

UNA ESTRATEGIA ESTOCÁSTICA DE BÚSQUEDA LOCAL PARA EL CUBO DE RUBIK

A LOCAL STOCHASTIC SEARCH STRATEGY FOR RUBIK'S CUBE

JUAN D. VÉLEZ ^a, JULIO C. MORALES ^b

Recibido 13-03-2013, aceptado 28-06-2013, versión final 30-06-2013

Artículo Investigación

RESUMEN: En este artículo se estudia a fondo la estructura del grupo de permutaciones G asociado al cubo de Rubik, con el propósito de diseñar un algoritmo estocástico de búsqueda local que, partiendo de cualquier posición, lleve el cubo a su posición inicial. Para ello se encuentra una filtración apropiada de subgrupos de G

$$(Id) \subset G_3 \subset G_2 \subset G_1 \subset G,$$

que permiten fraccionar el proceso de búsqueda y selección del algoritmo en cuatro pasos que corresponderán a cada uno de los subgrupos G_i y que converge en el último paso al elemento identidad de G , que corresponde a la posición en la que el rompecabezas queda “resuelto”.

PALABRAS CLAVE: Cubo de Rubik, Grupo de permutaciones, Algoritmo estocástico de búsqueda.

ABSTRACT: In this article we study the structure of the permutation group G associated with Rubik's Cube, with the purpose of designing a stochastic local search algorithm that, starting from any position, takes the cube to its *initial configuration*, i.e., that position where the puzzle is “solved”. For this, we find a filtration of G

$$(Id) \subset G_3 \subset G_2 \subset G_1 \subset G,$$

which partitions the search and selection process of the algorithm in four steps, each one corresponding to each of the subgroups G_i . In the last step the algorithm reaches the identity element of G , what amounts to reaching the *initial configuration* of the cube.

KEYWORDS: Rubik's Cube, Permutation Group, Stochastic Search Algorithm.

^aProfesor Titular. Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.

^bProfesor Asociado. Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.

1. INTRODUCCIÓN

El cubo de Rubik es creación del arquitecto húngaro Ernő Rubik (<http://www.rubiks.com/>), quien lo patentó en 1975. Está constituido por tres clases de piezas: 6 centrales, que muestran una sola cara, 12 aristas de dos caras y 8 vértices con tres caras. Cada lado del cubo rota libremente y sus seis caras se encuentran inicialmente pintadas de un solo color (el color de su pieza central). Después de que se rotan algunos de sus lados, y en consecuencia se entremezclan los colores de sus caras, el problema de *resolver el cubo* es el problema de encontrar una serie adecuada de movimientos (que también llamaremos jugadas) que lleven nuevamente el cubo a su *posición inicial o de armado*. En general se supone que la secuencia de rotaciones que llevó el cubo a esta posición es desconocida, ya que de otra forma el problema de restaurarlo sería trivial: sólo bastaría con reversar dicha secuencia.

Desde que el cubo hizo su aparición, se han descubierto cientos de algoritmos que permiten resolverlo, algunos de ellos en unas pocas decenas de movimientos (Kunkle y Cooperman, 2007). También se ha diseñado software capaz de armarlo, esencialmente programas que involucran extensas tablas de movimientos básicos que permiten ir armando el cubo paso a paso, de manera muy similar a como procedería un humano.

En este artículo presentamos un algoritmo no determinístico (Schwefel, 1995) que procede por azar y selección, en forma análoga a la evolución biológica. La estrategia general es la siguiente. Supongamos que \mathcal{X} es un espacio abstracto, que en nuestro caso puede ser identificado con el conjunto de todas las posibles secuencias finitas de movimientos, y en el cual la distancia entre dos secuencias x y y es el número mínimo de movimientos que separa a x de y . Supongamos que $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función a los números naturales que toma un máximo absoluto en un cierto punto $x_m \in \mathcal{X}$. En nuestro caso f puede tomarse como la función que asigna a cada posición el número de caras del cubo que se encuentran en su lugar correcto. Por tanto, la posición inicial en la que todas las caras (54 en total) están en sus posiciones correctas, correspondería a un punto donde se alcanza un máximo absoluto.

Si se parte de un punto cualquiera x_1 , el algoritmo genera aleatoriamente secuencias de movimientos de longitudes distintas, y que también varían al azar, lo cual equivale a “desplazarse” en forma aleatoria en el espacio X a nuevos puntos $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$. En cada uno de estos puntos se evalúa la función f y se escoge el primer punto x_{1i} donde se incrementa su valor, es decir, donde $f(x_{1i}) > f(x_1)$. El algoritmo inicia su búsqueda nuevamente, haciendo $x_2 = x_{1i}$, y repite el procedimiento anterior. De esta manera el algoritmo va “escalando” progresivamente hasta llegar a un punto de máximo. Sin embargo, ocurre con cierta frecuencia que el algoritmo escala hasta llegar a un cierto punto z en el que se alcanza un máximo *relativo*, y una vez allí, se queda “atrapado” en este punto. Esto es debido a que todos los puntos donde f alcanza un valor mayor se encuentran

muy distantes de z y por tanto la probabilidad de ser alcanzados por puro azar es muy pequeña. Esto hace que este tipo de algoritmos cuando se emplean con el propósito de resolver el cubo resulten imprácticos. Sin embargo, es posible remediar este defecto si el procedimiento de búsqueda se fragmenta en varias etapas, de tal forma que cada una de ellas posea muchos puntos en los que se alcanza el máximo. Una vez alcanzado el máximo de cada etapa, el algoritmo procede a encontrar el que corresponde a la siguiente hasta llegar al máximo absoluto.

El algoritmo que aquí se presenta ha sido inspirado en el algoritmo del matemático británico Morwen B. Thistlethwaite (Thistlewaite, 1981) para armar el cubo, y el cual permite fragmentar el procedimiento de búsqueda en cuatro etapas, como se explicará en la Sección 3. El artículo se ha dividido en dos partes. En la primera hacemos una discusión a fondo de la estructura del grupo de permutaciones asociado al cubo, en términos de una filtración por subgrupos

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \{Id\},$$

asociada a cada una de las etapas del algoritmo. En la segunda parte del artículo se presenta en detalle el algoritmo evolutivo de solución.

El propósito de este artículo ha sido doble. Por un lado, se pretende ilustrar cómo los métodos de la teoría elemental de grupos pueden usarse para determinar la estructura del grupo asociado al cubo de Rubik, y de los cuales se deriva como corolario la existencia de algoritmos para su solución. Por otro lado, se pretende mostrar una aplicación de la *teoría estocástica de búsqueda local* a un problema del álgebra abstracta. El lector puede encontrar una discusión completa de todos los conceptos básicos de la teoría de grupos en cualquier texto estándar de álgebra, por ejemplo Lang (1992).

En la siguiente sección haremos un análisis detallado de la estructura algebraica del cubo. A pesar de ser bien conocida su estructura algebraica, hemos querido dar un tratamiento completo del álgebra involucrada, debido a que, por un lado no hemos encontrado una referencia adecuada que nos permita analizar la estructura del cubo en términos de la filtración mencionada más arriba, y por otro, debido a que muchos de los movimientos presentados en este artículo son originales. Esperamos también que una presentación autocontenida facilite al lector la comprensión del algoritmo presentado.

2. ESTRUCTURA DEL GRUPO ASOCIADO AL CUBO

Usaremos la siguiente notación con el propósito de codificar cada uno de los lados del cubo, así como sus vértices y aristas (alternativamente, véase Singmaster (1981)). Los lados del cubo se denotarán por D = Cara derecha, I = Cara izquierda, F = Cara frontal, P = Cara posterior, S = Cara superior, U = Cara de abajo o cara inferior. Todos los movimientos se tomarán en el sentido contrario al reloj (sentido positivo), cuando la cara se mira desde su frente. Un movimiento corresponderá a un cuarto de giro, y la composición de movimientos se denotará de izquierda a derecha, en el sentido corriente de la escritura. A cada arista se le denotará por $[a, i, j]$ y a cada vértice por $[v, i, j]$, como se muestra en la figura “Notación en el cubo” de la tabla al final del artículo.

Denotemos por X la unión del conjunto de vértices y el conjunto de aristas $X = V_{24} \cup A_{24}$:

$$\begin{aligned} V_{24} &= \{[v, i, j] : i = 1, \dots, 8, j = 0, 1, 2\}, \\ A_{24} &= \{[a, i, j] : i = 1, \dots, 12, j = 0, 1\}. \end{aligned}$$

El grupo del cubo, G , es por definición el subgrupo de $S(V_{24}) \times S(A_{24})$ ($S(Y)$ denota el conjunto de biyecciones en el conjunto Y , con la operación de composición de funciones) generado por las siguientes permutaciones, que corresponderán a cada uno de los movimientos S, F, D, I, U, P .

$$\begin{aligned} S([v, 1, j]) &= [v, 2, j], & S([a, 1, j]) &= [a, 2, j], \\ S([v, 2, j]) &= [v, 3, j], & S([a, 2, j]) &= [a, 3, j], \\ S([v, 3, j]) &= [v, 4, j], & S([a, 3, j]) &= [a, 4, j], \\ S([v, 4, j]) &= [v, 1, j], & S([a, 4, j]) &= [a, 1, j], \end{aligned}$$

donde los vértices y aristas restantes quedan fijos.

$$\begin{aligned} F([v, 1, j]) &= [v, 4, j + 1 \bmod 3], & F([a, 1, j]) &= [a, 5, j], \\ F([v, 4, j]) &= [v, 8, j + 2 \bmod 3], & F([a, 5, j]) &= [a, 10, j], \\ F([v, 8, j]) &= [v, 5, j + 1 \bmod 3], & F([a, 10, j]) &= [a, 6, j], \\ F([v, 5, j]) &= [v, 1, j + 2 \bmod 3], & F([a, 6, j]) &= [a, 1, j], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D([v, 1, j]) &= [v, 5, j + 2 \bmod 3], & D([a, 2, j]) &= [a, 6, j + 1 \bmod 2], \\ D([v, 5, j]) &= [v, 6, j + 1 \bmod 3], & D([a, 6, j]) &= [a, 11, j + 1 \bmod 2], \\ D([v, 6, j]) &= [v, 2, j + 2 \bmod 3], & D([a, 11, j]) &= [a, 7, j + 1 \bmod 2], \\ D([v, 2, j]) &= [v, 1, j + 1 \bmod 3], & D([a, 7, j]) &= [a, 2, j + 1 \bmod 2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I([v, 3, j]) &= [v, 7, j + 2 \bmod 3], & I([a, 4, j]) &= [a, 8, j + 1 \bmod 2], \\
 I([v, 7, j]) &= [v, 8, j + 1 \bmod 3], & I([a, 8, j]) &= [a, 9, j + 1 \bmod 2], \\
 I([v, 8, j]) &= [v, 4, j + 2 \bmod 3], & I([a, 9, j]) &= [a, 5, j + 1 \bmod 2], \\
 I([v, 4, j]) &= [v, 3, j + 1 \bmod 3], & I([a, 5, j]) &= [a, 4, j + 1 \bmod 2].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U([v, 5, j]) &= [v, 8, j], & U([a, 9, j]) &= [a, 12, j], \\
 U([v, 8, j]) &= [v, 7, j], & U([a, 12, j]) &= [a, 11, j], \\
 U([v, 7, j]) &= [v, 6, j], & U([a, 11, j]) &= [a, 10, j], \\
 U([v, 6, j]) &= [v, 5, j], & U([a, 10, j]) &= [a, 9, j].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P([v, 2, j]) &= [v, 6, j + 2 \bmod 3], & P([a, 3, j]) &= [a, 7, j], \\
 P([v, 6, j]) &= [v, 7, j + 1 \bmod 3], & P([a, 7, j]) &= [a, 12, j], \\
 P([v, 7, j]) &= [v, 3, j + 2 \bmod 3], & P([a, 12, j]) &= [a, 8, j], \\
 P([v, 3, j]) &= [v, 2, j + 1 \bmod 3], & P([a, 8, j]) &= [a, 3, j].
 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que los vértices y las aristas se reducen a un punto, que llamaremos su *cubículo* o lugar en el cubo (véase figura N en la tabla al final del artículo). El grupo G actúa en forma natural sobre este conjunto permutando entre sí los cubículos que corresponden a los vértices y aristas. Denotemos este conjunto por $V_8 \cup A_{12}$, donde vértices y aristas son numerados como se indica a continuación:

$$V_8 = \{[v, 1], \dots, [v, 8]\} \text{ y } A_{12} = \{[a, 1], \dots, [a, 12]\}.$$

La acción de cada permutación sobre el cubículo $[v, i]$ o $[a, i]$ se obtiene omitiendo la tercera componente, “ j ”, de $[v, i, j]$ y de $[a, i, j]$. Así, por ejemplo, $I([v, 3]) = [v, 7]$ e $I([a, 4]) = [a, 8]$. La acción de G en $S(V_8) \times S(A_{12})$ es entonces un homomorfismo

$$\psi : G \longrightarrow S(V_8) \times S(A_{12}),$$

cuyo núcleo consiste en todas las permutaciones de G que dejan todos los vértices y aristas del cubo en su mismo lugar o cubículo y que sólo tienen el efecto de rotar algunos vértices e intercambiar los colores de algunas aristas. Notemos además que la imagen de ψ sólo alcanza permutaciones pares de $S(V_8) \times S(A_{12})$, ya que cada generador de G es enviado en una permutación par. Por ejemplo, S es enviado en la permutación, que escrita en ciclos sería:

$$S = [[v, 1], [v, 2], [v, 3], [v, 4]] [[a, 1], [a, 2], [a, 3], [a, 4]],$$

y que es el producto de dos 4-ciclos. Denotemos por

$$A(V_8 \times A_{12}) \subset S(V_8) \times S(A_{12}),$$

el conjunto de todas las permutaciones pares. Como se verá más adelante, la imagen de ψ alcanza todo este conjunto, así que

$$|G|/|\text{Ker}(\psi)| = |A(V_8 \times A_{12})| = \frac{1}{2}8!12!.$$

Determinemos el núcleo de ψ . Para ello imaginemos primero que todos los vértices del cubo se pintan de color blanco y cada arista $[a, i]$ se pinta de blanco y negro. De color blanco pintamos el lado $[a, i, 0]$, y de negro el lado $[a, i, 1]$.

Sobre este cubo blanco-negro (véase la figura “Cubo Blanco-Negro” de la tabla al final del artículo), G actúa en forma natural y obviamente las jugadas de G no producen ningún cambio sobre los vértices (que son indistinguibles unos de otros ya que todos son blancos) y sólo afectan a las aristas, intercambiando posiblemente los colores de sus lados. Con el propósito de describir la acción de G sobre este cubo blanco-negro, BN, codifiquemos cada estado del cubo con una 12-tupla (vector) v con entradas en \mathbb{Z}_2 , de la siguiente manera: en la posición i -ésima de v colocamos un cero, si la arista que ocupa el cubículo i -ésimo tiene su lado $[a, i, 0]$ pintado de blanco, (y por tanto $[a, i, 1]$ de negro) y un uno, si $[a, i, 0]$ está pintado de negro (y por tanto $[a, i, 1]$ de blanco). En otras palabras, v tiene un cero en la posición i -ésima si y sólo si la arista i -ésima tiene los colores como en el cubo original, y un uno si los tiene al contrario.

Para determinar la acción de un elemento $\sigma \in G$ supongamos que la arista r -ésima es enviada en la arista i -ésima. Puede ocurrir entonces que $\sigma([a, r, 0]) = [a, i, 0]$, o que $\sigma([a, r, 0]) = [a, i, 1]$. En el primer caso hacemos $(\sigma v)(i) = v(r)$ y en el segundo hacemos $(\sigma v)(i) = v(r) + 1 \pmod{2}$. Por ejemplo, las jugadas, S, F, P, U dejan fijo el vector v_0 , que corresponde al cubo blanco-negro original mientras que el efecto de D e I sobre este mismo vector es:

$$Dv_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \quad Iv_0 = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Definición Diremos que un elemento $\sigma \in G$ deja fija la orientación de las aristas si σ fija v_0 . Definimos la orientación total de aristas de un vector v como la suma de sus componentes, mod 2.

Proposición 2.1. Sea σ una permutación cualquiera de G . Entonces σv_0 tiene orientación total de aristas igual a cero.

Demostración Basta ver que para cada generador de G la proposición es cierta. Sea v un vector de \mathbb{Z}_2^{12} con paridad cero. Si σ es uno cualquiera de los elementos S, U, F, P , la acción de σ sobre v permuta los ceros y unos de v y por tanto no cambia la paridad. Por otro lado, D tiene el efecto de permutar cíclicamente las entradas 2, 6, 11, 7 de v y luego sumar 1 a cada una de estas entradas, y permutar entre sí las posiciones restantes. Por tanto la suma de las entradas de v se aumenta en $4 \equiv 0 \pmod{2}$, es decir, no cambia. En forma similar se demuestra que I no afecta la paridad total de v . \square

Veamos ahora el efecto de cada jugada sobre la orientación de los vértices. Como se puede ver en la figura 0, cada vértice tiene caras numeradas 0, 1, 2. Si imaginamos que cada una de las caras 0, 1 y 2 de cada vértice se colorea de amarillo, azul y rojo, y las aristas se dejan en blanco, entonces G actúa en forma natural sobre este cubo, que llamaremos AAR, donde cada jugada tiene el efecto de rotar cada vértice, 120 grados o 240 grados, en sentido antihorario y claramente no tienen ningún efecto sobre las aristas. Cada uno de los posibles estados de este cubo puede codificarse mediante un vector w de \mathbb{Z}_3 , con 8 entradas, (una por vértice) donde la entrada i -ésima es 0, si los colores del vértice $[v, i, 0]$, $[v, i, 1]$ y $[v, i, 2]$ son como en el cubo AAR original, es decir, si son, amarillo, azul y rojo, respectivamente, o esta entrada es 1, si estos aparecen rotados 120 grados, y 2 si aparecen rotados 240 grados.

Se verifica fácilmente que el efecto de cada $\sigma \in G$ sobre un vector cualquiera w es el siguiente: supongamos que el vértice r -ésimo es enviado en el i -ésimo. Puede ocurrir entonces que $\sigma([v, r, j]) = [v, i, j]$, o puede ocurrir que $\sigma([v, r, j]) = [v, i, j + 1]$ o que $\sigma([v, r, j]) = [v, i, j + 2]$ para cada valor de $j = 0, 1, 2$ (la suma de la tercera componente se hace en \mathbb{Z}_3). En cada caso hacemos $(\sigma w)(i) = j$, $(\sigma w)(i) = j + 1$, $(\sigma w)(i) = j + 2$, respectivamente. Por ejemplo, si $w_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ corresponde al cubo original AAR, el efecto de F sobre w_0 es igual a

$$Fw_0 = (2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 2).$$

Definimos la *orientación* de cada w como la suma, mod 3, de todas las entradas de w . Con esta definición tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Si σ es un elemento cualquiera de G entonces la orientación total de vértices de σw_0 es cero.*

Demostración. Sea w un vector cualquiera. Basta mostrar que cada una de las jugadas S, F, D, I, U, P que generan G no cambian la orientación total de vértices de w . Las jugadas S y U permutan cíclicamente las entradas 1, 2, 3, 4 de w (respectivamente las entradas 5, 8, 7, 6 de w), y por tanto no cambian la suma total, mod 3, de w . La jugada F permuta cíclicamente las entradas 1, 4, 8, 5 y luego le suma a cada una de ellas los valores 2, a la entrada 1, le suma 1 a la entrada 4, 2 a la entrada 8, y 1 a la entrada 5. En total la suma de las entradas de w se aumenta en $2 + 1 + 2 + 1 = 0$, mod 3, y por tanto la orientación total de vértices no cambia. Un razonamiento similar muestra que D, I y P tampoco alteran la orientación total. \square

Ahora supongamos que al cubo AAR le coloreamos sus aristas de blanco y negro como en el cubo BN. Cada posición de este cubo, que llamaremos simplemente ABN, se corresponde con un elemento de $\mathbb{Z}_2^{12} \times \mathbb{Z}_3^8$ cuya paridad total de aristas y de vértices es cero. El número de dichos vectores es $2^{11} \times 3^7$. Veamos que todas las posiciones que corresponden a estos vectores se alcanzan con elementos de G . El elemento

$$\text{Rot}_{\text{Arista}} \in G = \langle D, I, F, P, S, U \rangle$$

$$\begin{aligned} A &= F^{-1}DU^{-1}D^{-1} \\ B &= (P^2D^2)^3 \\ C &= D(S^2D^2)^3D^{-1} \\ \text{Rot}_{\text{Arista}} &= ABA^{-1}C \\ &= [[[a, 1, 0], [a, 1, 1]], [[a, 3, 0], [a, 3, 1]]] \end{aligned}$$

intercambia la orientación de las aristas $[a, 1]$ y $[a, 3]$ (véase figura 8 de la tabla al final del artículo). Por simetría del cubo es claro que cualquier otro intercambio de orientación de cualquier otro par de aristas opuestas que estén sobre una misma cara se puede lograr con jugadas de G . Por otro lado, dos aristas cualesquiera se pueden llevar a posiciones opuestas de una misma cara. Si σ logra este propósito, el conjugado de la rotación, $\sigma \text{Rot}_{\text{Arista}} \sigma^{-1}$ intercambiará la orientación de este par. Por ejemplo, para intercambiar la orientación de $[a, 1]$ y $[a, 6]$, el elemento $\sigma = D^2P^{-1}$ lleva a $[a, 6]$ a la posición de la arista $[a, 3]$, y por tanto

$$D^2P^{-1}\text{Rot}_{\text{Arista}}PD^{-2}$$

intercambia la orientación de estas dos aristas.

Ahora, si v es un vector de \mathbb{Z}_2^{12} con exactamente k entradas iguales a 1 (con k par y $0 \leq k \leq 12$), digamos que estas corresponden a las posiciones j_1, j_2, \dots, j_k , entonces *es posible encontrar una secuencia de elementos en G que lleven a v en v_0* . Basta para ello elegir movimientos que vaya intercambiando sucesivamente la orientación de los pares de aristas $(1, j_1), (1, j_2), \dots, (1, j_k)$, (si $j_1 = 1$ se comenzaría con la pareja $(1, j_2)$) y que por tanto cambian todos los unos que aparecen en las posiciones j_1, \dots, j_k , en ceros. Pero como la orientación total es cero, deberá también dejar un cero en la primera entrada. Por tanto todos los vectores con orientación de aristas igual cero (2^{11} en total) son alcanzables con elementos de G .

Por otro lado, el movimiento

$$\text{Rot}_V = XABQ = [[[v, 1, 0], [v, 1, 1], [v, 1, 2]], [[v, 7, 0], [v, 7, 2], [v, 7, 1]]],$$

donde

$$\begin{aligned}
 Z &= (FD^2U)^{18} \quad W = (FI^2S)^3 \quad X = (ZW)^4 \\
 A &= (FS^{-1}F^{-1})(S^{-1}F^2SF^2)^5(FSF^{-1}) \\
 B &= (U^2F)(D^2U^{-1}D^2U)^5(F^{-1}U^2) \\
 Q &= (D^2S^{-1}I^2F^2)(D^2PD^2P^{-1})^5(F^2I^2SD^2)
 \end{aligned}$$

rota los vértices $[v, 1]$ y $[v, 7]$ en las direcciones positiva y negativa (el vértice superior derecho rota $2\pi/3$ (120°) en el sentido positivo (contrario al reloj) y su diametralmente opuesto rota $-2\pi/3$, es decir, 120° en el sentido del reloj). Véase figura 9 al final del artículo. Por tanto

$$\text{Rot}_V(w_0) = (1, 0, 0, 0, 0, 2, 0).$$

Notemos además que Rot_V está contenido en el subgrupo generado por los movimientos S, U, D^2, I^2, F, P . Es fácil ver, usando la simetría del cubo, que mediante conjugación con *elementos de este subgrupo* es posible rotar dos vértices cualesquiera en sentidos opuestos, y por tanto, para cada vector $w \in \mathbb{Z}_3^8$ que tenga sólo dos entradas con valores 1 y 2, y el resto ceros, existe un $\alpha \in G$ tal que $\alpha w_0 = w$. En forma similar, y razonando como en el párrafo anterior, dado cualquier vector $w \in \mathbb{Z}_3^8$ con orientación total de vértices igual a cero, podemos encontrar una secuencia de movimientos que lleve w a w_0 .

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *El núcleo de $\psi : G \rightarrow A(V_8 \times A_{12})$ consiste de todos los elementos de G que dejan fijos los cubículos de aristas y vértices y por tanto sólo cambian posiblemente la orientación de pares de aristas y rotan algunos vértices, con rotación total igual a 2π . El número de elementos en $R = \text{Ker}(\psi)$ es exactamente $2^{11}3^7$, que es precisamente el número de elementos de la órbita de $v_0 \times w_0 \in \mathbb{Z}_2^{12} \times \mathbb{Z}_3^8$ bajo la acción de G .*

Observación 2.1. *Los movimientos como Rot_V o $\text{Rot}_{\text{arista}}$, así como los que aparecerán a lo largo de este artículo fueron obtenidos por los autores mediante el siguiente procedimiento. Se toman al azar combinaciones de movimientos, como por ejemplo $SD^2S^{-1}D^2$, y se encuentra su descomposición en ciclos disjuntos:*

$$\begin{aligned}
 [& [[a, 1, 0], [a, 2, 0], [a, 11, 0]], \\
 & [[a, 1, 1], [a, 2, 1], [a, 11, 1]], \\
 & [[v, 1, 0], [v, 2, 0], [v, 5, 0], [v, 6, 0], [v, 4, 0]], \\
 & [[v, 1, 1], [v, 2, 1], [v, 5, 1], [v, 6, 1], [v, 4, 1]], \\
 & [[v, 1, 2], [v, 2, 2], [v, 5, 2], [v, 6, 2], [v, 4, 2]] \quad]
 \end{aligned}$$

Elevar este producto a la quinta potencia tiene el efecto de cancelar todos los cinco ciclos de vértices y dejar solamente dos tres-ciclos de aristas:

$$(SD^2S^{-1}D^2)^5 = [[[a, 1, 0], [a, 11, 0], [a, 2, 0]], [[a, 1, 1], [a, 11, 1], [a, 2, 1]]]$$

Este método por ensayo y potencias nos permite obtener jugadas en el cubo que tienen el efecto de mover solamente un número muy pequeño de caras, y que por tal razón resultan ser muy útiles para nuestro análisis.

Denotemos por $G_1 = \langle S, U, D^2, I^2, F, P \rangle$ el subgrupo generado por los movimientos S, U, D^2, I^2, F, P , por G_2 al subgrupo generado por

$$G_2 = \langle S, U, D^2, I^2, F^2, P^2 \rangle$$

y por G_3 el subgrupo generado por

$$G_3 = \langle S^2, U^2, D^2, I^2, F^2, P^2 \rangle.$$

Sea O el estabilizador de $v_0 \times w_0$, es decir,

$$O = \{ \sigma \in G : \sigma(v_0 \times w_0) = v_0 \times w_0 \},$$

es el conjunto de elementos σ de G que dejan fija la orientación de vértices y aristas. Sean O_V y O_A los estabilizadores de w_0 y v_0 , respectivamente, es decir, los subgrupos formados por todos los elementos de G que fijan la orientación de los vértices y las aristas. Es claro entonces que $O_V \cap O_A = O$ y se verifica fácilmente que $G_1 \subset O_A$ y $G_2 \subset O$. Nuestro objetivo es entender la estructura de G a través de estos subgrupos. Con esta notación tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *La restricción $\psi|_{G_1} : G_1 \rightarrow A(V_8 \times A_{12})$, de ψ a G_1 , es sobreyectiva.*

Demostración. Para ello basta ver que $\psi(G_1)$ contiene a todo el subgrupo

$$A(V_8) \times A(A_{12}) \subset A(V_8 \times A_{12}),$$

ya que este subgrupo tiene índice dos en $A(V_8 \times A_{12})$, y la imagen de $\psi(G_1)$ claramente no está contenida en él, ya que S y U están en G_1 . Como $A(V_8)$ y $A(A_{12})$ son generados por tres-ciclos, basta ver que $\psi(G_1)$ contiene cualquiera de los tres-ciclos de aristas o de vértices. Los siguientes movimientos están todos en el subgrupo $G_2 = \langle S, U, D^2, I^2, F^2, P^2 \rangle \subset G_1$

$$\begin{aligned} \text{Tresciclo}_A &= (SD^2S^{-1}D^2)^5 \\ &= [[[a, 1, 0], [a, 11, 0], [a, 2, 0]], [[a, 1, 1], [a, 11, 1], [a, 2, 1]]]. \end{aligned}$$

(Véase la figura 10 de la tabla al final del artículo).

Tres-ciclo de aristas en la misma cara (sin rotación). (Véase figura 11 de la tabla al final del artículo).

$$\begin{aligned} \text{Tresciclo}'_A &= (I^2 U^2)(SD^2 S^{-1} D^2)^5 (U^2 I^2) \\ &= [[a, 1, 0], [a, 4, 0], [a, 2, 0]], [[a, 1, 1], [a, 4, 1], [a, 2, 1]]] \end{aligned}$$

Tres-ciclo de tres vértices (sin rotación). (Véase figura 12 de la tabla al final del artículo).

$$\begin{aligned} \text{Tresciclo}_V &= YK \\ &= [[v, 1, 0], [v, 3, 0], [v, 4, 0]], \\ &\quad [[v, 1, 1], [v, 3, 1], [v, 4, 1]], \\ &\quad [[v, 1, 2], [v, 3, 2], [v, 4, 2]]], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M &= SF^2 S^{-1} F^2 \\ R &= UF^2 U^{-1} F^2 \\ K &= D^2 RMD^2 \\ Y &= (I^2 U^2)(SD^2 S^{-1} D^2)^5 (U^2 I^2) \end{aligned}$$

Estos movimientos son tres-ciclos de aristas y vértices. Dejamos al lector verificar que es posible aprovechar la simetría del cubo para demostrar las siguientes afirmaciones.

1. *Conjugando con elementos de G_1 es posible alcanzar cualquier par de tres-ciclos cualesquiera de aristas. Es decir, todo tres ciclo de aristas (y por tanto $A(A_{12})$) está contenido en el conjunto $\{g_1 G_2 g_1^{-1} : g_1 \in G_1\}$.*
2. *Conjugando con elementos de G_2 es posible obtener cualquier tres ciclo de vértices (estos elementos bastan para generar el grupo alternante) y por tanto $A(V_8) \subset G_2$ □*

Ahora, $O \cap R = \{Id\}$, ya que si $\sigma \in O \cap R$ entonces σ fija todos los cubículos sin cambiar la orientación de aristas ni rotar ningún vértice y por tanto deberá ser la identidad. Por otro lado, si $\sigma \in G$, y si denotamos por $u = \sigma(v_0 \times w_0)$, como ya lo observamos, podemos encontrar un elemento de $r \in R$ tal que $r(v_0 \times w_0) = u$ y por tanto

$$(\sigma^{-1} r)(v_0 \times w_0) = v_0 \times w_0$$

de donde se sigue que $\sigma^{-1}r \in O$. De aquí que σ pueda escribirse en la forma $\sigma = ro^{-1}$, para un cierto elemento $o \in O$, y en consecuencia $G = RO$. Como R es normal en G (por ser el núcleo de un homomorfismo), se deduce entonces la validez del siguiente teorema.

Teorema 2.3. *G es el producto semidirecto “ \rtimes ” de R y O .*

Teorema 2.4. *$G = R \rtimes O$, y $\psi : O \rightarrow A(V_8 \times A_{12})$ es un isomorfismo. Por tanto $|O| = \frac{1}{2}8!12!$*

$$|G| = |R||O| = 2^{11}3^7 \frac{1}{2}8!12!$$

Demostración. Por el teorema anterior $\psi : G \rightarrow A(V_8 \times A_{12})$ es sobreyectiva, de lo cual se sigue que $G/R \simeq A(V_8 \times A_{12})$. Como $G = RO$ es claro que ψ restringida a O es sobreyectiva, y por tanto un isomorfismo, ya que $O \cap R = \{Id\}$. \square

Definamos ahora el homomorfismo

$$\varphi_0 : G \longrightarrow S(V_{24}) \times S(A_{12}),$$

la acción natural de G en $V_{24} \cup A_{12}$. Sea $R_A = \text{Ker}(\varphi_0)$. Este conjunto es precisamente el conjunto de todos los elementos $\sigma \in G$ tales que $\sigma([v, i, j]) = [v, i, j]$, es decir, σ fija los vértices completamente (los fija en sus cubículos sin rotarlos) y fija los cubículos de todas las aristas. De aquí que los elementos de R_A sólo puedan cambiar la orientación de algunas aristas sin moverlas de sus cubículos. Por tanto $R_A = R \cap O_V$. Como ya vimos, hay exactamente 2^{11} elementos en R_A , que corresponden a todos los posibles cambios de orientación de las aristas, conservando la orientación total de las aristas igual a cero. Si

$$\sigma \in O_A \cap R_A = O_A \cap R \cap O_V,$$

σ fija todos los vértices y aristas en sus cubículos y además preserva todas las orientaciones. Por tanto σ tiene que ser la identidad, de lo cual se sigue que $O_A \cap R_A = \{Id\}$. Si $\sigma \in G$ y $u = \sigma v_0$, como se vio más arriba, existe un elemento $\rho \in R_A$ tal que $\rho v_0 = u$. Por tanto $(\rho^{-1}\sigma)v_0 = \rho^{-1}u = v_0$ de donde se sigue que $\rho^{-1}\sigma \in O_A$. En consecuencia $G = R_A O_A$, y como $R_A \cap O_A = \{Id\}$, se tiene que $G = R_A \rtimes O_A$, lo cual demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *$O_A \cap R_A = \{Id\}$ y $G = R_A O_A$ de lo cual se sigue que G es el producto semidirecto $G = R_A \rtimes O_A$.*

Como ya habíamos notado, $G_1 \subset O_A$. El siguiente teorema nos muestra que estos dos subgrupos son iguales.

Teorema 2.6. *En G los subgrupos G_1 y O_A son iguales.*

Demostración. Sea $\psi : O_A \rightarrow A(V_8 \times A_{12})$ la restricción de ψ a O_A . Como $\psi(G_1) = A(V_8 \times A_{12})$ y $G_1 \subset O_A$ entonces

$$\psi(O_A) = \psi(G_1) = A(V_8 \times A_{12}).$$

De aquí se sigue entonces que para cada $o \in O$ existe un $g \in G_1$ tal que

$$og^{-1} \in R \cap O_A = R_V.$$

Por otro lado, como vimos en la Proposición 2.2, $R_V \subset G_1$ y en consecuencia $og^{-1} \in G_1$ y por tanto $o \in G_1$, como queríamos demostrar. \square

Llamemos al conjunto

$$C_4 = \{[a, 5, j], [a, 6, j], [a, 7, j], [a, 8, j], j = 0, 1\},$$

formado por las aristas $[a, 5, j], [a, 6, j], [a, 7, j]$ y $[a, 8, j]$, $j = 0, 1$, la *rebanada central del cubo*, y denotemos por $C_4 \subset G$ el subgrupo de todos los movimientos $g \in G$ tales que $g(C_4) \subset C_4$. Se verifica con facilidad que $G_2 \subset C_4$. El siguiente teorema nos muestra la relación que existe entre G_2 y este subgrupo.

Teorema 2.7. *En el grupo G los elementos que envían la rebanada central en ella misma y preservan la orientación son precisamente los elementos de $G_2 = \langle S, U, D^2, I^2, F^2, P^2 \rangle$. Es decir, $O \cap C_4 = G_2$. Además, $G_2 \simeq A(V_8 \times C_4 \times A_8)$.*

Demostración. Cada elemento de C_4 permuta entre sí las aristas de la rebanada central y por tanto debe permutar entre sí los elementos del conjunto complemento en A_{12} , $A_8 = A_{12} - C_4$. En consecuencia, existe una acción natural de C_4 en la unión $V_8 \cup C_4 \cup A_8$, la cual proporciona un homomorfismo

$$\varphi_2 : C_4 \rightarrow A(V_8 \times C_4 \times A_8),$$

en el conjunto de permutaciones pares de $S(V_8) \times S(C_4) \times S(A_8)$.

Sea

$$\varphi_2 : C_4 \cap O \rightarrow A(V_8 \times C_4 \times A_8)$$

la restricción de este homomorfismo a $O \cap C_4$.

Como los generadores de G_2 están en C_4 , y además preservan la orientación, se sigue que $G_2 \subset O \cap C_4$. Ahora, si $\sigma \in \text{Ker}(\varphi_2)$ entonces σ fija los vértices y aristas en sus cubículos. Como además φ_2 preserva la orientación, se sigue entonces que σ es la identidad, y por tanto φ_2 es inyectivo.

Veamos ahora que

$$\varphi_2(G_2) = A(V_8 \times C_4 \times A_8).$$

Para ello demostraremos primero que $\varphi_2(G_2)$ contiene al subgrupo $A(V_8) \times A(C_4) \times A(A_8)$. Como se observó en el Teorema 2.2 $A(V_8) \subset \varphi_2(G_2)$. Para ver que $\varphi_2(G_2)$ contiene a $A(C_4) \times A(A_8)$, mostraremos que aún más es verdad:

Afirmación. Los siguientes elementos de $G_3 \subset G_2$ son suficientes para alcanzar a todo $A(C_4)$ y a todo $A(A_8)$, y por tanto $A(C_4) \times A(A_8) \subset \varphi_2(G_3)$.

1. Intercambio de pares de aristas (véase figura 13 de la tabla al final del artículo).
2. Cruz en una rebanada (véase figura 14 de la tabla al final del artículo)
3. Cruz en una cara (véase figura 1 de la tabla al final del artículo, $(I^2P^2U^2)(F^2D^2)^3(U^2P^2I^2)$).
4. La misma cruz en la cara inferior se logra con

$$\begin{aligned} H &= (I^2F^2S^2)(P^2D^2)^3(S^2F^2I^2) \\ &= [[[a, 9, 0], [a, 11, 0]], [[a, 9, 1], [a, 11, 1]], \\ &\quad [[a, 10, 0], [a, 12, 0]], [[a, 10, 1], [a, 12, 1]]] \end{aligned}$$

4b. Y la cruz en la cara frontal se logra con la jugada

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (I^2S^2P^2)(U^2D^2)^3(P^2S^2I^2) \\ &= [[[a, 1, 0], [a, 10, 0]], [[a, 1, 1], [a, 10, 1]], \\ &\quad [[a, 5, 0], [a, 6, 0]], [[a, 5, 1], [a, 6, 1]]] \end{aligned}$$

5. El movimiento $\mathfrak{D} = C(S^2F^2)^3$ intercambia aristas transversalmente (véase figura 2 en la tabla al final del artículo).
6. En forma similar (véase figura 3 en la tabla al final del artículo) intercambia un par de aristas de la cara inferior y dos de la cara frontal, transversales a estas.
7. El elemento $E = (S^2D^2)^3(D^2U^2)^3$ intercambia las aristas de la cara superior e inferior (véase figura 4 en la tabla al final del artículo)

$$\begin{aligned} E &= [[[a, 1, 0], [a, 3, 0]], [[a, 1, 1], [a, 3, 1]], \\ &\quad [[a, 10, 0], [a, 12, 0]], [[a, 10, 1], [a, 12, 1]]] \end{aligned}$$

8. El movimiento EFG produce un tres-ciclo en una de las rebanadas centrales (la izquierda derecha). (Véase figura 5 en la tabla al final del artículo).

Es fácil ver que los movimientos 1-8 y sus análogos obtenidos por simetría, así como sus conjugados, son suficientes para generar $A(C_4) \times A(A_8)$. Esta comprobación se le dejará al lector.

El subgrupo

$$H = A(V_8) \times A(C_4) \times A(A_{12})$$

tiene índice cuatro en $A(V_8 \times C_4 \times A_{12})$. Si demostramos que $1, S, SF^2S^{-1}$ están en clases laterales distintas de H en $A(V_8 \times C_4 \times A_{12})$, entonces, como $\varphi_2(G_2)$ contiene a $H, SH, SF^2S^{-1}H$, se seguirá que

$$\varphi_2(G_2) = A(V_8 \times C_4 \times A_{12}).$$

Pero S no está en H , debido a que S produce un 4-ciclo de vértices, que obviamente no es un elemento de $A(V_8)$. El elemento SF^2S^{-1} produce en la rebanada central una transposición de las aristas $[a, 5]$ y $[a, 6]$, y por consiguiente no es un elemento de $A(C_4)$, lo cual implica que $SF^2S^{-1} \notin H$. Ahora,

$$S^{-1}(SF^2S^{-1}) = F^2S^{-1}$$

no puede estar en H , ya que de lo contrario S^{-1} estaría, lo cual, como ya vimos, es imposible. Finalmente,

$$\varphi_2(G_2) = \varphi_2(O \cap C_4) = A(V_8 \times C_4 \times A_{12}),$$

y como φ_2 es inyectivo, se sigue que $O \cap C_4 = G_2$ y que $G_2 \simeq A(V_8 \times C_4 \times A_{12})$. \square

Observación 2.2. *No es difícil ver que de lo anterior se sigue que O está generado por $G_2 \cup \{f, p\}$, donde f y p denotan elementos cualesquiera tales que $F = F\rho_1$ y $p = P\rho_2$, con $\rho_1, \rho_2 \in R_V$. Es decir, f y p rotan las caras frontal y posterior sin cambiar la orientación de los vértices. Como F y P no cambian la orientación de las aristas, se tiene que $f, p \in O$. La razón es que $\psi(F) = \psi(f)$ y $\psi(P) = \psi(p)$, donde ψ es el homomorfismo definido en el teorema 2.4. Por tanto $\psi(O) = \psi(\langle G_2, f, p \rangle)$. Pero como $\langle G_2, f, p \rangle \subset O$ y ψ restringido a O es un isomorfismo, se sigue que $\langle G_2, f, p \rangle = O$.*

Un computo simple muestra que $f = XYZ$ con

$$\begin{aligned} X &= U^{-1}SFS^{-1}FSF^2S^{-1}F^2U, \\ Y &= F^2XF^2 \\ Z &= U^2P^2(FS^2F^3S^2)^5(P^2U^2) \end{aligned}$$

satisface las condiciones anteriores, ya que

$$\begin{aligned} f &= XYZ = \\ &= [[a, 1, 0], [a, 5, 0], [a, 10, 0], [a, 6, 0]], \\ &= [[a, 1, 1], [a, 5, 1], [a, 10, 1], [a, 6, 1]], \\ &= [[v, 1, 0], [v, 4, 0], [v, 8, 0], [v, 5, 0]], \\ &= [[v, 1, 1], [v, 4, 1], [v, 8, 1], [v, 5, 1]], \\ &= [[v, 1, 2], [v, 4, 2], [v, 8, 2], [v, 5, 2]] \quad]. \end{aligned}$$

En forma similar p puede escogerse como $p = ABC$, con

$$\begin{aligned} A &= U^{-1}SPS^{-1}PSP^2S^{-1}P^2U, \\ B &= P^2XP^2 \\ C &= U^2F^2(PS^2P^3S^2)^5(F^2U^2), \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 p = ABC = & \\
 & [[a, 3, 0], [a, 7, 0], [a, 12, 0], [a, 8, 0]], \\
 & [[v, 2, 0], [v, 6, 0], [v, 7, 0], [v, 3, 0]], \\
 & [[a, 3, 1], [a, 7, 1], [a, 12, 1], [a, 8, 1]], \\
 & [[v, 2, 1], [v, 6, 1], [v, 7, 1], [v, 3, 1]], \\
 & [[v, 2, 2], [v, 6, 2], [v, 7, 2], [v, 3, 2]]].
 \end{aligned}$$

Teorema 2.8. $O = \langle G_2, f, p \rangle$, donde f, p son los elementos definidos en el párrafo anterior. Además,

$$[O : G_2] = 3^2 \times 5 \times 11.$$

Demostración. Del teorema 2.4 y del teorema anterior se sigue que

$$[O : G_2] = \frac{\frac{1}{2}8!12!}{\frac{1}{2}8! \times 4! \times 8!} = 3^2 \times 5 \times 11.$$

□

Veamos ahora cómo es la estructura de G_3 . Por la Afirmación anterior,

$$A(C_4) \times A(A_8) \subset \varphi_2(G_3),$$

donde φ_2 es el homomorfismo que envía a C_4 en $A(V_8 \times C_4 \times A_{12})$. Denotemos por F_4, D_4 las rebanadas (frontal-posterior) y (derecha-izquierda) conformadas por las aristas

$$F_4 = \{[a, 1], [a, 3], [a, 10], [a, 12]\},$$

y las aristas

$$D_4 = \{[a, 2], [a, 4], [a, 9], [a, 11]\}.$$

Sean T_4 y T_4^* los tetraedros formados por los vértices:

$$\begin{aligned}
 T_4 &= \{[v, 1], [v, 3], [v, 6], [v, 8]\}, \\
 T_4^* &= \{[v, 2], [v, 4], [v, 5], [v, 7]\}.
 \end{aligned}$$

Ya habíamos observado que G_3 preserva a C_4 , y es fácil ver que también preserva a los conjuntos anteriores, es decir, $G_3(F_4) \subset F_4$, y similarmente con D_4, T_4, T_4^* . Como además cada elemento de G_3 es una permutación par (G_3 está generado por cuadrados), la acción natural de G_3 en

$$A(T_4 \times T_4^*) \times A(C_4 \times D_4 \times F_4)$$

define un homomorfismo

$$\varphi_3 : G_3 \longrightarrow A(T_4 \times T_4^*) \times A(C_4 \times D_4 \times F_4).$$

Este homomorfismo es *claramente inyectivo*. Con el propósito de analizar la estructura de G_3 , denotemos los vértices de T_4^* por $[v, 1^*], [v, 3^*], [v, 6^*], [v, 8^*]$. Sea Δ el subgrupo *diagonal* de $S(T_4) \times S(T_4^*)$, que consiste de todos los elementos de G_3 de la forma (σ, σ^*) , con $\sigma \in S(T_4)$ y $\sigma^* \in S(T_4^*)$, dos permutaciones esencialmente idénticas en T_4 y T_4^* . Dicho en forma más precisa, si $\sigma([v, j]) = [v, k]$, entonces σ^* tiene el mismo efecto en $[v, j^*]$, es decir, $\sigma^*([v, j^*]) = [v, k^*]$. Con esta notación, Δ se puede expresar como

$$\Delta = \{\gamma : \gamma = (\sigma, \sigma^*), \sigma \in S(T_4) \text{ y } \sigma^* \in S(T_4^*)\}.$$

Sean $\text{Klein} \subset S(T_4)$ y $\text{Klein}^* \subset S(T_4^*)$ los subgrupos de orden 4 de $S(T_4)$ y $S(T_4^*)$ formados por todas las permutaciones que son productos de dos transposiciones disjuntas de vértices. Sea

$$K = \text{Klein} \times \text{Klein}^* \subset S(T_4) \times S(T_4^*).$$

Con esta notación pasemos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *La acción natural de G_3 en $A(T_4 \times T_4^*) \times A(C_4 \times D_4 \times F_4)$ define un homomorfismo inyectivo*

$$\varphi_3 : G_3 \longrightarrow A(T_4 \times T_4^*) \times A(C_4 \times D_4 \times F_4),$$

cuya imagen es el subgrupo producto $\Delta \text{Klein} \times A(C_4 \times D_4 \times F_4)$, donde

$$\Delta \text{Klein} = \{(\sigma v, \sigma^*) : \sigma \in S(T_4) \text{ y } v \in \text{Klein}\},$$

es un subgrupo de índice 3 en $\varphi_3(G_3)$. De aquí que $|G_3| = 4! \times 4 \times (4!)^3/2$.

Demostración. Nuevamente, aunque un poco laborioso, no es difícil ver (similar a como se hizo anteriormente) que $\varphi_3(G_3)$ contiene a $A(C_4 \times D_4 \times F_4)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \varphi_3(S^2) &= ([v, 1], [v, 3])([v, 1^*], [v, 3^*]) \\ \varphi_3(D^2) &= ([v, 1], [v, 6])([v, 1^*], [v, 6^*]) \\ \varphi_3(I^2) &= ([v, 3], [v, 8])([v, 3^*], [v, 8^*]) \\ \varphi_3(U^2) &= ([v, 8], [v, 6])([v, 8^*], [v, 6^*]) \\ \varphi_3(F^2) &= ([v, 1], [v, 8])([v, 3^*], [v, 6^*]) \\ \varphi_3(P^2) &= ([v, 3], [v, 6])([v, 1^*], [v, 8^*]) \end{aligned}$$

De aquí se infiere fácilmente que $\varphi_3(G_3)$ contiene todas las permutaciones de la forma (τ, τ^*) , donde τ es una transposición, y por tanto $\Delta \subset \varphi_3(G_3)$.

Sea

$$\gamma = ([v, 3], [v, 6])([v, 3^*], [v, 6^*]) \in \Delta.$$

El elemento

$$\begin{aligned} \delta &= \varphi_3(F^2)\gamma \\ &= ([v, 1], [v, 8])([v, 3^*], [v, 6^*])([v, 3], [v, 6])([v, 3^*], [v, 6^*]) \\ &= ([v, 1], [v, 8])([v, 3], [v, 6]), \end{aligned}$$

pertenece a Klein. Conjugando con S^2 se obtiene

$$\varphi_3(F^2)\delta\varphi_3(F^2) = ([v, 1], [v, 6])([v, 3], [v, 8]) \in \varphi_3(G_3),$$

de lo cual se deduce que $\text{Klein} \subset \varphi_3(G_3)$. Finalmente, como $\text{Klein} \cap \Delta = \{Id\}$, se sigue que $|\Delta\text{Klein}| = 4! \times 4$, y como $|A(C_4 \times D_4 \times F_4)| = (4!)^3/2$, entonces $|G_3| = |\text{im}\varphi_3| = 4! \times 4 \times (4!)^3/2$.

□

3. ALGORITMO ESTOCÁSTICO

3.1. Descripción general

El algoritmo que se indica a continuación consiste de 4 etapas. En cada una de ellas el algoritmo procede de la siguiente manera: toma como entrada una lista de movimientos L y un entero n y comienza a generar, en forma aleatoria, listas ordenadas de jugadas, L_i , con una longitud que varía (también aleatoriamente) entre 1 y n . Cada uno de los elementos de la lista generada estará escogido en G, G_1, G_2 o G_3 , dependiendo de la etapa correspondiente: en la primera etapa las jugadas se escogen libremente en G , en la segunda en G_1 , y así sucesivamente. Esto garantiza, como se discutió más arriba, que una vez logrado la posición “objetivo” a la cual se pretende llegar en cada etapa, ésta se preserve en las etapas posteriores. Ahora, cada lista ordenada L' formada por todas los movimientos de L y a continuación los de L_i , $L' = L \cup L_i$, se evalúa mediante una función de evaluación, que mide cuán lejos se encuentra de la posición “objetivo” a la que se pretende llegar. Luego L se reemplaza por L' si y sólo si la evaluación de esta nueva lista tiene un valor más alto que el correspondiente a L . De esta forma el algoritmo va aproximándose en forma evolutiva a su meta.

3.2. Descripción de la primera etapa

En la primera etapa se parte de una posición arbitraria del cubo, que corresponde a haber efectuado el producto de los elementos de una lista de movimientos L , y la meta es llevar el cubo a una nueva posición en la que todas las aristas estén correctamente orientadas. Este paso involucra las subrutinas *evaluacion_oaristas*(L), que computa el número de aristas correctamente orientadas en

la posición del cubo que corresponde a haber efectuado el producto (de izquierda a derecha) de los elementos de la lista L . Claramente su valor máximo es 12.

La rutina $Best_oaristas(L, n)$ toma como entrada la lista L y una variable “tope” n y genera, en forma aleatoria, listas ordenadas L_i de movimientos en G , con una longitud que varía (también aleatoriamente) entre 1 y n , hasta encontrar una lista L' tal que

$$evaluacion_oaristas(L \cup L') > evaluacion_oaristas(L).$$

Esta rutina produce como salida la lista ordenada $L \cup L'$, conformada por los elementos de L seguidos de los elementos de L' .

```
paso1:=proc(L,n)
H:=L;
while (evaluacion_oaristas(H) <12) do
H:=Best_oaristas(H,n);
end do; RETURN(H); end proc;
```

3.3. Descripción de la segunda etapa

Como en la etapa anterior, la entrada consiste de L y n y el algoritmo retorna una nueva lista $L \cup L'$, tal que

$$\begin{aligned} &evaluacion_central(L \cup L') + evaluacion_overtices(L \cup L') > \\ &evaluacion_overtices(L) + evaluacion_central(L), \end{aligned}$$

en la que los elementos de L' son escogidos en G_1 . La función $evaluacion_central(L)$ computa el número de aristas de la rebanada central que quedan en esta rebanada (no necesariamente en sus correspondientes cubículos) después de efectuar el producto de los elementos de L . La función $evaluacion_overtices(L)$ computa el número de vértices que quedan orientados correctamente después de efectuar el producto de los elementos de L .

```
paso2:=proc(L,n)
while (evaluacion_central(H)+evaluacion_overtices(H) <12) do c:=c+1;
H:=Best_central_overtices(H,n);
end do; RETURN(H); end;
```

3.4. Descripción de la tercera etapa

Esta etapa se divide en dos pasos, a y b. En el primero se acomodan los vértices en sus correspondientes tetraedros (ver Teorema 2.9), y en el segundo se acomodan las aristas de las rebanadas frontal-posterior e izquierda-derecha. Cada una de las funciones evaluación mide la

distancia a la que se encuentra la posición del cubo que corresponde a efectuar los movimientos de la lista L . Todos los movimientos de esta etapa se escogen en el subgrupo G_3 .

```
paso3a:=proc(L,n)
K:=tetra(L,n);
end proc;

paso3:=proc(L,n)
H:=L;
while FDD(H) <12 do
H:=Best_FDD(H,n);
end do; RETURN(H); end;
```

3.5. Cuarta etapa

En esta última etapa se acomodan en sus cubículos todas las aristas y vértices del cubo y por tanto se llega a la posición de “armado”.

4. CONCLUSIONES

Los autores han implementado este algoritmo en el lenguaje de programación del paquete de cálculo simbólico Maple. Experimentalmente se ha visto que $n = 12$, como parámetro tope, acorta significativamente el tiempo total de ejecución. Por razones de espacio, hemos preferido dar una descripción general del algoritmo, y hemos omitido el código del mismo. Los tiempos de ejecución pueden variar de manera aleatoria, entre unos pocos minutos hasta varias horas, dependiendo del mayor o menor número de encuentros fortuitos con “pozos”, o posiciones de las cuales la probabilidad de “escapar”, esto es, de encontrar posiciones que obtengan un mayor puntaje bajo la función de evaluación, es poca. En versiones más recientes, los autores han complementado el algoritmo con información generada por el mismo programa. Esta información es acumulada en tablas, a manera de “memoria cultural”, la cual puede ser utilizada por el mismo programa en forma de atajos, lo que permite evitar algunos de estos pozos, y en consecuencia disminuir de manera significativa el tiempo total de ejecución.

5. TABLAS

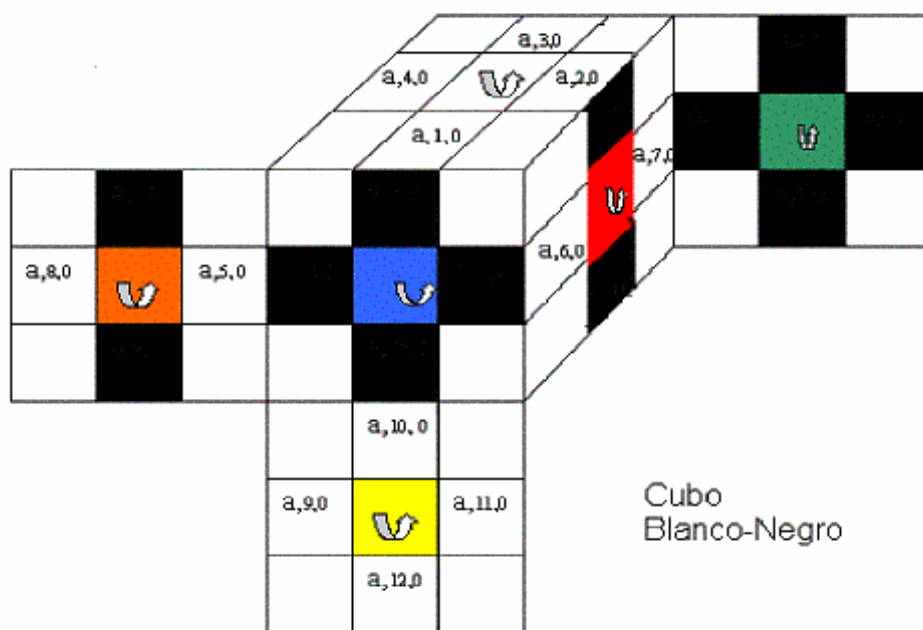
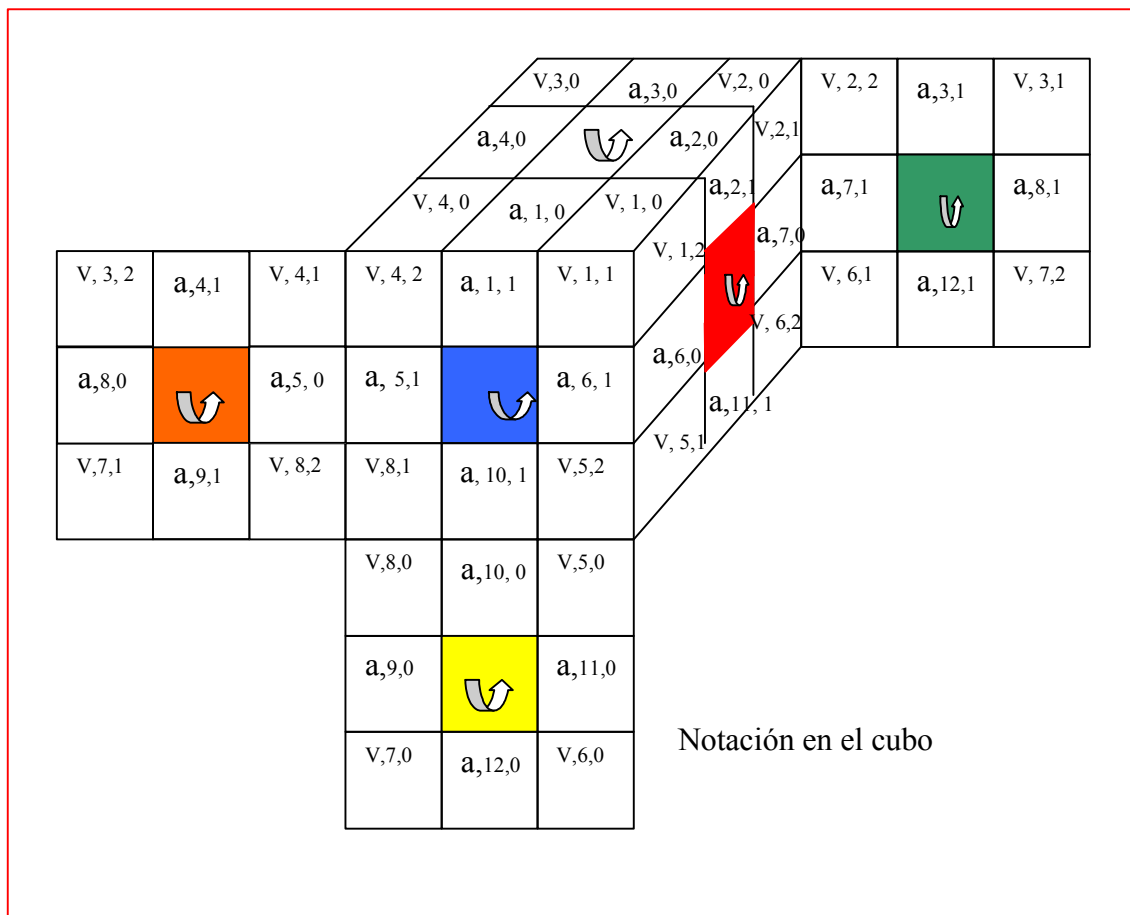


Tabla 1

<p>Figura N</p>	<p>Figura A</p>	<p>Figura B</p>	<p>Figura C</p>
<p>Figura 1</p>	<p>Figura 2</p>	<p>Figura 3</p>	<p>Figura 4</p>
<p>Figura 5</p>	<p>Figura 8</p>	<p>Figura 9</p>	<p>Figura 10</p>
<p>Figura 11</p>	<p>Figura 12</p>	<p>Figura 13</p>	<p>Figura 14</p>

Tabla 2

Referencias

Schwefel, H. P. (1995), Evolution and Optimum Seeking. *John Wiley & Sons, Inc.*

Thistlewaite, M. (1981), Thistlethwaite's Algorithm. *Scientific American*.

Lang, S. (1992), Algebra. *Addison-Wesley*.

Rubik's Official Page: <http://www.rubiks.com/>. Consultada: Enero de 2013

Kunkle, D., Cooperman, C. (ISSAC 2007), Twenty-Six Moves Suffice for Rubik's Cube. Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. *ACM Press*.

Singmaster, D. (1981), Notas sobre el cubo de Rubik. *Altalena, Madrid*.