Revista Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
V 2 N°2 diciembre 2013 • ISSN 0121-747X • Artículo Investigación
Páginas 43 a 52

INDICIOS DEL PAPEL PREPONDERANTE DEL ÁLGEBRA EN LA EMERGENCIA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

THE LEADING ROLE OF ALGEBRA IN THE HISTORICAL EMERGENCE OF ELLIPTIC FUNCTIONS

LEONARDO SOLANILLA [a], ANA CELI TAMAYO [b], GABRIEL PAREJA [c]

Recibido 10-21-2013, aceptado 12-26-2013, versión final 12-30-2013.
Artículo Investigación

RESUMEN: En el transcurso de un estudio sobre la emergencia del concepto de función elíptica en el siglo XIX hemos descubierto con sorpresa que el papel del Álgebra habría sido tanto, o quizás más importante, que el del mismo cálculo de las funciones complejas para el desenvolvimiento histórico de este campo de las Matemáticas. Para defender esta afirmación presentamos dos análisis. Uno de ellos se basa en las *Recherches* de Abel, el otro en los *Fundamenta nova* de Jacobi.

PALABRAS CLAVE: Abel, funciones elípticas, Jacobi, variable compleja.

ABSTRACT: As a result of an inquiry into the emergence of the notion of elliptic function in the 19th century, we have discovered, not without surprise, that the Algebra of those times could have played a more important role in the development of the field than Complex Function Theory. Here we give two examples of this disposition. They are taken respectively from Abel's *Recherches* and Jacobi's *Fundamenta nova*.

KEYWORDS: Abel, elliptic functions, Jacobi, complex analysis.

1. INTRODUCCIÓN

Nadie duda que hoy en día las funciones elípticas constituyan un subcampo disciplinar de la Variable Compleja. Así lo dejan ver los más reconocidos textos sobre la materia. Baste aquí con mencionar las populares presentaciones de Lang (1987) y Akhiezer (1990). Con esta perspectiva en mente, creímos conveniente, a manera de hipótesis para un proyecto investigativo, el intentar *establecer relaciones fundamentales entre la naciente teoría de las funciones de una variable compleja y la teoría de las funciones elípticas en la primera mitad del siglo XIX*. Sin embargo, la lectura de los trabajos originales de Legendre (1825), Abel (1827-1828)

[a] Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.
[b] Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín, Colombia.
email: actamayo@udem.edu.co
[c] Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín, Colombia.
email: gpareja@udem.edu.co

y Jacobi (1829) nos ha mostrado que el desarrollo del cálculo complejo era tan incipiente que su uso en los citados originales, si bien es correcto, es mínimo y no va acompañado de mayores explicaciones. Por el contrario, los mencionados autores hacen gala de los importantes desarrollos algebraicos de su época.

La situación en los albores del siglo XIX era muy particular: nacía una nueva álgebra y el Análisis se formalizaba. Se trataba, ciertamente, de una situación muy distinta de aquella que encontraron los pioneros de las integrales elípticas, allá en los siglos XVII y XVIII. Recordemos que dichas integrales tienen la forma $\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}dx$, donde $P(x)$ es una función racional cualquiera de x y $R(x)$ un polinomio de cuarto grado. En aquellos lejanos días,cuando los protagonistas eran los Bernoulli, el conde de Fagnano, Landen y Maclaurin, entre otros, ellas se interpretaban y enfrentaban desde contextos geométricos, tal como se muestra en Tamayo (2005). Euler y Lagrange edificaron luego una primera teoría de las integrales elípticas, que se basa en el estudio de las soluciones a la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx}{\sqrt{p(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{p(x)}} = 0$. Los pormenores del asunto se tratan, por ejemplo, en Pareja *et al.* (2010). Con ello quedó claro que la propiedad más importante de estas integrales es su fórmula de adicción $\varphi(z_1 + z_2) = \frac{\varphi(z_1)\varphi'(z_2)+\varphi'(z_1)\varphi(z_2)}{1+e^2c^2\varphi^2(z_1)\varphi^2(z_2)}$, donde e^2 y c^2 son constantes mayores que cero. El lector también puede remitirse a Bellachi (1894); allí encontrará una completísima presentación erudita de la historia de las funciones elípticas.

En la primera sección de este artículo se analiza la manera como Abel (1827-1828) y Jacobi (1829) abordan y utilizan la teoría de las funciones complejas de una variable compleja. Lo hacen de manera sucinta y sin detenerse demasiado a dar explicaciones. En la segunda sección, que defiende la hipótesis central de este trabajo, se analiza el uso y el tipo de álgebra que estos autores emplean dentro de sus teorías sobre las funciones elípticas. Se presentan entonces dos ejemplos que ilustran la prolijidad y el lujo de detalles de sus tratamientos algebraicos. Al final, se esbozan algunas conclusiones que surgen de estas reflexiones.

2. TRATAMIENTO DE LA VARIABLE COMPLEJA

Ciertamente, un Cálculo para las funciones complejas de una variable compleja, tal como lo tenemos hoy, no estaba disponible en la fecha de los artículos mencionados en el párrafo anterior. Por ello, el “cálculo complejo” que usan Abel y Jacobi al formular las primeras teorías de las funciones elípticas no es una teoría acabada sino, más bien, una colección de hechos válidos a los que se echa mano para obtener algunos resultados. En Abel (1827-1828) el procedimiento de extender la inversa de una integral elíptica a todos los reales se repite dos veces: una para el eje real, otra para el eje imaginario. Para definir la función en todo el plano complejo, se usa la fórmula de adición. En Jacobi (1829) la mencionada extensión en el eje real se lleva al eje imaginario mediante una interesante sustitución trigonométrica en los complejos. Los dos procedimientos son extremadamente simples y no presuponen mayores conocimientos sobre la derivada compleja o sobre los teoremas integrales de la Variable Compleja contemporánea.

2.1. Construcción de Abel

El punto de partida de Abel (1827-1828) es la integral elíptica real de la primera especie

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-c^2\zeta^2)(1+e^2\zeta^2)}},$$

donde $x \in \left[-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right]$ y $c^2, e^2 > 0$. En cuanto función de x, ella es inyectiva y, por tanto, es posible definir su inversa $\varphi = \psi^{-1}$ en el intervalo $\left[-\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right]$, con $\varpi/2 = \psi(1/c)$, cuya existencia está garantizada por la convergencia de la integral. Mediante las fórmulas de adición, que eran conocidas desde el siglo XVIII, Abel extiende la función φ a toda la recta real.

El eje imaginario del plano complejo es a todas luces una copia de la recta real y Abel repite la misma construcción con la integral

$$\psi(iy) = i\int_0^{iy} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1+c^2\zeta^2)(1-e^2\zeta^2)}}$$

donde $y \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ y i denota la unidad imaginaria. Esta vez la inversa $\varphi = \psi^{-1}$ está definida en $\left[-\frac{\tilde{\varpi} i}{2}, \frac{\tilde{\varpi} i}{2}\right]$, con $\tilde{\varpi} i/2 = \psi(i/e)$. El autor noruego no cree necesario dar ninguna explicación sobre la integral de línea compleja.

Con este procedimiento se tiene ya definida la función φ en los ejes real e imaginario. En seguida, ella se extiende a todo el plano complejo mediante la mencionada fórmula de adición (resaltamos el papel crucial que dicha fórmula juega en la construcción). Luego de contemplar con cuidado la función resultante, se puede establecer que

$$\phi(z + m\varpi + n\varpi i) = (-1)^{m+n}\phi(z), \forall m, n \in Z.$$

Se trata de un punto cumbre en la historia de las funciones elípticas: ellas poseen dos periodos independientes, a saber: $2\varpi, 2\tilde{\varpi} i$. En consecuencia, quedan definidas completamente por los valores que asumen en una región (paralelogramo) fundamental del plano complejo.

Ya en la parte final de su construcción, Abel anuncia que

Les formules (26) font voir qu'on satisfait aux trois équations

$$\varphi x = \frac{1}{0}, f(x) = \frac{1}{0}, Fx = \frac{1}{0},$$

en donnant à x une des valeurs de la forme

$$x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\varpi + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tilde{\varpi} i \qquad (30)$$

Or on peut démontrer que les équations en question n'ont pas d'autres racines

Esto quiere decir que las funciones elípticas de Abel poseen un polo en su paralelogramo fundamental. La verdad sea dicha, los polos son dos. Lo que sucede es que Abel se refiere a la mitad del paralelogramo. En verdad, eso es todo lo que se necesita porque la función elíptica restringida a dicho paralelogramo es dos-a-uno. Sin esta aclaración las funciones elípticas serían constantes, es decir triviales, en virtud del teorema de Liouville que se estudia en Variable Compleja. A pesar de ello, Abel se conforma con establecer la existencia de polos, sin preocuparse mucho por el estudio general de las funciones complejas diferenciables.

2.2. Construcción de Jacobi

De otro lado, Jacobi (1829) revela su gran conocimiento de la obra de Legendre al presentar la primera especie en su forma canónica trigonométrica

$$u(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

donde k es el módulo y $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. θ, en cuanto función, es la inversa de u y se llama amplitud. Este hecho se escribe como $\theta = \operatorname{am} u$. Las funciones elípticas de Jacobi se forman componiendo a esta función con las funciones circulares. Ellas son, entonces,

$$\sin \operatorname{am} u,\ \cos \operatorname{am} u,\ \tan \operatorname{am} u,\ \sec \operatorname{am} u,\ \csc \operatorname{am} u,\ \cot \operatorname{am} u.$$

Por comodidad notacional se incluye también a

$$\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u}$$

Las siguientes fórmulas de adición permiten extender las funciones elípticas jacobianas a todos los números reales:

$$\sin \operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\sin \operatorname{am} u\ \cos \operatorname{am} v\ \Delta \operatorname{am} v \pm \sin \operatorname{am} v\ \cos \operatorname{am} u\ \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u\ \sin^2 \operatorname{am} v}$$

$$\cos \operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\cos \operatorname{am} u\ \cos \operatorname{am} v \mp \sin \operatorname{am} u\ \sin \operatorname{am} v\ \Delta \operatorname{am} u\ \Delta \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u\ \sin^2 \operatorname{am} v}$$

$$\Delta \operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\Delta \operatorname{am} u\ \Delta \operatorname{am} v \mp \sin \operatorname{am} u\ \sin \operatorname{am} v\ \cos \operatorname{am} u\ \cos \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u\ \sin^2 \operatorname{am} v}$$

Con el propósito de definir el valor de las funciones elípticas para valores en el eje imaginario del plano de Argand, Jacobi recurre a la interesante sustitución $\sin \theta = i \tan \tau$. Entonces,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \tau} = \sec \tau$$

Así mismo, $d\theta = i \sec \tau d\tau$. Lo interesante aquí es la relación que se obtiene entre las formas diferenciales elípticas

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{i d\tau}{\sqrt{\cos^2 \tau + k^2 \sin^2 \tau}} = \frac{i d\tau}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \tau}}$$

De esta manera, las funciones elípticas se pueden extender al eje imaginario poniendo

$$\sin \operatorname{am}(iu, k) = i \tan \operatorname{am}(u, k')$$

$$\cos \operatorname{am}(iu, k) = \sec \operatorname{am}(u, k')$$

Esta nueva notación exige una explicación adicional. En primer lugar, se debe especificar el módulo con el que se trabaja, ya sea k, ya k'. En segundo lugar, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ se conoce como módulo conjugado de k.

Finalmente, las funciones elípticas de Jacobi se extienden a todo el plano complejo mediante las fórmulas de adición jacobianas.

La manera como culmina la construcción de Jacobi (1829, 86-87) es muy diciente de la naturaleza de sus ideas. A continuación transcribimos el aparte del que hablamos; su traducción aparece en el pie de página.

E formulispraecedentibus, quae et ipsaetamquam fundamentales in analysifunctionumellipticarumconsideraridebent, elucet:

a) *functionesellipticasargumentiimaginariiiv, moduli k, transformari posse in alias argumenti realis v, moduli* $k' = \sqrt{1-k^2}$. *Unde generaliter functiones ellipticas argumenti imaginarii* $u + iv$, *moduli k, componere licet e functionibus ellipticis argumenti u, moduli k, et aliis argumenti v, moduli* k'.

b) *functionesellipticasduplicigaudere periodo, altera reali, altera imaginaria, siquidemmodulusk est realis. Utraque fit imaginaria, ubi modulus et ipse est imaginarius.Quod principium duplicis periodi nuncupabimus. E quo, cum universam, quae fingi potest, amplectatur periodicitatemanalyticam, elucetfunctionesellipticas no aliisadnumerideberetranscendentibus, quaequibusdamgaudentelegantis, fortassepluribus illas autmaioribus, sed speciemquandamiisinesseperfecti et absoluti.*

Al lector contemporáneo, a) y b) pueden producirle algo de vértigo. Hoy se prefiere tomar como punto de partida para la teoría los teoremas de Liouville, como en Lang(1987, 5). Ellos hacen obvia cualquier referencia a a). La parte b) es asimismo muy interesante. Akhiezer(1990, 2) la generaliza bajo el nombre de teorema de Jacobi. A propósito, Jacobi (1829) no da ninguna prueba de este hecho fundamental. Al igual que Abel, Jacobi conoce la existencia del polo que libra a las funciones elípticas de la trivialidad (Jacobi (1829, 86 (10.))). Sin embargo, tampoco parece caer en la cuenta de la importancia de este resultado.

3. TRATAMIENTO DE LOS ASUNTOS ALGEBRAICOS

Por el contrario, el Álgebra de la primera mitad del siglo XIX es un campo en plena floración. Los trabajos algebraicos de Gauss, Galois y del mismo Abel anuncian ya el Álgebra de nuestros días. En particular, en los dos ejemplos que se dan a continuación, ya se vislumbra la moderna teoría de las extensiones de los campos con sus extraordinarias relaciones con la Teoría de Grupos. Tanto Abel (1827-8) como Jacobi (1829) reflejan la riqueza de un nuevo campo matemático que había roto definitivamente con el álgebra renacentista. Son muchos los detalles que ellos dan y muy grande el bagaje teórico detrás de lo que explican. Veamos.

3.1. Bisección de un arco elíptico según Abel

Ya hemos mostrado la construcción que Abel utiliza en sus *Recherches sur les fonctionselliptiques*, Abel (1827-8), para obtener funciones meromorfas doblemente periódicas definidas en el plano complejo. Ellas son sus funciones elípticas, que hemos denotado mediante $\varphi(z)$. Uno de los ingredientes indispensables de su exitosa receta, es la célebre fórmula de adición

$$\varphi(z_1 + z_2) = \frac{\varphi(z_1)\varphi'(z_2) + \varphi'(z_1)\varphi(z_2)}{1 + e^2c^2\varphi^2(z_1)\varphi^2(z_2)}$$

Las cantidades reales e,c determinan la región fundamental de φ y no juegan un papel decisivo para el asunto algebraico que nos ocupa ahora. Si $z = z_1 = z_2$, se obtiene la fórmula para el argumento doble

$$\varphi(2z) = \frac{2\varphi(z)\varphi'(z)}{1 + e^2c^2\varphi^4(z)},$$

o, si se prefiere,

$$\varphi(z) = \frac{2\varphi\left(\frac{z}{2}\right)\varphi'\left(\frac{z}{2}\right)}{1 + e^2c^2\varphi^4\left(\frac{z}{2}\right)}$$

Ella permite encontrar $\varphi(z)$ cuando se conoce $\varphi(z/2)$. Sin embargo, Abel sabía que, en muchas aplicaciones geométricas de las integrales elípticas, el problema concreto es el inverso: determinar los valores de $\varphi(z/2)$

cuando se conoce $\varphi(z)$. En particular, este problema es sólo una pequeña parte de otro más grande que Abel se había propuesto resolver en detalle: demostrar que el teorema de Gauss sobre la división de los polígonos regulares (inscritos en una circunferencia) también se verificaba para la lemniscata. Este teorema aparece en la última parte de las *DisquisitionesArithmeticae*, Gauss (1801), junto con la afirmación de que lo propio se cumple para toda una clase de transcendentes que incluye la longitud de arco de la lemniscata.

Volviendo a nuestro camino, es decir a encontrar $\varphi(z/2)$ a partir de $\varphi(z)$, introducimos las funciones auxiliares de Abel $f(z) = \sqrt{1 - c^2\varphi^2(z)}$ y $F(z) = \sqrt{1 - e^2\varphi^2(z)}$ (de modo que $\varphi'(z) = f(z)F(z)$). Ellas satisfacen las siguientes relaciones con $\varphi(z/2)$, que se dejan entender también como sus "fórmulas de bisección".

$$f(z) = \frac{1 - 2c^2\varphi^2(z/2) - c^2e^2\varphi^4(z/2)}{1 + c^2e^2\varphi^4(z/2)}$$

$$F(z) = \frac{1 + 2e^2\varphi^2(z/2) - c^2e^2\varphi^4(z/2)}{1 + c^2e^2\varphi^4(z/2)}$$

En consecuencia,

$$1 + f(z) = \frac{2(1 - c^2\varphi^2(z/2))}{1 + c^2e^2\varphi^4(z/2)}$$

$$1 + F(z) = \frac{2(1 + ce^2\varphi^2(z/2))}{1 + c^2e^2\varphi^4(z/2)}$$

$$1 - f(z) = \frac{2c^2\varphi^2(z/2)(1 + e^2\varphi^2(z/2))}{1 + c^2e^2\varphi^4(z/2)}$$

$$F(z) - 1 = \frac{2e^2\varphi^2(z/2)(1 - c^2\varphi^2(z/2))}{1 + c^2e^2\varphi^4(z/2)}$$

$$\frac{F(z) - 1}{1 + f(z)} = e^2\varphi^2\left(\frac{z}{2}\right), \quad \frac{1 - f(z)}{1 + F(z)} = c^2\varphi^2\left(\frac{z}{2}\right)$$

De estas dos últimas igualdades se obtiene

$$\varphi\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1 - f(z)}{F(z) + 1}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{F(z) - 1}{1 + f(z)}}$$

Finalmente, usando las definiciones de $f(z)$, $F(z)$, se llega a

$$\varphi\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - c^2\varphi^2(z)}}{\sqrt{1 - e^2\varphi^2(z)} + 1}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{\sqrt{1 - e^2\varphi^2(z)} - 1}{1 + \sqrt{1 - c^2\varphi^2(z)}}}.$$

Con esto, hemos descubierto que $\varphi(z/2)$ se obtiene a partir de $\varphi(z)$ solamente mediante suma, resta, multiplicación y división por un número distinto de cero (hoy decimos operaciones de cuerpo); y extracción de raíces cuadradas. Esto quiere decir que se puede construir con regla y compás a partir de $\varphi(z)$, una vez se hayan construido las constantes c^2, e^2. De todos modos, hay que resaltar los trucos algebraicos que se han necesitado para probar este resultado.

3.2. Transformación elíptica de Jacobi de orden impar

En la primera parte de los *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Jacobi (1829), se elabora una teoría de las transformaciones integrales elípticas, que ya había trabajado minuciosamente Legendre (1825, incluso antes). Recordemos el gran aprecio que Jacobi sentía por la obra de Legendre.

Dicha teoría está organizada según el plan siguiente:

- Existen funciones racionales que transforman correctamente las formas diferenciales elípticas. Es decir, existen polinomios $u(x)$, $v(x)$ tales que la función $y = u(x)/v(x)$ produce
$$\frac{dy}{\sqrt{a' + b'y + c'y^2 + d'y^3 + e'y^4}} = \frac{dx}{w\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}},$$
para cierta función racional w, que puede elegirse convenientemente para que sea una constante.
- Este tipo de transformaciones permite reducir las formas diferenciales elípticas a la forma canónica de Legendre:
$$\frac{dy}{\sqrt{a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4}} = \frac{dx}{w\sqrt{(1-x)(1-kx^2)}},$$
para cierto módulo k.
- Por lo tanto, el problema se reduce a las transformaciones canónicas que alteran el módulo:
$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y)(1-\lambda y^2)}} = \frac{dx}{w\sqrt{(1-x)(1-kx^2)}}.$$
- El grado de una transformación es $max\{\operatorname{grad} u(x), \operatorname{grad} v(x)\}$. Ya que una transformación de grado $n \in Z^+$ se puede lograr mediante la composición de transformaciones de grado primo (correspondientes a los factores primos de n), basta considerar las de grado primo. La transformación de grado dos no ofrece dificultad alguna. Por ello, Jacobi se concentra en las transformaciones de grado (primo) impar.

En este punto, es importante desarrollar un algoritmo para determinar los coeficientes de los polinomios $u(x)$, $v(x)$. Para lograr el grado impar, se toman

$$u(x) = (a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \cdots + a_{2m+1}x^{2m})x = xF(x^2),$$
$$v(x) = 1 + b_2x^2 + b_4x^4 + \cdots + b_{2m}x^{2m} = G(x^2),$$

donde $m \in Z^+$. No es difícil ver que el método de Jacobi reduce el problema al estudio del sistema

$$\begin{array}{rclrcl} v(x) + u(x) & = & (1+x)A(x)^2, & v(x) - u(x) & = & (1-x)B(x)^2, \\ v(x) + \lambda u(x) & = & (1+kx)C(x)^2, & v(x) - \lambda u(x) & = & (1-kx)D(x)^2, \end{array}$$

donde $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ son polinomios. Por razones que serán claras enseguida, conviene agregar a este sistema como quinta igualdad a $y = u(x)/v(x)$.

La particularidad algebraica que queremos resaltar tiene que ver con las sustituciones que usa Jacobi para reducir y así, resolver, este sistema de ecuaciones. Ciertamente, el Álgebra de la primera mitad del siglo XIX anuncia ya la aparición del concepto de grupo. La solución se realiza en dos etapas:

1. En primer lugar, la sustitución $x \overset{ca}{\to} -x$, $y \overset{ca}{\to} -y$ (cambio de signo) convierte la primera ecuación en la segunda y la tercera en la cuarta. Esto reduce el sistema a
$$v(x) + u(x) = (1 + x)A(x)^2, \qquad v(x) - \lambda u(x) = (1 - kx)D(x)^2, \qquad y = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

2. En segundo lugar, la sustitución $x \overset{im}{\to} 1/kx$, $y \overset{im}{\to} 1/\lambda y$ (inversión con módulo) reduce aún más el sistema a
$$v(x) + u(x) = (1 + x)A(x)^2, \quad y = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Esta simplificación adicional conduce, luego de cierto trabajo algebraico, a una relación entre los coeficientes de $u(x)$ y $v(x)$:
$$a_i = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \times \frac{b_{2m+1-j}}{k^{m+1-j}}, \qquad i = 1, 3, ..., 2m - 1.$$

Está última relación es lo suficientemente potente para elucidar las relaciones entre los módulos k, λ y, a la vez, determinar los polinomios $u(x)$, $v(x)$. A continuación ilustramos el procedimiento para el caso más sencillo, es decir, para la transformación de tercer orden.

Cuando $m = 1$,
$$u(x) = (a_1 + a_3x^2)x, \qquad v(x) = 1 + b_2x^2.$$

También, el polinomio $A(x) = 1 + \alpha x$, donde α se debe encontrar. Por lo tanto,
$$v(x) + u(x) = (1 + x)A(x)^2 = 1 + (1 + 2\alpha)x + (2 + \alpha)\alpha x^2 + \alpha^2x^3.$$

De aquí,
$$a_1 = 1 + 2\alpha, \qquad b_2 = (2 + \alpha)\alpha, \qquad a_3 = \alpha^2.$$

Las relaciones entre los coeficientes arrojan
$$a_1 = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \times \frac{b_2}{k} \overset{sust}{\iff} 1 + 2\alpha = \frac{(2 + \alpha)\alpha}{\sqrt{k\lambda}},$$
$$a_3 = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \times \frac{1}{k^{-1}} \overset{sust}{\iff} a^2 = \sqrt{\frac{k^3}{\lambda}}.$$

Así pues, los coeficientes de los polinomios $u(x)$, $v(x)$ quedan resueltos como funciones de k, λ. Sólo resta encontrar la relación entre estos módulos. Esto se hace fácilmente al notar que
$$1 + 2\alpha = \frac{(2 + \alpha)\alpha}{\sqrt{k\lambda}} \overset{sust}{\iff} \frac{\sqrt[4]{\lambda} + 2(\sqrt[4]{k})^3}{\sqrt[4]{\lambda}} = \frac{\left(2 + \sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}}\right)\sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}}}{\sqrt{k\lambda}} = \frac{\sqrt[4]{k}(2\sqrt[4]{\lambda} + (\sqrt[4]{k})^3)}{(\sqrt[4]{\lambda})^4}.$$

4. CONCLUSIONES

Las funciones elípticas de Abel y de Jacobi no se basan en una teoría de las funciones holomorfas complejas. Más bien, siguen dependiendo en su mayor parte del Análisis en los reales. Tanto Abel, quien repite una construcción estándar en dos copias de la recta real, como Jacobi, quien usa una sustitución trigonométrica compleja (pero de talante real), han decidido levantar sus edificios teóricos sobre los viejos pero seguros resultados de la variable real. De hecho, la integración por sustitución de Jacobi es un método predominantemente real. En este sentido, estos dos grandes analistas de la primera mitad del XIX dependen mucho todavía de la ecuación diferencial real fundamental $\frac{dx}{\sqrt{p(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{p(y)}} = 0$ (donde p denota un polinomio de cuarto grado) que había sido el objeto de estudio por excelencia para Euler y Lagrange en el siglo anterior. Este proceder es más claro en Jacobi, quien se restringe a buscar soluciones racionales a este problema diferencial. Abel se quita fácilmente este problema de encima, dado que toma prestados los resultados de Legendre.

Otra evidencia que soporta lo que afirmamos en el párrafo anterior es la preferencia de Abel y Jacobi por lo que podríamos llamar "identidades elípticas", dada su similitud con las identidades trigonométricas (que, por cierto, pueden verse como un caso particular de aquellas). En Abel, ellas toman la forma de consecuencias de la fórmula de adición para las funciones φ, f y F. En Jacobi, ellas son más parecidas a sus correspondientes trigonométricas y se expresan en términos de las funciones trigonométricas de la amplitud (funciones elípticas jacobianas). Una de las principales consecuencias de dichas identidades es la doble periodicidad de las funciones elípticas (abelianas o jacobianas) en el plano complejo.

El argumento anterior también apoya la preferencia de Abel y Jacobi por el Álgebra, terreno en el que se sentían más seguros. Con esta afirmación queremos significar lo que estos dos pensadores consideraban como terreno firme: un conjunto más o menos ordenado de propiedades aritméticas de las cantidades "reales", que se podían abstraer como manipulaciones algebraicas. De cierta manera, los dos se olvidan ya de lo analítico (entendido en referencia al Cálculo infinitesimal) y prefieren asumirlo como premisa. Con ello, asumen una actitud más cercana a algunos matemáticos de hoy, quienes privilegian los "aparatos demostrativos" que conducen rápida y casi automáticamente a muchos resultados.

El Álgebra usada por Abel y Jacobi contiene ya el embrión de la Teoría de Galois contemporánea. Claro está, ellos no usan nunca las nociones de grupo o cuerpo. Sin embargo, sus métodos no son equiparables a aquellos usados por los grandes algebristas del Renacimiento. Para el lector contemporáneo, sus resultados dependen de la existencia de ciertas cantidades invariantes bajo la acción de grupos convenientes, como es patente en el ejemplo de Jacobi de más arriba. En el ejemplo correspondiente a Abel, se prefiguran las extensiones cuadráticas de los campos, en el lenguaje de los algebristas de hoy (en la década de 1820 a 1830, no existía el concepto de extensión de un cuerpo). Es difícil saber la manera cómo pensaba Abel, pero sin duda estaba consciente de haber agregado a las fracciones una raíz cuadrada transcendente. Sin embargo, el lector que se aplique al estudio de su artículo encontrará también un interesante ejemplo sobre la constructibilidad por radicales y varias aplicaciones del concepto de acción de un grupo sobre el conjunto de raíces de una ecuación polinómica.

El ejemplo algebraico de Jacobi en la sección anterior es muy significativo y contiene prácticamente todo lo que se estudia en la primera parte de los *Fundamenta Nova*. Notemos solamente que la resolución del problema se deja descomponer en tres momentos:

a. Formulación: Se trata de determinar una función racional que realiza una transformación canónica de una forma diferencial elíptica. Esto es, se deben encontrar los coeficientes de dicha función racional.

b. Primera aproximación: Los mencionados coeficientes se determinan algebraicamente en función de los módulos k y λ. Los ingredientes esenciales de este procedimiento algebraico son ciertas simetrías elípticas.

c. Ecuación modular: Los posibles valores de k y λ son las soluciones de cierta ecuación que los relaciona. Con esto, se hallan las diversas funciones racionales que realizan la transformación elíptica.

Referencias

Abel, N. H. (1827-1828), Recherches sur les fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik2*, 3. Reimpreso en*Œuvres complètes, Tome I.* 1992. Sceaux : Éditions Jacques Gabay, 263–388; reimpresión autorizada de *Œuvres complètes de Niels Hendrik Abel.* 1881. Christiania : Grondahl & Son.

Akhiezer, N. I. (1990), *Elements of the Theory of Elliptic Functions.* Providence: American Mathematical Society. Traducción del original ruso por H. H. McFaden. 1970. Moscú: Nauka.

Bellachi, G. (1894), *Introduzione storica alla teoria delle funzione ellittice.* Firenze: Barberà.

Gauss, C. F. (1801), *Disquisitiones Arithmeticae.* Lipsiae (Leipzig): In commissis apud Gerh. Fleische.Reimpreso en *Werke, erster Band.* 1863. Göttingen : Herausgeben von der Königliche Gesellschaft für Wissenschaften. Traducción inglesa de Clarke, A. A. 1986. New York: Springer Verlag. Traducción española de Barrantes, H., Josephy, M. y Ruiz, A. 1995. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Jacobi, C. G. J.(1829), *Fundamenta nova theoriae functionumellipticarum.* Regiomonti: Sumptibusfratrum-Bornträger. Reimpreso en *GesammelteWerke.* 1882–1891. Berlin: Reiner.

Lang, S. (1987), *Elliptic Functions.* New York: Springer Verlag.

Legendre, A. M.(1825), *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes.* Paris: Imprimerie de Huzard-Courcier.

Pareja, G. A.; Solanilla, L.; Tamayo, A. C. (2010), *Integrales elípticas con notas históricas.* Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Tamayo, A. C. (2005), Geometría y Análisis en la historia temprana de las integrales elípticas. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Trabajo de Investigación en el Programa de Maestría en Educación con énfasis en la Enseñanza de las Matemáticas.