanta, según acabamos de indicar, cabe superar, asimismo, la concepción atomística de la materia, *asignándole también a esta última propiedades ondulatorias*, y armonizar los dos puntos de vista en una nueva mecánica. Se trata, en otras palabras, de suscitar, ante todo, en el centro mismo de la Dinámica una dualidad, una polaridad de conceptos semejante a la que informó por algunos años el estudio de los fenómenos luminosos; se propone, en segundo lugar, superar esa antítesis y enlazar, por último, dentro de una unidad superior, la Dinámica con la Optica. Tal ha sido, en resumen, la contribución principal de Louis de Broglie a la Física contemporánea.

Por cierto que al formular este pensamiento (inicialmente, según parece, por simple vía de especulación) el gran sabio francés no hacía en realidad, otra cosa que recobrar el curso de meditaciones y aportes muy anteriores, planteando con innegable lucidez y bajo una perspectiva distinta un conjunto de cuestiones implícita o explícitamente contenidas en la Física clásica. Para un espíritu tan sutil como el suyo, sin duda, hubiera sido posible descubrir, por ejemplo, una sugestiva analogía entre las transformaciones infinitesimales canónicas que, aplicadas a las variables de Hamilton, determinan la evolución de un sistema dinámico en el tiempo, y el principio de Huyghens que prescribe el curso de una perturbación ondulatoria a través del espacio. Pues ese tipo de transformación, aplicado a las ecuaciones, de Hamilton, conduce a las expresiones siguientes:

$$d q = \frac{d H (q p)}{d p} d t; \qquad d p = - \frac{H (q p)}{d q} d t$$

en las cuales,

(q) representa las coordenadas generalizadas de los puntos del sistema, según sus grados de libertad; (4)

(p) las cantidades de movimiento, es decir, los productos de sus masas por su velocidad, y

H (q p) la «función hamiltoniana» o energía total (cinética+potencial) del sistema considerado.

O sea que los sucesivos estados de un sistema dinámico o conjunto de puntos materiales en los tiempos dt, 2dt, 3dt,....ndt, se obtendrán por la aplicación repetida de estas ecuaciones matemáticas. Por otra parte, los «frentes» o superficies sucesivas de una onda luminosa, considerados a partir de un centro de perturbación en un medio dado, se obtienen, según el citado principio de Huyghens, mediante un cierto tipo de «transformación», consistente en la construcción de pequeñas esferas en cada punto del frente ondulatorio considerado, las que, a su turno, determinan la posición del inmediatamente siguiente. Podría, o hubiera podido decirse, por tanto' con relativa exactitud, (5) que el principio de Huyghens es para el movimiento ondulatorio en el caso de la luz, la representación gráfica de la ley que regula, analíticamente, las transformaciones de un conjunto de puntos materiales. O. viceversa, que *la serie de tranformaciones infinitesimales canónicas aplicadas a las ecuaciones hamiltonianas para determinar la evolución de un sistema dinámico constituye la expresión matemática de un frente ondulatorio en movimiento.*

Pero, además, es posible descubrir esta relación entre la Física corpuscular y la ondulatoria —esto es, en síntesis, entre la Dinámica y la Optica— retomando otras líneas de investigación igualmente sugestivas. Puede inclusive decirse, con razón, que desde el siglo XIX existe una verdadera »mecánica ondulatoria» de tipo hamiltoniano. Si consideramos, por ejemplo, la trayectoria de una partícula en un campo de potenciales variables, como ocurre, digamos, con un haz electrónico pasando de una recámara de potencial (V) a otra de potencial (V+dv) y asimilamos el caso al de la refracción de un rayo luminoso, una sencilla derivación matemática (6) nos lleva a la conclusión de que i = Kv o sea que el índice de refracción (i) necesario para explicar el movimiento de la partícula en el campo dado, varía de un punto a otro a lo largo de su trayectoria en proporción a la velocidad (v) de la partícula misma. Como, por otra parte, el índice de refracción es inversamente proporcional a la velocidad (u) de la onda, se tendría para éste y la velocidad (v) de la partícula lo siguiente:

$$u = \frac{k'}{v}\text{ , o bien, } \frac{1}{u} = \frac{v}{k'}$$

siendo (k'), desde luego, una constante de proporcionalidad.

Ahora bien: si tenemos en cuenta esta última expresión, podemos establecer una relación de identidad entre dos principios fundamentales de la mecánica clásica: el del *«tiempo mínimo»* de Fermat, y el de la *«acción mínima«* de Maupertuis:
Según el primero de ellos,

$$\lhd \int_{P_1}^{P_2} \frac{c}{u}\, ds = O = \lhd t$$

es decir, que la trayectoria descrita $\int ds$ por un rayo de luz entre dos puntos (P_1 y P_2) relativamente próximos, situado, por ejemplo, el primero en el espacio vacío y el otro en un medio cuyo índice de refracción representaremos por (i), siendo (u) la velocidad de la luz en dicho medio y (c) en el vacío, es el de tal naturaleza que el tiempo ($\lhd t$) invertido en recorrerla resulta mínimo. Principio que puede, también, formularse por,

$$\lhd \int i ds = O \qquad \text{(I)}$$

dado que $i = \frac{c}{u}$ por definición.

El principio maupartuisiano de «acción mínima» establece, por su parte, que «la cantidad de movimiento (m v) de una partícula dada, que describe una determinada trayectoria en un campo de fuerza, multiplicada por la longitud $\int ds$ de esa trayectoria, entre dos puntos (P_1) y (P_2), llega tambien a ser un mínimum»:

$$\lhd A = \lhd \int_{P_1}^{P_2} m v d s = O \qquad \text{(II)}$$

Es decir, que entre todas las trayectorias posibles, este criterio determina la trayectoria real definitiva. La relación anterior (II) puede tambien expresarse en función de la energía total (T) y potencial (P) de la partícula, teniendo en cuenta que.

$$T = P + \frac{1}{2} m v^2 ; \quad m v = \sqrt{2 m (T - P)}$$

así:

17

$$\triangleleft \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2\,m\,(T-P)}\;ds = O \qquad \text{(III)}$$

Pero como $\frac{I}{u} = \frac{v}{k'}$ según vimos, puede reemplazarse el valor de la velocidad (v) de la partícula por su equivalente $\frac{\sqrt{2\,m\,(T-P)}}{m}$ en la fórmula $i = \frac{c}{u}$ y se tiene:

$$i = \frac{c}{u} = c\frac{v}{k'} = \frac{c}{k'\,m}\sqrt{2\,m\,(T-P)}$$

De donde la expresión matemática del principio de Fermat se se reduce a:

$$\frac{c}{k'\,m}\int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2\,m\,(T-P)} \cdot ds = O$$

siendo evidente entonces la identidad entre la expresión cobijada por el signo de íntegral con la que figura en la ecuación (III) de Maupartuis.

La interpretación física de esta relación matemática es simplemente la de que *la trayectoria de una partícula dada en un campo de fuerza, define una posible trayectoria luminosa y viceversa.*

De esta correspodencia entre los fenómenos luminosos y los mecánicos, prevista claramente por Hamilton, se infiere una serie de conclusiones de mayor interés. Ante todo, dada una partícula cualquiera, cabe suponer que su movimiento, en un campo de fuerza, se halla adscrito o relacionado, de algún modo, al de una perturbación ondulatoria, en forma parecida a la que se presenta en el caso de la emisión foto-eléctrica, de tal manera que: $T = h\,f$ siendo (T) la energía total de la partícula, y (h) y (f) la constante de Planck y la frecuencia de la onda «asociada», respectivamente, como teníamos antes. Análogamente, la cantidad de movimiento (m v) de la partícula estará dada por,

$$m\,v = \frac{h\,f}{V}$$

siendo (V) la velocidad de la onda é igual, por consiguiente, a:

$$\frac{T}{m\,v}$$

Por último, como, en virtud del principio de la conservación de la energía, en un campo conservativo (T) permanece constante y (h) lo es por definición, la frecuencia (f) que es igual a T / h permanece también constante, o sea que *la onda «asociada» es «monocromática»*.

Ahora bien, en un medio dado y en torno a un centro de perturbación, pueden imaginarse, para el caso de las ondas luminosas, una serie de superficies esféricas concéntricas que, en un momento determinado, coinciden con puntos de igual fase es decir, aquellos en que el valor de la amplitud es igual en ese instante. Llámanse generalmente equí-fásicas tales superficies. Pero como, inmediatamente después. varía el valor de la amplitud, una superficie esférica cuyo centro es el origen de la pertubación, que tuviera en todo momento una misma, invariable, amplitud, no podría permanecer estática con relación a ese centro, sino que se alejaría simétricamente de él. Tal superficie en movimiento constituye un «frente ondulatorio» y su velocidad determina la de la onda. En síntesis: un frente ondulatorio puede representarse como una superficie de fase constante que se desplaza a través de superficies equi-fásicas con la velocidad (V). Valga añadir que las superficies equi-fásicas; como los frentes ondulatorios, son «ortogonales» —es decir, normales— a los «rayos» de la propagación.

En el caso de un conjunto de puntos materiales en movimiento en un campo de fuerza, se llega -empleando los conceptos fundamentales de la Dinámica racional- a representaciones análogas a la anterior: Adoptemos, por ejemplo, un centro cualquiera, en el cual puede considerarse convencionalmente, para mayor facilidad, que el valor de la velocidad y por tanto el de la acción de Maupartuis $\triangleright \int m v \, ds$ es, para cada partícula, igual a cero. En torno de ese punto dentro del campo de fuerza, podemos imaginar un número indefinido de superficies equi-potenciales. Suponiendo que la energía total (T) sea igual para todas las partículas de masa (m), tales superficies serán, al mismo tiempo, superficies «equi-maupartuisianas» o de igual acción (A), por cuanto ya vimos que,

$$A = \int m v \, ds = \int \sqrt{2 m (T - P)} \cdot ds$$

o sea que el valor de (A) sólamente dependería, en este caso, de la energía potencial (P) en cada punto del campo, Por tanto, cada partícula va atravesando, en su trayectoria, superficies de igual acción. Tales superficies permanecen estacionarias y pueden imaginarse, en abstracto, como propiedades del campo mismo, independientes, por tanto, de la existencia de las partículas. Para completar la analogía con el movimiento ondulatorio es preciso reproducir ahora el concepto clásico de «función hamiltoniana» (H) que, para un punto dado en un campo de fuerza, referido a un origen (O), se define matemáticamente, por $H = A - T.\,t$ donde, (A) representa la acción de Maupartuis, como antes, en el punto considerado, (T) la energía total de la prtícula, y (t) el tiempo invertido por ésta en describir la trayectoria desde el origen (O) hasta dicho punto. Enlazando todos los puntos que, en un instante dado, tengan un mismo valor para (H), se obtendría una *superficie «equi-hamiltoniana»* que, en ese momento, coincidiría, desde luego, con una determinada superficie de igual acción ($A = H + T.\,t$), por cuanto (T) es invariable. Pero como (H) es una función de (t), una superficie en la cual (H) se mantuviera constante, sería necesariamente una superficie en movimiento, es decir una especie de «frente ondulatorio» de carácter dinámico, esto es, una «onda de materia» cuya velocidad estaría dada, como en el caso de la onda luminosa, por el cuociente de (T) por (m v). En resumen: *los frentes ondulatorios que acompañan el movimiento de una partícula o conjunto de partículas materiales, según la nueva Mecánica, coinciden en todo momento con superficies en las cuales el valor de la función hamiltoniana* (H) *permanece constante.*

Mas el simple desplazamiento de estas superficies de (H) constante, no arroja de suyo ningún indicio sobre la naturaleza periódica – en último término sinusoidal – de las ondas asociadas a las partículas de materia, con su peculiar configuración de nodos y antínodos. Es necesario, pues, extremar en este punto el análisis hamiltoniano en la forma indicada por de Broglie para llegar, por último, a una ecuación matemática expresada en función de ciertas variables trigonométricas. Bastará recordar, para ello, que la ecuación de una onda transversal tiene la forma de

$$y = Y \cos 2\pi \left(f\,t - \int \frac{d\,s}{l} \right)$$

siendo (Y) la amplitud, (f) la frecuencia, (l) la longitud de la onda y (ds) un segmento lineal infinitesimalmente pequeño.

Pero como $f = \frac{T}{h}$ y además $\frac{m\,v}{h} = \frac{f}{V} = \frac{1}{l}$

se tiene:

$$y = Y \cos \frac{2\pi}{h}\left(T \cdot t - \int m\, v \cdot d\, s \right)$$

O sea, finalmente, en términos de (H):

$$y = Y \cos \frac{2\pi}{h}\left(T.\, t - A\right) = Y \cos \frac{2\pi}{h}\ (H)$$

Es sabido que la aplicación de la Mecánica Ondulatoria de de Broglie a la esfera atómica ha dado posteriormente lugar a nuevos desarrollos que comportan, inclusive, rectificaciones en más de un punto para la primitiva teoría. Este hecho en cierto modo acredita el valor y fecundidad de ella, cuyos lineamientos generales se han procurado bosquejar, sin mayor aparato matemático, en el presente ensayo. Quizás el aspecto más significativo de la contribución del científico francés y de los continuadores de la teoría, resida en la circunstancia de haberse originado esta última, precisamente, acentuando la contraposición entre los aspectos ondulatorio y corpuscular de la realidad natural, es decir, trasladando al campo de la Dinámica la antinomia de la Optica, que parecía amenazar hace algunos años, la evolución de la Física. Las múltiples avenidas abiertas a la especulación teorética y a la investigación experimental, como consecuencia de los nuevos aportes, disipan definitivamente tal temor. «Lo que determina el nivel de una ciencia – ha escrito irónicamente Heidegger – es la medida en que es susceptible de una crisis en sus conceptos fundamentales».

NOTAS

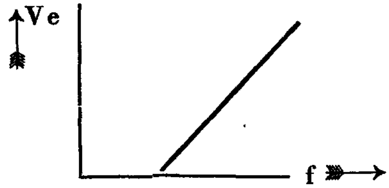
(I) El efecto foto-eléctrico consiste, en síntesis, en la producción de una corriente eléctrica o emisión de electrones de una placa metálica sobre la cual recae un haz luminoso. La placa puede elevarse a un determinado potencial o tensión eléctrica (V) y la frecuencia (f) de la onda luminosa incidente puede también modificarse a voluntad. Representando por (e) la carga eléctrica elemental, o carga de un electrón, se tiene por definición:

$$V.\, e \left(\frac{\text{energía}}{\text{carga}} .\ \text{carga}\right) \longrightarrow \text{energía}$$

En virtud del principio de conservación, esta energía (V x e) se hace igual a la «fuerza viva» o energía cinética del electrón en movimiento, que es lo que constituye, según parece, la corriente eléctrica. Si (m) es la masa del electrón y (v) su velocidad, se tiene:

$$V.\ e = \frac{1}{2}\ m\ v^2$$

Millikan ha comprobado experimentalmente una relación de proporcionalidad entre el producto (V x e) y la frecuencia (f) de la luz incidente, expresada por medio del siguiente gráfico:



El valor de la ordenada en función de la abscisa, o sea la ecuación de esta curva, está dado por:

$$V\ e = \text{constante}\ (f - f_0)$$

Ahora bien: esta constante resulta ser precisamente igual a (h) o «constante de Planck», de donde

$$V\ e = 1/2\ m\ v^2 = h\ (f - f_0)$$

o sea que:

$$1/2\ m\ v^2 = h\ f - h\ f_0 = h\ f - w_0$$

---

(2) La energía eléctrica acumulada en un condensador a la tensión (V) correspondiente a una carga de (Q) está dada por:

$$\int d\ w = \int_0^Q V\ d\ q = \int_0^Q \frac{q}{C}\ d\ q = \frac{1}{2}\ \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\ Q\ V$$

pues $V = \frac{Q}{C}$ siendo (C) la capacidad eléctrica.

El valor de la energía por unidad de volumen, o densidad energética, en el caso, supongamos, de un condensador de placas paralelas de (A) centímetros cuadrados de sección y (d) centímetros de distancia entre placas, será por tanto:

$$w = \frac{1/2\ Q\ V}{A.\ d}$$

Pero el número de líneas de fuerza por unidad de superficie en el campo eléctrico considerado es, siguiendo a Gauss, de

$$4\ \pi\ \frac{Q}{A}$$

O sea que el valor de la intensidad (E) del campo eléctrico en función de la permitividad (p) será:

$4\pi \frac{Q}{A} P$ o bien $\frac{4\pi Q}{A\,\varepsilon}$ siendo ε la constante dieléctrica. Además,

$$E = \frac{V}{d} \text{ por definición, luego: } w = \frac{\varepsilon\, E^2}{8\pi}$$

Análogamente, podemos encontrar para la energía por unidad de volumen en un campo magnético,

$w' = \frac{\mu\, H^2}{8\pi}$ siendo (H) la intensidad magnética y (μ) la permeabilidad.

La energía por unidad de volumen del campo electro-magnético estará entonces dada por:

$$\frac{\varepsilon\, E + \mu H^2}{8\pi} \quad \text{(I)}$$

De otra parte, $\mu\, H^2 = \varepsilon\, E^2$ puesto que, en el caso, supongamos, de una onda de tipo sinusoidal,

$$E = E_m \text{ sen } 2\pi f \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

$$H = H_m \text{ sen } 2\pi f \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

que nos dán los valores instantáneos de las intensidades eléctrica y magnética en función de sus valores máximos (E_m) y (H_m)

Diferenciando, $\frac{dE}{dt} = 2\pi\, f\, E_m \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{V} \right)$

$$\frac{dH}{dx} = -\, 2\pi\, f\, H_m \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

Pero según Maxwell y es fácil comprobarlo,

$$\frac{dH}{dx} = -\, \varepsilon \frac{dE}{dt}$$

de donde, reemplazando, $\mu H^2 = \varepsilon\, E$; y la expresión (I) se convierte en

$$w = \frac{\varepsilon\, E^2}{4\pi} \quad \text{(II)}$$

Ahora bien: la «intensidad» del frente ondulatorio, es decir la energía transportada por la onda electromagnética por unidad de área, por segundo, o sea el valor del llamado «vector de Poyntig» (Y) estará, lógicamente, dado por:

$$V w \left(\frac{\text{cms}}{\text{seg}} \cdot \frac{\text{erg.}}{\text{cm}^3} \right) = Y \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \times \text{seg}} \right)$$

Finalmente, la cantidad de movimiento (G) se expresa por:

$Y \frac{\varepsilon \mu}{c^2}$ o sea $G = w v \frac{\varepsilon \mu}{c^2} = \frac{w}{v}$ puesto que, $v = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ y en el espacio vacío, cuando la velocidad (v), de la onda es igual a la de la luz (c), se tendrá: $G = \frac{w}{c}$

---

(3) De Broglie, siguiendo, analógicamente, un criterio común en Optica Física, distingue entre la velocidad (v) de la partícula material y la velocidad (u) de la onda individual asociada por medio de lo relación:

$$v = u - l \frac{du}{dl} = - l^2 \frac{df}{dl} \quad (I)$$

puesto que $u = f l$.

Pero como de $h f = {}^1/_2\, m v^2$ se obtiene por diferenciación,

$$h \frac{df}{dl} = m v \frac{dv}{dl} \quad (II)$$

se puede eliminar el término $\frac{df}{dl}$ entre (I) y (II) y se obtiene:

$$\frac{dv}{dl} = - \frac{h}{m l^2} \text{ e integrando, } V = \frac{h}{m l} + C$$

Para (C) igual a cero, que es el único valor posible de la constante de integración según lo demuestra la teoría quántica, se obtiene finalmente:

$$m v = \frac{h}{l} = \frac{hf}{c} = P$$

---

(4) En términos ordinarios, los «grados de libertad» de un sistema son el número de magnitudes independientes necesarias para determinar su configuración y posición. Para un punto geométrico ideal en el espacio tridimensional cartesiano, por ejemplo, los grados de libertad son tres, a saber: (x) (y) (z). Pero un cuerpo rígido de dimensiones finitas necesitaría, además, de estas tres coordenadas de su centro de masa. otras tres adicionales para fijar su orientación con relación a ese centro, en torno del cual podría describir, una rotacion. Euler, por ejemplo, considera estas tres coordenadas adicionales como tres ángulos; Lagrange propone, en general, (6) coordenadas «generalizadas».

$$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6$$

una de las cuales, por lo menos, varía, con relación al tiempo, cuando el cuerpo se pone en movimiento. Esas variaciones estan representadas, matemáticamente, por las primeras derivadas, ási:

$$q_1^{\cdot} \quad q_2^{\cdot} \quad q_3^{\cdot} \quad q_4^{\cdot} \quad q_5^{\cdot} \quad q_6^{\cdot}$$

Hamilton propuso: Con las primeras tres coordenadas de Lagrange, que pueden considerarse, en general, como indicativas de la posición del cuerpo, se asocian las cantidades de movimiento

$$Mv_x\,, \quad Mv_y\,, \quad Mv_z$$

obteniendo así las primeras tres coordenadas hamiltonianas,

$$p_1 \cdot p_2 \quad p_3$$

Y con las siguientes tres coordenadas de Lagrange, que pueden cansiderarse indicativas de la orientación del cuerpo en un momento dado, se asocian las cantidades de movimiento angular, que se representan por

$$p_4 \quad p_5 \quad p_6$$

De ahí que las coordenadas hamiltonianas (p_1, p_2, etc.) se llamen a veces «cantidades de movimiento generalizadas».

(5) A D'Abro «The Decline of Mechanism in Modern Physics» (982 pgs.) (D. Van Nostrand Company, Inc. New York, 1939)

(6) Sea un haz electrónico en un campo de potencial eléctrico (V_0) provisto de velocidad (v_a) con la cual incide sobre una superficie horizontal que lo separa de otro campo o cámara de potencial ($V_0 + dV$) formando un ángulo de «incidencia» B_a grados con la vertical. Sean además, B_b y v_b respectivamente, el ángulo de «refracción» y la velocidad del haz en la segunda cámara o campo de potencial (V_0 ⊢ dV). Se tiene, entonces,

$$1/2\, m\, v_a^2 = V_o\, e; \quad 1/2\, m\, v_b^2 = (V_o + dV)\, e$$

Si la dirección del campo eléctrico es tal que no afecta las componentes de la velocidad del haz electrónico en el sentido horizontal, se tendrá:

$$V_a \text{ sen } B_a = v_b \text{ sen } B_b \quad \therefore \quad \frac{\text{sen } B_a}{\text{sen } B_b} = \sqrt{1 + \frac{dv}{V_0}}$$

resultado que hubiera podido obtenerse postulando, como en Optica, un «índice de refracción» (i) definido como:

$$i = \frac{\text{sen } B_a}{\text{sen } B_b}$$

O bien, pueden considerarse dos «índices», uno distinto para cada campo, tales que:

$$i_a = K' \sqrt{V_0} \qquad i_b = K' \sqrt{(V_0 + dV)}$$

siendo K' una constante cualquiera de proporcionalidad.

De donde,

$$i = \frac{i_B}{i_A} = \sqrt{1 + \frac{dV}{V_0}}$$

pudiendo, en general, asumirse, para el movimiento del electrón en un campo eléctrico dado de potencial (V), un «índice» de refraccion» (i) tal que:

$$i = K' \sqrt{V}$$

Como, por otra parte, $^1/_2\ m\ V^2 = e\ V$;

$$i = K\ v$$

en general, siendo $K = K' \sqrt{\dfrac{m}{2\ e}}$ constante también.

EDUARDO GAMBA ESCALLON