

COSTOS DE GARANTÍA PARA UN SISTEMA K DE N BAJO APROXIMACIÓN ESTADÍSTICA Y FÍSICA

WARRANTY COSTS OF A K -OUT-OF- N SYSTEM UNDER STATISTICAL AND PHYSICAL APPROACH

LUZ ADRIANA PEREIRA ^a, NELFI GONZÁLEZ ^b

Recibido 13-11-2012, aceptado 16-01-2013, versión final 21-01-2013

Artículo Investigación

RESUMEN: En este artículo se comparan y estudian vía simulación los efectos del nivel de información sobre los procesos de costos de garantía y sus distribuciones, para un sistema coherente de componentes independientes e idénticamente distribuidos (iid) en una estructura k de n , cuando los procesos de falla/reparo son observados bajo la aproximación de caja negra o estadística vs. la aproximación física. Las políticas de garantías consideradas corresponden a la política tipo reparación/sustitución gratuita (FRW) con renovación y la política de prorrateo (PRW). El modelo de falla estudiado sigue el modelo de falla general de Block *et al.* (1985). Las comparaciones de los procesos de costos y sus distribuciones bajo las dos aproximaciones citadas son realizadas a través de pruebas estadísticas para igualdad distribucional, hallándose diferencias estadísticas significativas.

PALABRAS CLAVE: Confiabilidad, procesos estocásticos, reparo mínimo, políticas de garantía, filtración

ABSTRACT: We conduct a comparative simulation study of the effects of the information level on warranties costs and processes distributions. In cases where processes failure/repair are observed under the black-box (statistical) approach and under the physical approach, we use a coherent system of independent and identically distributed (iid) components in a structure k -out-of- n . Warranty policies considered correspond to the Free - Replacement Warranty (FRW) policy, with renewal, and the Pro-Rata Warranty (PRW) policy. The failure mode studied has the general Block *et al.* (1985) failure model. We compared costs and processes distributions under the two approaches using statistical tests for distributions equality. We found significant statistical differences.

KEYWORDS: Reliability, stochastic processes, minimal repair, warranty policy, filtration.

1. INTRODUCCIÓN

La garantía es una obligación contractual que asume el productor o vendedor relacionada con la venta de un producto (Blischke & Murthy, 1992). Según Bai & Pham (2006) una de las cuestiones

^aEscuela de Estadística, Universidad del Valle, Cali, Colombia, Calle 13 No 100-00. luz.pereira@correounivalle.edu.co.

^bEscuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, Calle 59A No 63 - 20.

de interés que surge en el análisis de garantías es la modelación de los costos, lo que involucra entre otras cosas una consideración de las características de las políticas de garantías, el costo de garantía asociado a la falla y la distribución de los tiempos de falla de los productos. El análisis de garantías para sistemas multi-componentes basados en la estructura del sistema ha sido considerado por varios estudios. Bai & Pham (2004) obtienen el valor esperado y la varianza para costos de garantía descontados bajo las políticas de sustitución-reparación gratuita (*free - replacement warranty* o FRW) y de prorratio (*pro-rata warranty* o PRW), aplicadas a sistemas en series que son reparables. Chien (2005) obtiene expresiones para los tiempos óptimos de garantía desde la perspectiva del productor y del consumidor, considerando una política de garantía FRW renovable y sistemas en series con dos posibles tipos de falla, falla de tipo I, la cual es reparada mínimamente y falla de tipo II, que involucra una sustitución por una unidad nueva. Bai & Pham (2006) proponen una política de garantía renovable de servicio completo, presentan expresiones para el valor esperado y la varianza del costo por ciclo de garantía, para sistemas en series, paralelo, series-paralelo y paralelo-series. Duchesne & Marri (2009) extienden los resultados obtenidos por Bai & Pham (2004), generando expresiones para la media, la varianza y para la función característica del costo de garantía descontado, con las políticas FRW, PRW y la política combinada denotada como FRW/PRW, para un sistema reparable mínimamente y usando un modelo general de riesgos competitivos para aproximar la confiabilidad del sistema.

En este artículo se estudian los procesos de costos de garantía y sus distribuciones para un sistema coherente con estructura k de n de componentes independientes e idénticamente distribuidos (iid), bajo las políticas FRW y PRW.

En términos generales una política tipo FRW consiste en la reparación y/o sustitución de los productos que fallan, sin ningún costo para el comprador y son aplicadas a artículos que pueden resultar reparables, tales como electrodomésticos (lavadoras, secadoras y televisores). Esta política se subdivide en dos categorías: renovable y no renovable. En el primer caso, la sustitución por un producto nuevo conduce a la renovación de la póliza de garantía, mientras que en el segundo caso, la sustitución del producto que falla no altera el plazo original de la garantía. Bajo la política con renovación las sustituciones generan un proceso de renovación, y si se asume que las nuevas unidades poseen las mismas características distribucionales, los tiempos entre sustituciones constituirán una sucesión de variables aleatorias iid. Al igual que en Chien (2005), se considerará que el sistema bajo garantía está sometido a fallas de tipo I y fallas de tipo II, donde las primeras son reparadas mínimamente mientras que un producto con falla de tipo II es sustituido por una nueva unidad.

En las políticas tipo PRW el productor y el cliente comparten el costo de la reparación o del reemplazo durante el período de garantía. En caso de una falla no reparable sólo se hace reconocimiento de una porción del valor de compra del producto en función de su edad al momento de la falla y

se dá por terminado el contrato de garantía. Esta política requiere que los clientes estén dispuestos a aceptar su parte del costo de la reparación o reemplazo, de tal forma que el fabricante pague el excedente y es comúnmente aplicada a artículos no reparables que son significativamente influenciados por el envejecimiento, tal como es el caso de los neumáticos y la batería de un vehículo. También es posible considerar esta política bajo el modelo de falla general.

En este artículo se considera el modelo de falla general (**BBS**), llamado así por las iniciales de los apellidos de los autores que lo proponen Block *et al.* (1985). Bajo la aproximación estadística o de caja negra, este modelo asume que un sistema puede presentar uno de dos tipos de fallas en un instante t : falla de tipo I o falla de tipo II. Las fallas de tipo I, son reparadas mínimamente, es decir, se lleva al sistema a la condición inmediatamente anterior al momento que se presenta la falla, asumiendo que la tasa de falla no es modificada después de la reparación (Barlow & Hunter, 1960). Las fallas de tipo II ocurren con probabilidad $p(t)$ y son catastróficas y por lo tanto no reparables, de ahí que el sistema sea reemplazado en su totalidad por uno nuevo. Bajo aproximación estadística, los procesos de conteo asociados a los dos tipos de falla mencionados son procesos de Poisson no homogéneos con tasa de fallas determinísticas dadas por $\lambda^I(t) = (1 - p(t))\lambda(t)$ y $\lambda^{II}(t) = p(t)\lambda(t)$, respectivamente, donde $p(t) \in [0, 1]$ y $\lambda(t)$ es la función de tasa de falla general. Block *et al.* (1985) muestran que los procesos de conteo asociados a tales fallas son procesos Poisson no homogéneos.

Bajo la aproximación estadística o de caja negra solamente se tiene información del estado de un sistema en un instante de tiempo dado t : el sistema está funcionando o no está funcionando, sin conocimiento del estado de cada uno de los componentes que conforman el sistema. Por su parte, una aproximación física implica que en cada instante de tiempo se conoce el estado del sistema y el de cada uno de sus componentes. El nivel de información disponible sobre el estado del sistema y sus componentes cambia la tasa de falla, pues en el caso de la aproximación estadística ésta corresponde a una función determinística en el tiempo, mientras que en la aproximación física es un proceso estocástico (Aven & Jensen, 1999). Por tanto, los procesos de conteo asociados a las fallas en estas dos aproximaciones tendrán diferencias en sus propiedades distribucionales.

En este artículo se estudia por simulación el efecto de las aproximaciones estadística (o de caja negra) y física sobre las distribuciones de los costos unitarios de garantía en cada una de las políticas FRW con renovación y PRW, bajo el modelo de falla general. En particular, se considera un sistema con estructura $k = 2$ de $n = 4$, de componentes iid con tiempos de vida Weibull($\beta = 3,3, \theta = 10,122$), donde β y θ son los parámetros de forma y escala, respectivamente. Siguiendo a Bai & Pham (2006), se consideran costos unitarios constantes para los reparos mínimos y para las sustituciones (o sea, costos independientes del tiempo).

2. CONCEPTOS BÁSICOS

Según Barlow & Proschan (1996) se dice que un sistema es coherente si: la función de la estructura Φ_t es no decreciente en cada argumento, es decir, si $\mathbf{X}_t \leq \mathbf{Y}_t \Rightarrow \Phi(\mathbf{X}_t) \leq \Phi(\mathbf{Y}_t)$, y si cada componente es relevante, es decir, existe al menos un vector (\cdot, \mathbf{x}) tal que $\Phi(1_i, \mathbf{x}) = 1$ y $\Phi(0_i, \mathbf{x}) = 0$. Donde $(1_i, \mathbf{x})$ representa un vector estado en el que la i -ésima componente es igual a 1, $(0_i, \mathbf{x})$ representa un vector en el que la i -ésima componente es igual a 0 y (\cdot, \mathbf{x}) representa un vector estado donde la i -ésima componente es 0 ó 1.

Sea T el tiempo de vida de un sistema coherente de n componentes con tiempos de vida S_i , $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente, definidos en un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) , con filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, una familia de sub σ -álgebras de \mathcal{F} satisfaciendo las condiciones de Dellacherie, es decir, crecientes, continuas a derecha y completas. Una variable aleatoria extendida y positiva T es un \mathcal{F}_t -tiempo de parada si, y sólo si, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$. Un \mathcal{F}_t -tiempo de parada T es previsible si existe una sucesión creciente $(T_n)_{n \geq 0}$ de \mathcal{F}_t -tiempos de parada, $T_n < T$, tal que $T_n \rightarrow T$, en cuanto $n \rightarrow +\infty$. Un \mathcal{F}_t -tiempo de parada T es totalmente inaccesible si $P(T = Y < \infty) = 0$ para todo \mathcal{F}_t -tiempo de parada previsible Y .

Barlow & Proschan (1981) define el tiempo de vida T para un sistema como,

$$T = \Phi(\mathbf{S}) = \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} \mathbf{S}_i, \quad (1)$$

donde K_j , $1 \leq j \leq k$ son los conjuntos corte minimales, esto es, los conjuntos con el mínimo número de componentes en los cuales una falla en el conjunto causa la falla del sistema. Aven & Jensen (1999) definen el nivel crítico del componentes i , como el tiempo de parada Y_i , $1 \leq i \leq n$, medible en el espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{F}_t)$, que describe el tiempo para el cual la componente i se convierte en crítica para el sistema, es decir, el tiempo después del cual la falla del i -ésimo conduce a la falla del sistema.

Un proceso estocástico $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ es llamado una semimartingala regular si admite la siguiente descomposición,

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t, \quad (2)$$

donde $(f_t)_{t \geq 0}$ es un proceso progresivamente medible con $E\left\{\int_0^t |f_s| ds\right\} < \infty \forall t \geq 0$, $E(|Z_0|) < \infty$ y $(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_0$, siendo \mathcal{M}_0 la clase de martingalas continuas a derecha, con límite a izquierda y media igual a cero.

En lo que sigue, 1_A es la variable indicadora del evento A , $a \wedge b = \min\{a, b\}$, \mathcal{M}_0^2 es la clase de martingalas de media cero, continuas a derecha, con límite a izquierda y cuadrado integrables.

El reparo mínimo estadístico equivale a sustituir el sistema completo por otro de la misma edad que tendría el sistema actual si no hubiere fallado. Si $\bar{F}_T = 1 - F_T(t)$ es la función de sobrevivencia para el tiempo de vida T , entonces si el sistema falla en el tiempo t , este es mínimamente reparado tal que la probabilidad de sobrevivir t_k está dado por,

$$\bar{F}_T(t_k|t_{k-1}) = \frac{\bar{F}_T(t_k)}{\bar{F}_T(t_{k-1})} \quad \text{para } t_k > t_{k-1}. \quad (3)$$

Una forma de interpretar el reparo mínimo estadístico en el tiempo t es imaginar que otro sistema “idéntico” (el cual está funcionando a una edad t) está disponible y puede ser incorporado como reemplazo del sistema original (Boland & El-Newehi, 1998).

En el reparo mínimo físico, el sistema es observado a nivel de sus componentes y tan sólo es reparado mínimamente el componente crítico que causó la falla. Según Boland & El-Newehi (1998), un sistema es sometido a reparo mínimo físico si cuando se produce la falla en el sistema es posible identificar el componente que lo ocasiona y es reparado “mínimamente”. Considere el vector $\vec{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$, que representa el tiempo de vida de las componentes de un sistema coherente, con tiempo de vida T , los tiempos de vida son variables aleatorias en el espacio de probabilidad $(\Omega, P, \mathcal{F}_t)$. En el modelo físico, el funcionamiento del sistema se observa a nivel de sus componentes a través de una filtración, una familia de sub σ álgebras de \mathcal{F} , $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

$$\mathcal{F}_t = \sigma \{1_{\{T > s\}}, 1_{\{S_i > s\}} : s \leq t, 1 \leq i \leq n\}, \quad (4)$$

la cual es creciente, continua a derecha y completa. Entonces, la componente i -ésima es reparada mínimamente tal que la probabilidad de tal componente de sobrevivir a t_j es,

$$\bar{F}_i(t_j|t_{j-1}) = \frac{\bar{F}_i(t_j)}{\bar{F}_i(t_{j-1})} \quad \text{para } t_j > t_{j-1}. \quad (5)$$

3. PROCESOS PUNTUALES Y COSTOS DE GARANTÍA

3.1. Proceso puntual asociado al modelo de falla general bajo la aproximación de caja negra

Sea T el tiempo de vida de un sistema, una variable aleatoria con función de distribución $F_T(t) = P(T \leq t)$. El funcionamiento del sistema es observado bajo la filtración de sus tiempos de falla $\{T_0 = 0, T_1, T_2, \dots\}$, sin identificar la componente que causa la falla, es decir, el proceso de falla es observado bajo la filtración, $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ dada por

$$\mathcal{G}_t = \sigma \{1_{\{T \leq s\}}, V_s, 0 \leq s \leq t\} \quad (\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t). \quad (6)$$

Bajo esta filtración Agustin & Peña (2001) describen el proceso puntual asociado al modelo **BBS**, considerando una sucesión de tiempos $\{T_0 = 0, T_1, T_2, \dots\}$ generados por un proceso de falla/repaso mínimo, donde $T_1 = T$, tiene una distribución F absolutamente continua con función de densidad f y función hazard $\lambda = \frac{f}{F}$, con $\bar{F} = 1 - F$. La sucesión $(T_j)_{j \geq 1}$ es un proceso de Markov con función de sobrevivencia de T_j , dado T_1, \dots, T_{j-1} ,

$$\bar{F}(t|T_1, \dots, T_{j-1}) = \bar{F}(t|T_{j-1}) = \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(T_{j-1})} \quad (7)$$

$t > T_{j-1}, j \geq 1$. Siguiendo a Hollander *et al.* (1992), para determinar el modo de reparación que se produce en cada tiempo de falla, son generadas variables aleatorias independientes $\{U_1, U_2, \dots\}$ distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, las cuales son independientes de $(T_j)_{j \geq 1}$. Si $U_j < p(T_j)$, entonces la reparación llevada a cabo en T_j es perfecta, de lo contrario la reparación es mínima. Para este trabajo en particular, bajo la aproximación estadística, el reparo perfecto se lleva a cabo realizando reemplazo de la unidad por una nueva.

3.2. Proceso puntual asociado al modelo de falla general bajo la aproximación física

Definición. Proceso de falla general para un sistema coherente.

Sea T el tiempo de vida de un sistema coherente de n componentes con tiempos de vida $S_i, i = 1, \dots, n$, tal que T es un tiempo de parada totalmente inaccesible con proceso de intensidad de falla $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ y tal que:

- En un instante $t > 0$, uno de dos tipos de falla puede ser observado: falla de tipo I o falla de tipo II.
- El sistema es observado bajo la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{1_{\{S_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, n, V_s, 0 \leq s \leq t\}. \quad (8)$$

- Existe un \mathcal{F}_t -tiempo de parada finito totalmente inaccesible $T^{\text{II}} = \inf\{t \geq 0 : V_t = 2\}$, el tiempo de la primera falla de tipo II.
- Existen $(\lambda_t^{\text{I}})_{t \geq 0}$ y $(\lambda_t^{\text{II}})_{t \geq 0}$, procesos no negativos, \mathcal{F}_t -progresivamente medibles, tales que

$$E\left[\int_0^t \lambda_s^{\text{I}} ds\right] < \infty, \quad E\left[\int_0^t \lambda_s^{\text{II}} ds\right] < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty, \quad \text{y} \quad (9)$$

$$\lambda_t = 1_{\{V_t=1\}} \lambda_t + 1_{\{V_t=2\}} \lambda_t = \lambda_t^{\text{I}} + \lambda_t^{\text{II}}, \quad \forall t \geq 0. \quad (10)$$

Bajo la definición anterior, se asume que el proceso de conteo del número de fallas del sistema en $[0, t]$ es dado por

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \lambda_s ds + \tilde{M}_t, \quad \tilde{M}_t \in \mathcal{M}_0^2. \quad (11)$$

Observe que $\tilde{N}_t = \tilde{N}_t^I + \tilde{N}_t^{II}$, con

$$\tilde{N}_t^I = \int_0^t \lambda_s^I ds + \tilde{M}_t^I, \quad \tilde{M}_t^I \in \mathcal{M}_0^2, \quad (12)$$

$$\tilde{N}_t^{II} = \int_0^t \lambda_s^{II} ds + \tilde{M}_t^{II}, \quad \tilde{M}_t^{II} \in \mathcal{M}_0^2. \quad (13)$$

Donde los procesos \tilde{N}_t^I y \tilde{N}_t^{II} no tienen saltos simultáneos, es decir, en un instante t , sólo uno de los dos tipos de falla puede ser observado. Estos procesos parados en T^{II} , son dados respectivamente por [ver Aven & Jensen (1999, Teorema 105, A.6)]

$$\tilde{N}_{t \wedge T^{II}}^I = \int_0^t 1_{\{T^{II} > s\}} \lambda_s^I ds + \tilde{M}_{t \wedge T^{II}}^I, \quad (14)$$

$$1_{\{T^{II} \leq t\}} = \tilde{N}_{t \wedge T^{II}}^{II} = \int_0^t 1_{\{T^{II} > s\}} \lambda_s^{II} ds + \tilde{M}_{t \wedge T^{II}}^{II}, \quad (15)$$

donde $\tilde{M}_{t \wedge T^{II}}^I$ y $\tilde{M}_{t \wedge T^{II}}^{II}$ son \mathcal{F}_t -martingalas integrables de media cero. En nuestro contexto, para $t = w$, $\tilde{N}_{t \wedge T^{II}}^I$ representa el número de fallas tipo I, y por tanto, el número de reparos mínimos realizados sobre una unidad que inicia como nueva, mientras que $1_{\{T^{II} \leq t\}}$ es el proceso de conteo simple hasta la primera falla de tipo II observada durante el período de garantía.

Nota. Bajo la aproximación estadística el proceso de falla general es muy similar al descrito bajo la aproximación física, con la diferencia de que los procesos de conteo se generan en el menor nivel de información correspondiente a la filtración \mathcal{G}_t , y por lo tanto la intensidad de falla difiere en esta aproximación. Las ecuaciones (12) y (13) se modifican considerando que \tilde{N}_t^I y \tilde{N}_t^{II} cuentan el número de reparos mínimos y sustituciones, respectivamente bajo \mathcal{G}_t , de igual manera en las ecuaciones (12) y (13), λ_s^I y λ_s^{II} son reemplazadas por la tasa de falla ordinaria de los respectivos tipos de falla, $\lambda^I(s)$ y $\lambda^{II}(s)$.

3.3. Proceso de costo de garantía bajo el proceso general de falla

Bajo el proceso puntual descrito en la Sección 3.2, se considera el siguiente proceso de costo. Las fallas de tipo I son reparadas mínimamente hasta el periodo de garantía w o hasta la primera falla de tipo II, lo que ocurra primero, a un costo para el fabricante C^I . Una falla de tipo II (catastrófica) a la edad $T^{II} \leq w$ produce el término de la garantía y un costo para el fabricante, $C^{II} > C^I$. Entonces el proceso de costo unitario de garantía bajo el proceso de falla general, es dado por (González, 2009)

$$Z_w = C^I \tilde{N}_{w \wedge T^{II}}^I + C^{II} 1_{\{T^{II} \leq w\}}. \quad (16)$$

Donde $\tilde{N}_{w \wedge T^{II}}^I$ cuenta el número de reparos mínimos del sistema. Bajo la aproximación física la representación semimartingala regular de este proceso es dado por,

$$Z_w = \int_0^w 1_{\{T^{II} > s\}} (C^I \lambda_s^I + C^{II} \lambda_s^{II}) ds + M_w^g, \quad M_w^g \in \mathcal{M}_0^2, \quad (17)$$

donde $Z_0 = 0$, $M_w^g = C^I \tilde{M}_{w \wedge T^{II}}^I + C^{II} \tilde{M}_{w \wedge T^{II}}^{II}$ es una martingala de media cero uniformemente integrable, y $E \left[\int_0^w (C^I \lambda_s^I + C^{II} \lambda_s^{II}) ds \right] < \infty$, $\forall 0 \leq w < \infty$.

Nota. En (17) bajo la aproximación estadística λ_s^I y λ_s^{II} son reemplazadas por la tasa de falla ordinaria de los respectivos tipos de falla, $\lambda^I(s)$ y $\lambda^{II}(s)$.

El tiempo durante el cual es observado el proceso en (16) es dado por X_w ,

$$X_w = w \wedge T^{II} = \int_0^w 1_{\{T^{II} > s\}} ds, \quad \mathbf{c.s.}, \quad (18)$$

tal que $E[X_w] = \int_0^w P(T^{II} > s) ds < \infty$, $\forall w \geq 0$. La anterior expresión es válida tanto bajo la aproximación física como bajo la aproximación estadística.

3.4. Proceso de costo de garantía bajo la política FRW con renovación.

Para una unidad nueva considere el proceso de costo de garantía descrito en la Sección 3.3 pero bajo la aproximación estadística o de caja negra, donde el sistema es reparado mínimamente en las fallas de tipo I y sustituido por uno nuevo cuando ocurre una falla de tipo II, dando lugar a la expedición de una nueva póliza de garantía con el mismo plazo que la inicial. Este proceso continúa hasta observar el primer sistema que sobreviva a la garantía, es decir, sin presentar falla de tipo II en un intervalo de tiempo $[0, w]$ (González, 2009).

Bajo aproximación estadística, considere $(T_n^{II})_{n \geq 1}$ la sucesión de tiempos de fallas de tipo II de los sistemas proporcionados al comprador desde la compra inicial hasta el vencimiento de la garantía y $\eta - 1$ el número de renovaciones que se producen hasta que el sistema sobrevive a la garantía sin experimentar falla de tipo II, entonces,

$$\eta = \inf\{j : j = 1, 2, \dots, \eta - 1, \quad T_j^{II} \leq w, T_\eta^{II} > w\}. \quad (19)$$

Puede mostrarse que $\eta \sim \text{Geometrica}(G(w))$, donde

$$G(t) = P(T^{II} \leq t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t p(u)\lambda(u)du\right\}, \quad (20)$$

$p(t)$ es la probabilidad de que el sistema presente falla tipo II y $\lambda(t)$ es la tasa de falla general.

El proceso de costo de garantía durante la vigencia de la misma, bajo aproximación estadística o de caja negra es,

$$Z_w^{FRW_e} = \sum_{j=1}^{\eta-1} \left(C^I N_{T_j^{II}}^I + C^{II} \right) + C^I N_w^I, \quad (21)$$

con $Z_w^{FRW_e} < \infty$ y $\eta < \infty$ **c.s.** Observe que $N_{T_j^{II}}^I$ es el número de reparos mínimos que ocurren en el intervalo $[0, T_j^{II}]$, con tasa de intensidad $\lambda^I(t)$.

Sea $X_{w,j} = w \wedge T_j^{II}$ el tiempo que la j -ésima unidad suministrada en el proceso de renovación, dura bajo garantía. Entonces el ciclo o tiempo total bajo garantía para una venta bajo la aproximación estadística corresponde a,

$$X_w^{FRW_e} = \sum_{j=1}^{\eta-1} X_{w,j} + X_{w,\eta} = \sum_{j=1}^{\eta-1} T_j^{II} + w \quad (22)$$

Ahora bajo la aproximación física, suponga que durante el periodo de garantía los componentes de un sistema pueden presentar dos tipos de falla: falla de tipo I, reparadas mínimamente, o falla de tipo II, no reparable. Sea $(T_n^{II})_{n \geq 1}$ la sucesión de tiempos de falla de tipo II del sistema observados sobre un componente crítico. Los términos de esta sucesión son tiempos de parada finitos totalmente inaccesibles e independientes. Note que se asume que la ocurrencia de una falla de tipo II en un componente crítico produce la falla del sistema completo y entonces diremos que el sistema ha presentado falla de tipo II, lo que conducirá a la sustitución del sistema por uno nuevo y la expedición de una nueva póliza de garantía con el mismo plazo que la inicial. El proceso de costos de garantía en este caso es dado por (González, 2009),

$$Z_w^{FRW_f} = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} 1_{\{T_k^{II} \leq w\}} \left[C^I \tilde{N}_{w \wedge T_n^{II}}^I + C^{II} 1_{\{T_n^{II} \leq w\}} \right], \quad (23)$$

con la convención $\prod_{i=1}^{n-1} (\bullet) \equiv 1$, para $n = 1$.

El ciclo o tiempo bajo garantía para una venta dada corresponde al proceso dado por,

$$X_w^{FRW_f} = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} 1_{\{T_k^{II} \leq w\}} (w \wedge T_n^{II}). \quad (24)$$

3.5. Proceso de costo de garantía bajo la política PRW.

Para una unidad nueva considere el proceso de costo de garantía descrito en la Sección 3.3 pero bajo la aproximación estadística o de caja negra, donde el sistema es reparado mínimamente en las

fallas de tipo I hasta que se termine el periodo de garantía w o hasta que se presente una falla de tipo II (o sea una falla no reparable), lo que ocurra primero. Para una falla de tipo II sólo se hace reconocimiento de una porción del valor de compra del producto en función de la edad del mismo en el momento de la falla. Sea T^{II} el tiempo de vida del sistema con función de distribución dada por la ecuación (20). Una falla de tipo II a la edad $T^{II} \leq w$ produce el término de la garantía y un costo para el fabricante $C^{II} > C^I$ definido como,

$$C^{II}(T^{II}) = k \cdot C_p * \left(1 - \alpha \frac{T^{II}}{w}\right) 1_{\{T^{II} \leq w\}}, \quad (25)$$

donde $0 < k \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ y C_p es el precio de venta del producto, $C_p > C^I$. El proceso de costo hasta el fin de la garantía es,

$$Z_w^{PRW_e} = C^I N_{T^{II} \wedge w}^I + C^{II}(T^{II}), \quad (26)$$

con $Z_w^{PRW_e} < \infty$ **c.s.** Observe que $N_{T^{II} \wedge w}^I$ cuenta el número de reparos mínimos que ocurren en el intervalo $[0, T^{II} \wedge w]$, con tasa de intensidad $\lambda^I(t)$.

El ciclo o tiempo total bajo garantía para una venta bajo aproximación estadística, $X_w^{PRW_e}$ coincide con la ecuación (18).

Bajo aproximación física, suponga que el proceso de falla de las componentes críticas del sistema bajo garantía es modelado por un proceso de falla general, donde las fallas de tipo I que ocurren en las componentes críticas son reparadas mínimamente a un costo C^I hasta el tiempo w o hasta que ocurra la primera falla de tipo II, lo que ocurra primero. Una falla tipo II a la edad $T^{II} \leq w$ causa el término de la garantía y un costo C^{II} como fue definido en (25). Bajo esta aproximación T^{II} es la variable que informa sobre el tiempo que transcurre hasta producirse una falla de tipo II en una componente crítica del sistema.

El proceso de costo de garantía durante la vigencia es dado por,

$$Z_w^{PRW_f} = C^I \tilde{N}_{w \wedge T^{II}}^I + kC_p(1 - \alpha)1_{\{T^{II} \leq w\}} + kC_p T^{II} \left(\frac{1}{T^{II}} - \frac{1}{w}\right) 1_{\{T^{II} \leq w\}}. \quad (27)$$

La representación semimartingala regular para Z_w^{PRW} es (González, 2009),

$$Z_w^{PRW} = \int_0^w \left[1_{\{T^{II} > s\}} (\lambda_s^I C^I + kC_p(1 - \alpha) \lambda_s^{II}) + kC_p \alpha \frac{1}{s^2} T^{II} 1_{\{T^{II} \leq s\}} \right] ds + M_w^{PRW}, \quad (28)$$

donde $M_w^{PRW} \in \mathbf{M}_0^2$, es una martingala de media cero uniformemente integrable.

El tiempo o ciclo bajo garantía corresponde a $X_w^{PRW} = w \wedge T^{II}$ y su representación semimartingala está dada en (18).

4. COMPARACIÓN DE LOS PROCESOS DE COSTOS ASOCIADOS A LAS POLÍTICAS FRW Y PRW

Considere un sistema k de n , el cual funciona si y sólo si al menos k de n componentes funcionan. Las componentes son independientes e idénticamente distribuidas. Sea S_i el tiempo de vida de la i -ésima componente y $P\{S_i \leq t\} = F(t)$ la función de distribución acumulada (c.d.f) de S_1, \dots, S_n , respectivamente. Si $S_{(1)} \leq S_{(2)} \leq \dots \leq S_{(n)}$ son los estadísticos de orden de una muestra aleatoria de los tiempos de vida S_1, \dots, S_n , la estadística $S_{(n-k+1)}$ denotada por $T_{k|n}$ define el tiempo de vida del sistema k de n . En particular se considera un sistema con estructura $n = 4$ y $k = 2$, los tiempos de falla de las componentes siguen una distribución Weibull, con parámetro de forma $\beta = 3,3$ y de escala $\theta = 10,122$. Las componentes son independientes de tal manera que la falla de una de ellas no influencia el funcionamiento de las otras, los parámetros de la distribución Weibull se escogen tales que la esperanza de vida $\mu = 9,080$ miles de horas y $\sigma = 3,027$ miles de horas, como en el caso de Barlow & Proschan (1996) relacionado con el tiempo de vida de tubos electrónicos usados en el equipo de comunicación de aerolíneas comerciales (Aeronautical Radio, 1958). Los resultados presentados son obtenidos a partir de la simulación de 100,000 ventas. A cada una de estas ventas se le registra el tipo de falla que presenta el producto en un periodo de garantía determinado de 12 mil horas ($w = 12$), bajo el supuesto que se trata de un producto cuyo tiempo de vida se mide en miles de horas. Se asume además que el tiempo entre reparaciones es despreciable y que todos los reclamos de garantía son válidos.

Como resultado de la simulación de los procesos de costo de garantía presentados en la Sección 3 para el sistema anteriormente descrito, se obtiene la estimación no paramétrica de la distribución de los costos de garantía bajo cada aproximación (física y estadística o de caja negra) y se comparan tales distribuciones para determinar el efecto de estas aproximaciones en la modelación del costo de garantía. Estas comparaciones se realizan mediante pruebas no paramétricas tales como la prueba Chi-cuadrado, la prueba de Wilcoxon-Mann-Whitney y gráficos cuantil-cuantil. En este análisis llamaremos Costo total unitario de garantía a la suma del Costo unitario de garantía por falla de tipo I y el Costo unitario de garantía por falla de tipo II.

4.1. Resultados de la aplicación de la política de garantía FRW con renovación

La Figura 1 presenta el diagrama de barras de los costos de garantía unitarios ocasionados por fallas de tipo I y fallas de tipo II, y la Figura 2, presenta el diagrama de barras del costo total unitario de garantía y el histograma del ciclo de garantía del sistema. Gráficamente se observa que para las distribuciones de los costos unitarios de garantía por falla de tipo I y de tipo II, en ambas aproximaciones hay asimetría positiva en la distribución de los costos, es decir es poco probable de observar el evento de que en una venta ocurra un número grande de reparaciones.

Como interesa probar si existen diferencias entre las distribuciones de costos de garantía unitarios resultantes por cada aproximación, la Tabla 1 presenta los resultados de la prueba de Chi-cuadrado (Press *et al.*, 1992), bajo la hipótesis nula de igualdad distribucional $H_0 : F_e(x) = F_f(x)$ para todo x . En adelante, $F_e(x)$ se referirá a la distribución de frecuencias obtenida bajo la aproximación de caja negra y $F_f(x)$ a la obtenida bajo la aproximación física. Por tratarse de variables discretas, estos resultados son obtenidos considerando las siguientes categorías del costo de garantía:

- Costo unitario falla de tipo I: 0, 5, 10, 15, 20, 25, ≥ 30 .
- Costo unitario falla de tipo II: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, ≥ 170 .
- Costo total unitario: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, ≥ 130

Estas categorías son obtenidas reagrupando en la última aquellas que tienen frecuencias menores al 5%. Bajo esta discretización la hipótesis de igualdad distribucional es rechazada para todo x con un valor- $p < 2,2 \times 10^{-16}$ para los costos unitarios de falla de tipo I, falla de tipo II y totales. Los resultados muestran que la distribución de costos unitarios de garantía a causa de la falla de tipo I como la falla de tipo II, e incluso los costos totales, bajo las dos aproximaciones (físico y caja negra), no resultan ser estadísticamente iguales.

Tabla 1: Prueba Chi cuadrado de igualdad distribucional entre aproximación caja negra y aproximación física. Política FRW.

Costo unitario	χ^2	g.l	Valor-p
falla de tipo I	12379,12	6	$< 2,2 \times 10^{-16}$
falla de tipo II	5893,437	17	$< 2,2 \times 10^{-16}$
costo total	10700,75	26	$< 2,2 \times 10^{-16}$

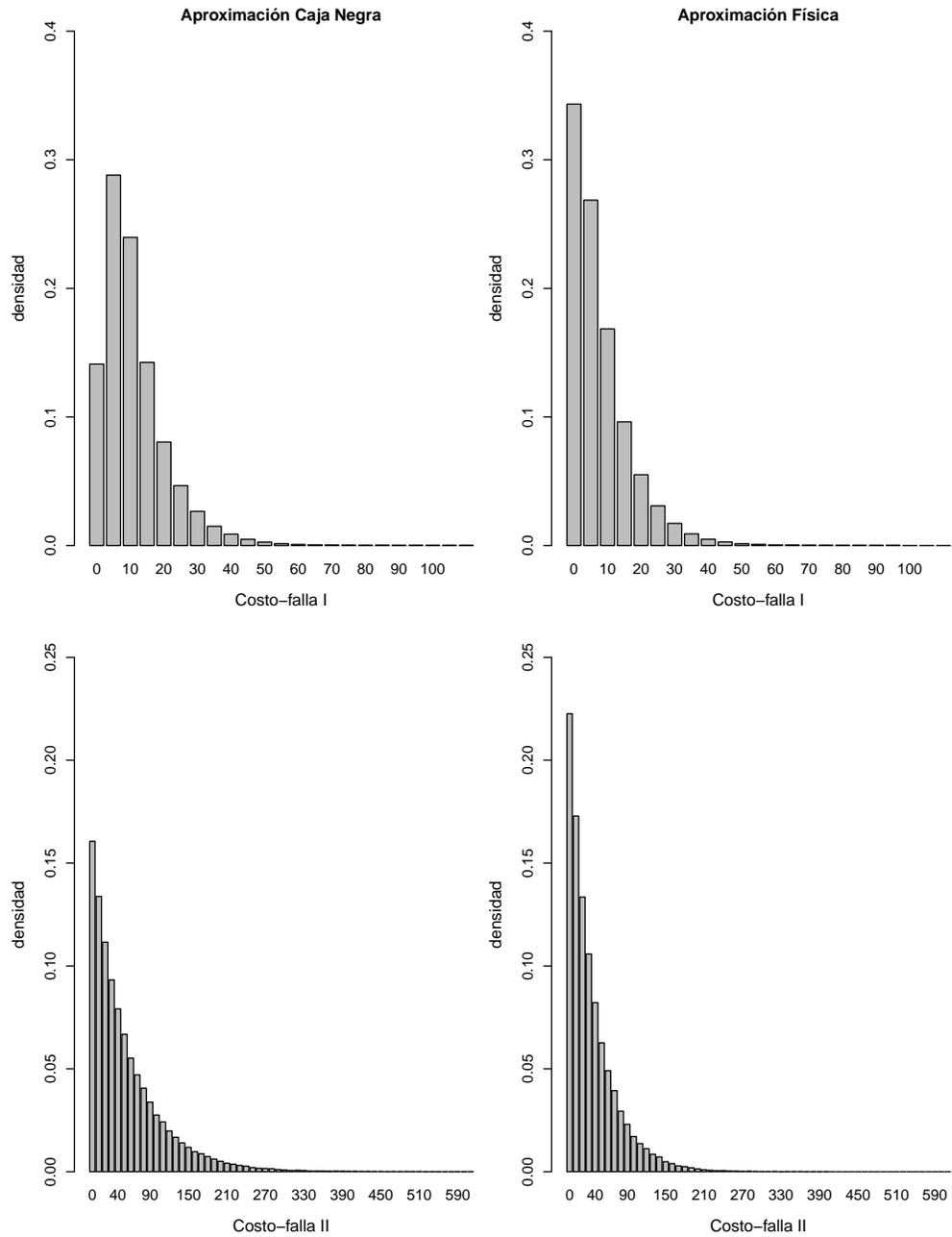


Figura 1: Diagrama de barras costo unitario de garantía falla de tipo I y falla de tipo II, obtenidos de 100,000 ventas simuladas. Política FRW.

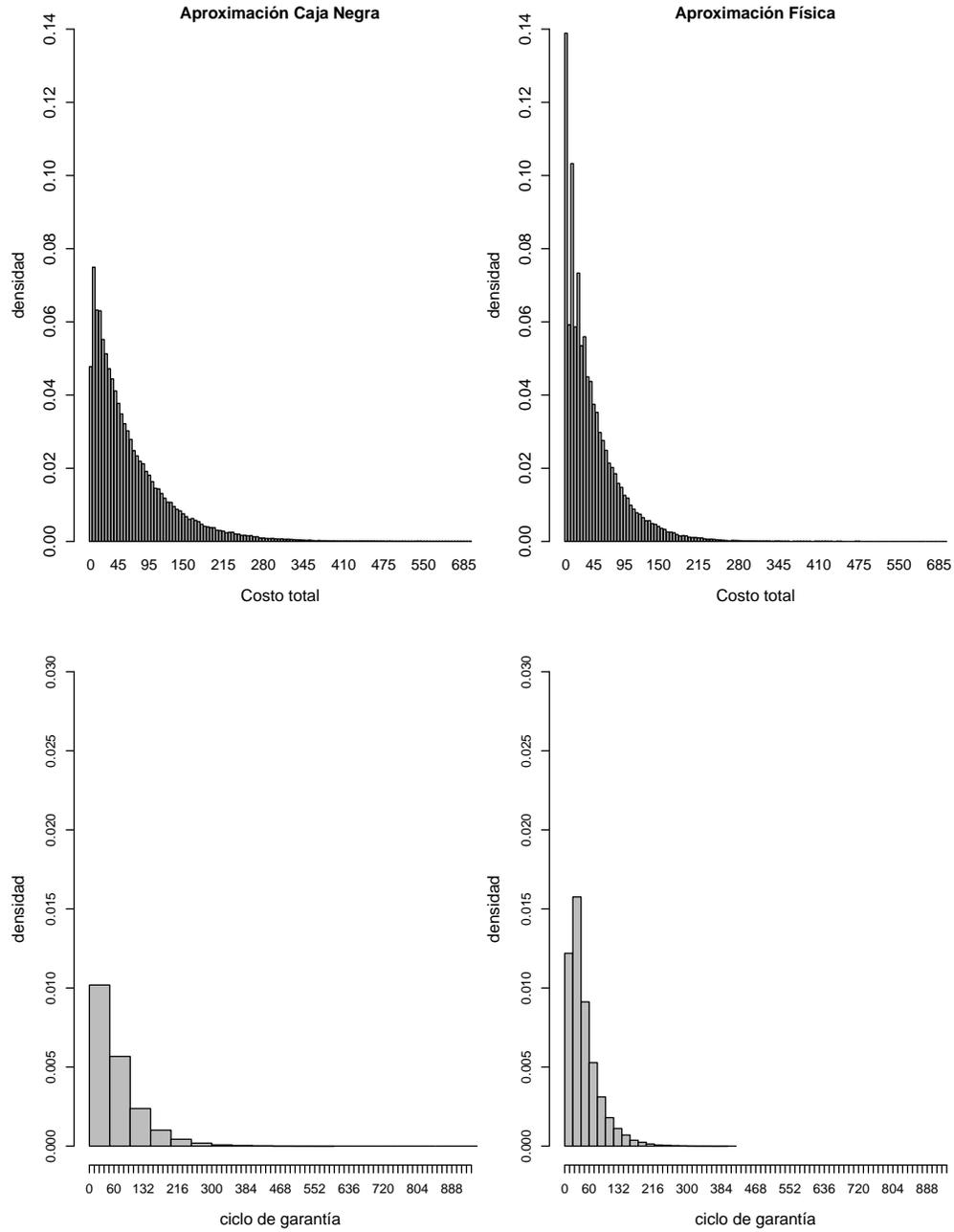


Figura 2: Diagrama de barras costo total unitario de garantía e histograma del ciclo de garantía, obtenidos de 100,000 ventas simuladas. Política FRW.

Cabe mencionar que al observar la distribución del costo unitario de garantía por la falla de tipo II y la distribución del costo total unitario, se encuentra que estas variables en su naturaleza discreta toman muchos valores diferentes, es decir, su número de categorías es muy amplio. Agresti (2002), menciona que en realidad todas las cantidades son discretas ya que para este momento no existe un instrumento que mida con extrema exactitud, por lo que si una variable cuantitativa discreta toma muchos valores será frecuentemente considerada como continua. Con base en esta definición, se propone dar tratamiento como variables continuas al costo unitario de garantía por la falla de tipo II y a los costos totales unitarios, para desarrollar la prueba de rangos de Wilcoxon, con el fin de constatar el rechazo de la hipótesis nula obtenida bajo la prueba Chi-cuadrado presentada en la Tabla 1.

Tabla 2: Prueba de Wilcoxon para igualdad distribucional entre la aproximación de caja negra y la aproximación física. Política FRW.

Costo unitario	W	Valor-p
falla de tipo II	5919232100	$< 2,2 \times 10^{-16}$
costo total	6067269054	$< 2,2 \times 10^{-16}$

La Tabla 2 presenta el resultado de la prueba de Wilcoxon para los costos unitarios de garantía por falla de tipo II y el costo total unitario de garantía. Los valores-p permiten concluir para un nivel de significancia del 5% que las distribuciones de estos costos unitarios bajo las aproximaciones de caja negra y física son estadísticamente diferentes. El costo total unitario de garantía para la política FRW bajo la aproximación estadística (o caja negra), está conformado en promedio por un 29% por fallas de tipo I y en un 71% por falla de tipo II, y bajo la aproximación física está compuesto en promedio por un 24% debido a fallas de tipo I y por un 76% debido a fallas de tipo II.

Tabla 3: Estadísticas descriptivas del costo unitario de garantía. Aproximación estadística.

	Costo falla I	Costo falla II	Costo total
min.	0,00	0,00	0,00
Q_1	5,00	10,00	20,00
Q_2	10,00	40,00	45,00
media	11,01	53,11	64,05
Q_3	15,00	80,00	90,00
max.	125,00	890,00	1015,00

En las Tablas 3 y 4 se presenta un resumen de estadísticas descriptivas para el costo unitario de garantía, bajo los escenarios anteriormente descritos. Al observar los cuartiles de la distribución de los costos unitarios de garantía obtenidos bajo la aproximación estadística (o caja negra) se encuentra que estos presentan valores mayores en comparación con los cuartiles de los costos de garantía obtenidos mediante el modelo de falla bajo la aproximación física.

Tabla 4: Estadísticas descriptivas del costo unitario de garantía. Aproximación física.

	Costo falla I	Costo falla II	Costo total
min.	0,00	0,00	0,00
Q_1	0,00	10,00	10,00
Q_2	5,00	20,00	30,00
media	7,69	34,77	42,46
Q_3	10,00	50,00	60,00
max.	95,00	400,00	475,00

En particular se observa en la Tabla 4 que el máximo costo total de garantía registrado en una venta es 475 bajo la aproximación física y de la Tabla 3 que para la aproximación de caja negra es de 1015, mostrándose marcada diferencia en valor, lo que sugiere que en la aproximación estadística, la modelación del tiempo de vida total del sistema resulta ser mayor comparado con la obtenida para la aproximación física. La aproximación de caja negra refleja una importante pérdida de información del tiempo del vida del sistema.

El ciclo de garantía se encuentra en miles de horas y se puede entender como el tiempo que dura una venta en garantía. La Figura 2 presenta el histograma del ciclo de garantía del sistema bajo la política FRW con renovación. En la distribución del ciclo de garantía bajo la aproximación de caja negra se observa que el 15,95 % de las ventas tienen un ciclo de garantía igual a 12 mil horas, que corresponde al tiempo máximo en el cual una venta está en garantía, lo que sugiere que para estas ventas en el sistema no se presentaron fallas de tipo II y por lo tanto no se produjo renovación de la póliza. Para la aproximación física el 22,44 % de las ventas no presentaron fallas de tipo II en el sistema a nivel de las componentes críticas durante el plazo de la garantía.

Al observar el histograma para la variable ciclo de garantía, en ambas aproximaciones, X_w^{FRW} toma el valor de 12 con probabilidad $p_1(t)$ y valores continuos en el intervalo $(12, \infty)$ con probabilidad $1 - p_1(t)$, por lo tanto X_w^{FRW} se puede considerar como una variable híbrida, tal como la define Lachenbruch (2002). Una variable híbrida Y definida sobre Ω , toma valores en el conjunto discreto $S \subset \mathbb{R}$, con probabilidad acumulada $p_1 = P(Y \in S) > 0$ y toma valores $y \in S^c = \mathbb{R} - S$ de acuerdo a una distribución continua con probabilidad acumulada $1 - p_1 = p_2 = P(Y \in S^c) > 0$, ($0 < p_1 < 1$). La variable aleatoria Y tiene función de distribución $F(y) = p_1 F^d(y) + (1 - p_1) F^c(y)$, donde $P(Y = k) = p_1 \in [0, 1]$ y $P(Y \neq k) = 1 - p_1$, $F^d(y)$ es la función de distribución discreta de Y , $F^d(y) = 0$ para $y < k$ y $F^d(y) = 1$ para $y \geq k$. $F^c(y)$ es la función de distribución continua de Y .

Como es de interés probar la igualdad distribucional del ciclo de garantía bajo estas dos aproximaciones se propone desarrollar el test de dos partes propuesto por Lachenbruch (2002) para variables híbridas. El test que contrasta la hipótesis nula de bondad de ajuste $H_0 : F_e(x) = F_f(x)$ para una variable híbrida, es equivalente a realizar dos pruebas, una sobre igualdad de proporciones binomiales y otra prueba para contrastar que dos muestras independientes provienen de la misma población, $H_0 : (p_e = p_f) \cap (F'_e(x) = F'_f(x))$. A esta prueba se le conoce como prueba de dos partes. Una prueba de dos partes es la suma de dos estadísticos χ^2 . Para detalles de la prueba ver Lachenbruch (2002). Probaremos inicialmente la hipótesis $H_0 : p_e = p_f$, la cual se refiere a que la p_e : proporción de ventas con ciclos de garantía igual a 12 mil horas bajo la aproximación estadística o de caja negra es igual a p_f : proporción de ventas con ciclos de garantía igual a 12 mil horas bajo la aproximación física. Para luego probar la igualdad distribucional sobre los valores continuos que toma la variable ciclo de garantía en cada una de las aproximaciones, bajo la hipótesis $H'_0 : F'_e(x) = F'_f(x)$, donde F'_e y F'_f son las funciones de distribución del ciclo de garantía para ventas que duran en garantía más de 12 mil horas, para la aproximación de caja negra y física, respectivamente.

Tabla 5: Prueba modelo de dos partes para el ciclo de garantía. Política FRW.

$H'_0 : p_e = p_f$			$H'_0 : F'_e(x) = F'_f(x)$		
χ^2	g.l	Valor-p	W^2	g.l	Valor-p
1359,6	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$	$(3951996768)^2$	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$

De la Tabla 5 se obtiene un valor del estadístico de prueba $L = \chi^2 + W^2 = 5,62 \times 10^{19}$, que se distribuye *chi-cuadrado* con 2 grados de libertad, para el cual se obtiene un valor-p de $< 2,2 \times 10^{-16}$ que sugiere que la distribución del ciclo de garantía bajo las dos aproximaciones de tiempos de falla son distintas.

La Figura 3 presenta el gráfico cuantil-cuantil para comparar las distribuciones de los costos de garantía bajo las dos aproximaciones, tomando en cada caso como grupo de referencia la distribución encontrada bajo la aproximación de caja negra. De estos gráficos se observa que en ninguno de los casos es posible pensar que las dos muestras provienen de la misma distribución poblacional, ya que los cuantiles de la distribución bajo la aproximación física se alejan marcadamente de la línea recta de 45° .

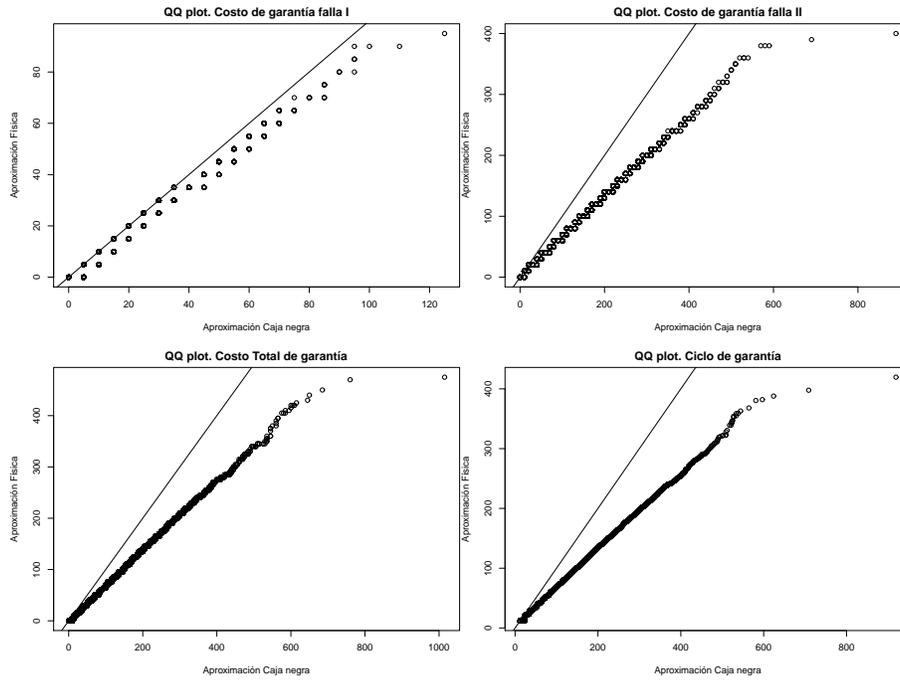


Figura 3: Gráfico cuantil-cuantil para los costos de garantía bajo los dos tipos de aproximaciones. Política FRW.

4.2. Resultados de la aplicación de la política de garantía PRW

Siguiendo el modelo descrito en la Sección 3.5. se asume $C_p = 10$, $w = 12$, $C^I = 5$ y C^{II} como en la ecuación (25). Los resultados presentados son obtenidos al simular 100,000 ventas y registrar el tipo de falla que presenta el producto y el costo asociado, bajo un periodo de garantía determinado de 12 mil horas ($w = 12$), tal como fue definido al inicio de esta Sección. Se asume además que el tiempo entre reparaciones es despreciable y que todos los reclamos de garantía son válidos.

La Figura 4 muestra el diagrama de barras y el histograma del costo unitario de garantía generados a causa de la falla de tipo I y II, respectivamente, bajo la aproximación de caja negra y la aproximación física. Se observa que para ambos tipos de aproximación, las distribuciones de los costos de garantía presentan una cantidad considerable de valores cero.

Las Tablas 6 y 7 presentan las estadísticas descriptivas del costo unitario de garantía para la política PRW, bajo la aproximación de caja negra y física. De este resumen de indicadores se observa que bajo la aproximación estadística o de caja negra los valores del costo de garantía tienden a ser en algunas ocasiones un poco mayores comparados con los encontrados por medio de la aproximación física.

Para el caso de las falla de tipo I, se obtiene una distribución discreta y para la falla de tipo II,

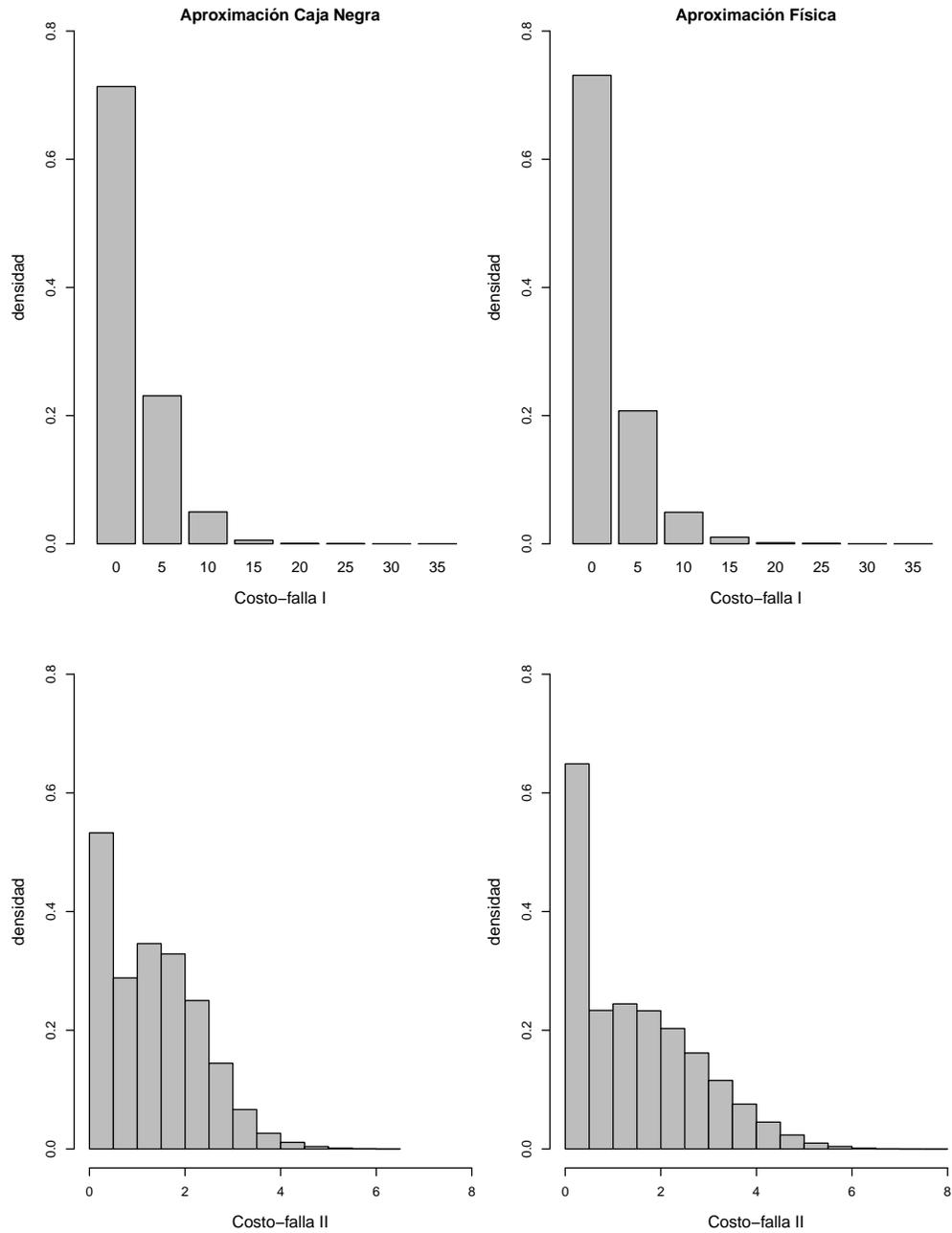


Figura 4: Diagrama de barras costo unitario de garantía falla de tipo I e histograma para el costo unitario de garantía falla de tipo II, obtenidos de 100,000 ventas simuladas. Política PRW.

Tabla 6: Estadísticas descriptivas del costo unitario de garantía. Aproximación estadística.

	Costo falla I	Costo falla II	Costo total
min.	0,00	0,00	0,00
Q_1	0,00	0,44	1,26
Q_2	0,00	1,26	2,12
media	1,74	1,31	3,05
Q_3	5,00	2,01	5,00
max.	25,00	6,23	25,00

Tabla 7: Estadísticas descriptivas del costo unitario de garantía. Aproximación física.

	Costo falla I	Costo falla II	Costo total
min.	0,00	0,00	0,00
Q_1	0,00	0,15	0,82
Q_2	0,00	1,24	2,25
media	1,73	1,44	3,17
Q_3	5,00	2,33	5,00
max.	35,00	7,64	35,00

se obtiene una distribución híbrida (Lachenbruch, 2002). Al igual que en la política FRW el objetivo es comparar si existen diferencias en los costos de garantía que se obtienen a partir de las dos aproximaciones o niveles de información. Ya que los costos de garantía generados por la falla de tipo I son de naturaleza discreta, la prueba chi-cuadrado es llevada a cabo considerando las siguientes categorías del costo unitario de garantía para esta falla: 0, 5, 10, ≥ 15 , la última categoría recoge los que valores discretos mayores a 15 ya que estos tienen frecuencias menores al 5%. Como resultado de realizar la prueba de hipótesis de igualdad distribucional de los costos de garantía bajo la aproximación de caja negra y la aproximación física, la prueba chi-cuadrado arroja un valor del estadístico de prueba $\chi^2 = 334,7541$, con $df = 3$, y valor-p $< 1,487123 \times 10^{-72}$, lo que implica que existen diferencias estadísticas entre las distribuciones. La Tabla 8 presenta la prueba del modelo de dos partes para el costo de garantía por falla de tipo II, en esta prueba p_e y p_f es la proporción de costos ceros bajo la aproximación estadística y bajo la aproximación física, $F_e(x)$ y $F_f(x)$ es la función de distribución de los costos diferentes de cero para la aproximación de caja negra y física, respectivamente. Las estimaciones de la proporción de ceros para la aproximación de caja negra es $\hat{p}_e = 15,82\%$ y para la aproximación física $\hat{p}_f = 22,33\%$.

De la Tabla 8 se obtiene el estadístico de prueba $L = \chi^2 + W^2 = 8,12 \times 10^{18}$ que se distribuye *chi-cuadrado* con 2 grados de libertad, para el cual se obtiene un valor-p de $< 2,2 \times 10^{-16}$, lo que sugiere que la distribución de los costos unitarios de garantía por falla de tipo II bajo la aproximación de caja negra y la aproximación física, son estadísticamente diferentes.

Tabla 8: Prueba modelo de dos partes para el costo unitario de garantía por falla de tipo II. Política PRW.

$H'_0 : p_e = p_f$			$H'_0 : F'_e(x) = F'_f(x)$		
χ^2	g.l	Valor-p	W^2	g.l	Valor-p
1372,9	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$	$(2857591886)^2$	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$

La Figura 5 presenta el histograma del costo total unitario y del ciclo de garantía para la política de garantía PRW. Los histogramas para el costo total unitario de garantía bajo las dos aproximaciones sugieren mezcla de sub-poblaciones, al presentarse gráficamente en la estimación de la función de densidad varios máximos locales (Titterington *et al.*, 1985), además se trata de una variable híbrida, ya que el costo total unitario de garantía bajo la política PRW, presenta valores discretos en el caso de no presentarse fallas o en caso que el sistema presente sólo fallas de tipo I, y toma valores continuos en otro caso. Con el propósito de explorar si existen diferencias entre la distribución de costos unitarios totales de garantía obtenidos por ambas aproximaciones, se propone aplicar de nuevo el test de dos partes propuesto por Lachenbruch (2002). El test chi-cuadrado es llevado a cabo para probar igualdad de proporciones en la parte discreta de la distribución, con las mismas categorías discretas definidas para los costos unitarios de garantía a causa de falla de tipo I, para esta prueba se obtiene un valor del estadístico de prueba $\chi^2 = 4233,974$ con 4 grados de libertad y un valor-p = 0,000, lo que permite concluir que a un nivel de significancia del 5%, la hipótesis de igualdad distribucional es rechazada cuando el costo total unitario de garantía está constituido por costos nulos o sólo por fallas de tipo I. Para la segunda parte del test, que involucra una prueba sobre la parte continua de la distribución, se realiza la prueba de rangos de Wilcoxon, para contrar la hipótesis $H'_0 : F_e(x) = F_f(x) \quad \forall x \in S$. La Tabla 9 presenta los resultados obtenidos para el test de dos partes y apartir de estos resultados se concluye que las distribuciones del costo total unitario de garantía obtenidas bajo distintos niveles de información son estadísticamente diferentes ($L = 8,57 \times 10^{18}$, L se distribuye *chi-cuadrado* con 5 g.l y valor-p $< 2,2 \times 10^{-16}$).

Tabla 9: Prueba modelo de dos partes para el costo total unitario de garantía. Política PRW.

$H'_0 : p_e = p_f$			$H'_0 : F'_e(x) = F'_f(x)$		
χ^2	g.l	Valor-p	W^2	g.l	Valor-p
4233,9	4	$< 2,2 \times 10^{-16}$	$(2927464215)^2$	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$

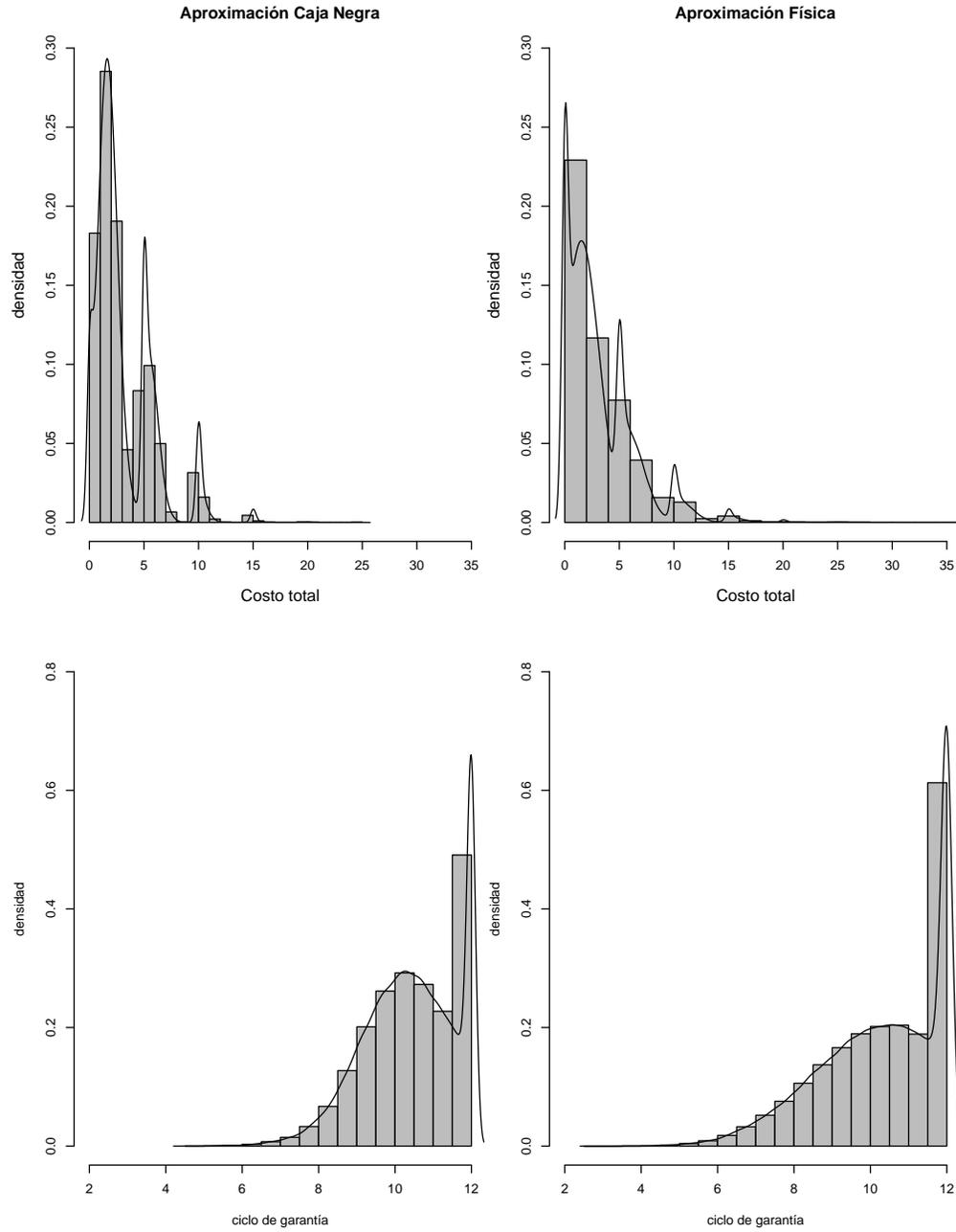


Figura 5: Histograma del costo total y del ciclo de garantía, obtenidos de 100.000 ventas simuladas. Política PRW. En cada caso la línea continua superpuesta al histograma representa la estimación de la curva de densidad.

Dada la distribución de mezclas observada para el costo total unitario de garantía, se sugiere para el proceso de estimación de costos de garantía para esta política dar tratamiento por separado a cada uno de los costos unitarios por falla de tipo I y por falla de tipo II, sin considerar la distribución de costos totales unitarios. El costo total unitario de garantía para las 100,000 ventas simuladas que presentan algún tipo de falla, bajo la aproximación física están conformados en promedio por un 72,8% debido a costos por fallas de tipo II, y por un 27,2% debido a costos por fallas de tipo I o reparables. En el caso de la aproximación de caja negra el costo total unitario de garantía se encuentra conformado de manera muy similar al obtenido bajo la aproximación física, con un 72,3% debido a fallas de tipo II y por un 27,7% debido a fallas de tipo I. Sin embargo, las distribuciones del costo total unitario de garantía resultantes bajo las dos aproximaciones son estadísticamente diferentes.

Tabla 10: Prueba modelo de dos partes para el ciclo de garantía. Política PRW.

$H_0' : p_e = p_f$			$H_0' : F_e'(x) = F_f'(x)$		
χ^2	g.l	Valor-p	W^2	g.l	Valor-p
1372,9	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$	$(3681154273)^2$	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$

Con respecto a la distribución del ciclo de garantía presenta un valor discreto que coincide con el máximo de la distribución en 12 mil horas, para la aproximación física la proporción de ventas que permanecen en garantía 12 mil horas es de $\hat{p}_f = 22,49\%$ y para la aproximación de caja negra es $\hat{p}_e = 15,84\%$. La Tabla 10 presenta los resultados de la prueba de hipótesis $H_0 : (p_e = p_f) \cap (F_e(x) = F_f(x))$ para el modelo de dos partes, donde p_e y p_f es la proporción de ventas con ciclos de garantía igual a 12 mil horas bajo la aproximación estadística o de caja negra y bajo la aproximación física, respectivamente. $F_e(x)$ y $F_f(x)$ es la función de distribución del ciclo de garantía para ventas que duran en garantía menos de 12 mil horas, para la aproximación de caja negra y física. Como resultado de estas pruebas, se encuentra que se rechaza H_0 para el modelo de dos partes al observar un valor de la estadística de prueba $L = 1,36 \times 10^{19}$ con distribución *chi-cuadrado* con 2 grados de libertad y un valor-p de $< 2,2 \times 10^{-16}$, el cual resulta ser muy pequeño, lo que significa que existe diferencias estadísticas significativas entre el ciclo que dura en garantía una venta bajo la aproximación de caja negra o estadística y la aproximación física.

La Figura 6 presenta el gráfico cuantil-cuantil para comparar las distribuciones de los costos unitarios de garantía bajo las dos aproximaciones corroborando las diferencias encontradas en las distribuciones.

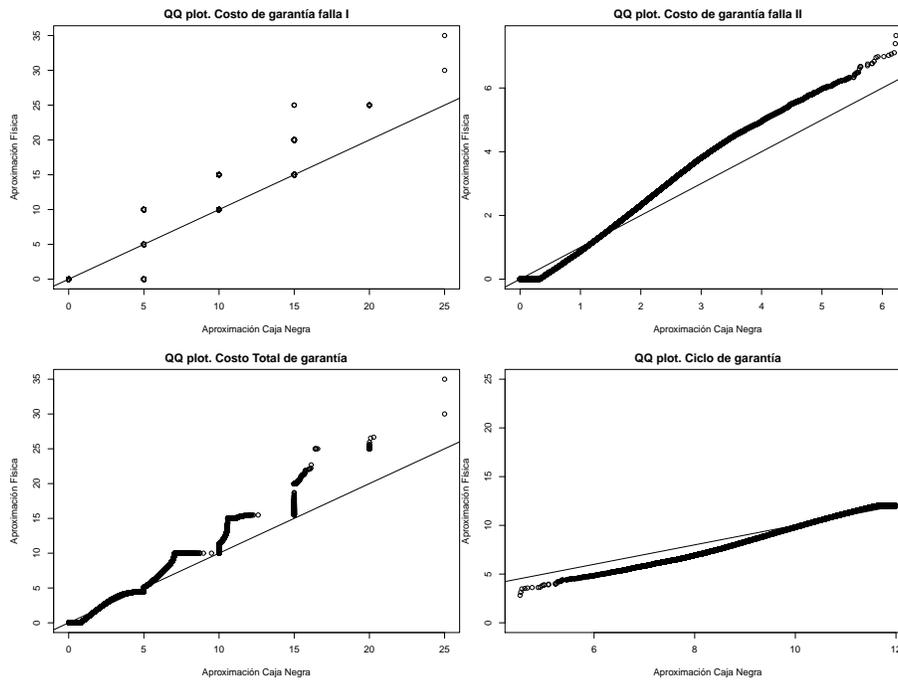


Figura 6: Gráfico cuantil-cuantil para los costos de garantía bajo los dos tipos de aproximaciones. Política PRW.

5. CONCLUSIONES

Modelar los procesos de costos para las políticas FRW y PRW, implica la modelación del proceso de falla del sistema de acuerdo a su estructura, el nivel de reparación asumido y de los costos de garantía acumulados. Cuando se considera que el proceso de falla puede ser modelado a través de dos aproximaciones: física y de caja negra, la tasa de falla del sistema difiere dependiendo de la aproximación, de tal manera que el proceso de costos de garantía no es el mismo. Bajo la aproximación de caja negra el proceso de costo de garantía ignora la dinámica en el tiempo de cómo fallan los componentes del sistema, a diferencia de la aproximación física que considera esta información. Los resultados de este trabajo mostraron que las distribuciones de los costos unitarios y ciclos de garantía obtenidos por cada aproximación no resultan ser estadísticamente iguales. Se evidencia que la aproximación de caja negra tiende a presentar valores más altos de costos unitarios y ciclo de garantía. En el caso de la política FRW con renovación, la modelación del ciclo de garantía bajo aproximación de caja negra resultó en valores bastante grandes, encontrando valores máximos aproximadamente de 104,9 años los cuales permanece el producto en garantía.

Se puede concluir, para los escenarios simulados, que existe un efecto al modelar los procesos de falla ignorando el estado de las componentes del sistema a través del tiempo y este efecto resulta en la sobre estimación del proceso de costo. Para la política FRW y PRW, bajo aproximación de caja

negra el 95,2% de las 100,000 ventas simuladas presentaron costos por garantía, mientras que bajo aproximación física fue del 86,1%. Aunque la conformación del costo total para las dos políticas bajo las aproximaciones consideradas resulta ser similar, ya que para la política FRW el costo de garantía bajo la aproximación de caja negra, está conformado en promedio por un 29% debido a fallas de tipo I y en un 71% por falla de tipo II, y bajo la aproximación física el costo total de garantía, está compuesto en promedio por un 24% debido a fallas tipo I y por un 76% debido a fallas de tipo II. Con respecto a la política PRW, bajo aproximación de caja negra el 72,3% del costo total se debe a fallas de tipo II y el 27,7% a fallas de tipo I; por otro lado, bajo aproximación física, los resultados son muy similares, con en promedio un 72,8% debido a fallas de tipo II y un 27,2% a costos de garantía debido a fallas de tipo I.

Un futuro trabajo puede contemplar el escenario de tiempos de falla de las componentes de un sistema que no sean independientes. Además se puede pensar en la posibilidad de trabajar con costos de garantía descontados y políticas de garantía combinadas FRW/PRW.

Referencias

- Aeronautical Radio, Inc. (1958), *A selection of electron tube reliability functions*. Washington: Reliability Research Dept.
- Agresti, A. (2002), *Categorical data analysis*. Reino Unido: A Jhon Wiley & Sons, Inc., Publication
- Agustin, Z.; Peña, E. (2001), Goodness-of-Fit of the distribution of time-to-first-occurrence in recurrent event models *Lifetime Data Analysis*, **7**, 289-306.
- Aven, T.; Jensen, U. (1999), *Stochastic models in reliability*. New York: Springer, Inc.
- Bai, J.; Pham, H. (2004), Discounted warranty cost of minimally repaired series systems *IEEE Transactions on Reliability*, **53**, 37-42.
- Bai, J.; Pham, H. (2006), Cost analysis on renewable full-service warranties for multi-component systems *European Journal of Operational Research*, **168**, 492-508.
- Barlow, R.E.; Hunter, L. (1960), Optimum preventive maintenance policies. *Operations Research*, **8**, 90-100.
- Barlow, R.; Proschan, F. (1981), *Statistical theory of reliability and life testing*. New York: Silver Spring.
- Barlow, R.; Proschan, F. (1996), *Mathematical theory of reliability*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

- Blischke, W.R.; Murthy, D.N.P. (1992), Product warranty management-I, a taxonomy for warranty policies. *European Journal of Operational Research*, **62**, 127-148.
- Block, H.; Borges, W.; Savits, T. (1985), Age-dependent minimal repair. *Journal of Applied Probability*, **22**, 370-385.
- Boland, J.P.; El-Newehi, E. (1998), Statistical and information based (physical) minimal repair for k out of n systems. *Journal of Applied Probability*, **35**, 731-740.
- Chien, Y.H. (2005), Determining optimal warranty periods from the seller's perspective and optimal out-of-warranty replacement age from the buyer's perspective. *International Journal of Systems Science*, **36**, 631-637.
- Duchesne, T.; Marri, F. (2009), General distributional properties of discounted warranty cost with risk adjustment under minimal repair. *IEEE Transactions on Reliability*, **58**, 143-151.
- González, N. (2009), Processos de burn-in e de garantia em sistemas coerentes sob o modelo de tempo de vida geral. *PhD thesis*, Universidade de Sao Paulo.
- González, N. (2011), Tiempo óptimo de garantía para un sistema coherente basado en una regla de parada óptima y bajo el proceso de falla general. XXI Simposio de Estadística. Universidad Nacional de Colombia, Santa fé de Bogotá.
- Hollander, M.; Presnell, B.; Sethuraman, J. (1992), Nonparametric estimation for a general repair model. *The Annals of Statistics*, **25**, 1140-1160.
- Lachenbruch, P. (2001), Comparisons of two part models with competitors. *Statistics in Medicine*, **20**, 1215-1234.
- Lachenbruch, P. (2002), Analysis of data with excess zeros. *Statistical Methods in Medical Research*, **11**, 297-302.
- Press, W.; Teukolsky, S.; Vetterling, W.; Flannery, B. (1992), *American Recipes in Fortran 77. The art of scientific computing*. Press Syndicate of the University of Cambridge.
- Titterton, D. M; Smith, A. F. M; Makov, U.E (1985), *Statistical analysis of finite mixture distributions*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.