

UN MODELO PARA EL SISTEMA PENSIONAL DE RETIRO PROGRAMADO, CON TASAS DE RENDIMIENTO SEGÚN UNA CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

A MODEL FOR A PROGRAMMED RETIREMENT PENSION SCHEME, WITH INTEREST RATES ACCORDING TO A CONTINUOUS TIME MARKOV CHAIN

NORMAN GIRALDO ^a, DAVID ARANGO ^b

Recibido 05-06-2014, aceptado 04-08-2014, versión final 25-11-2014.

Artículo Investigación

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es estudiar varios aspectos del sistema de retiro programado, uno de los tres sistemas que conforman actualmente el RAI ó régimen de ahorro individual. Para este fin se desarrolla un modelo estocástico que describe la evolución de la reserva individual de un pensionado bajo este sistema, el cual permite responder algunos puntos claves acerca del funcionamiento del mismo. El modelo consiste en una ecuación diferencial estocástica que se resuelve mediante la aplicación de cálculo estocástico con semimartingalas. Una componente básica de la ecuación diferencial es un modelo para las tasas de interés con base en una cadena finita de Markov en tiempo continuo. Para implementar este modelo se estimaron sus parámetros por máxima verosimilitud a partir de una serie observada de rendimientos de un portafolio de cartera colectivas (fiducias). Se utilizó una modificación del método de Euler para solución aproximada de la ecuación, utilizando series simuladas de la cadena finita de Markov, con el fin de observar la dinámica de las reservas en el tiempo. Con base en estos resultados de simulación se calculó la distribución de los tiempos de paso a una renta vitalicia por valor de un salario mínimo, tal y como se especifica en la Ley, y se realizó una estimación de la evolución de los pagos en el sistema. Algunos comentarios se hacen con base en los ejemplos y los resultados obtenidos.

PALABRAS CLAVE: Cadenas de Markov, ecuaciones diferenciales estocásticas, sistemas de retiro programado, simulación, tiempos de primer arribo.

ABSTRACT: The aim of this work is to study several aspects of the programmed retirement scheme, one of the three systems that currently conform the RAI or private saving pension system. For this purpose a stochastic model that describes the evolution of the individual account of a pensioner under this system, which allows one to answer a few key points about its performance. The model consists of a stochastic differential equation which is solved by the application of stochastic calculus with semimartingales. A basic

^aProfesor Asociado, Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, email: ndgiral@unal.edu.co

^bMaestría en Estadística, Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

component of the differential equation is a model for the fund returns, based on a finite Markov chain in continuous time. To implement this model parameters were estimated by maximum likelihood from a series of observed yields a portfolio of collective portfolios (fiduciaries). A modification of Euler's method for approximated solution of the equation, using simulated series of a finite Markov chain, in order to observe the dynamics of the reserves, was implemented. Based on these simulated results the distribution of the first passage time to an annuity for an annual minimum wage, as specified by Law, was estimated, as well as an estimate of the evolution of the payments made in the system. Some comments are in order, on the basis of two examples and the results obtained.

KEYWORDS: Drawdown systems, Markov chains, first time arrival, simulation, stochastic differential equations.

1. INTRODUCCIÓN

El modelo para tasas de interés con base en una cadena finita de Markov en tiempo continuo (CFMC) se ha tratado en varios trabajos, por ejemplo en Borokov *et al.* (2003), Elliot and Koop (1999, sec. 9.8), Nielsen (2005), Norberg (1995) y Norberg (2003). El modelo CFMC se plantea como una alternativa en tiempo continuo a los modelos con base en Procesos de Wiener y Procesos de Difusión con Saltos. El modelo CFMC es un modelo markoviano de saltos, no contiene una parte continua. El interés en los modelos con saltos es que pueden reproducir el efecto de cambios inesperados en las tasas. Este trabajo desarrolla una aplicación a la modalidad pensional de retiro programado. Para la solución de los respectivos flujos de caja se utilizan resultados de cálculo con semimartingalas ya que el interés acumulado hasta el tiempo t con base en una CFMC denotada por δ_t , con $\Lambda_t = \int_0^t \delta_s ds$, es una semimartingala y la ecuación diferencial para el flujo de caja de los saldos, $V(t)$ corresponde a $dV_t = V_t d\Lambda_{t-}$. Con base en la solución de esta ecuación se plantean algoritmos de simulación del proceso V_t utilizando trayectorias simuladas de la cadena de Markov en tiempo continuo que describen la evolución de las tasas de rendimiento de un fondo. Con base en estas simulaciones se puede determinar de manera empírica la distribución de los tiempos de primer arribo a una barrera inferior que es el modelo para el proceso de paso a una renta vitalicia en el sistema de retiro programado. Asimismo se pudo determinar las trayectorias de los pagos anuales bajo este sistema. El objetivo de este trabajo es mejorar la comprensión del sistema de retiro programado para poder responder adecuadamente las inquietudes con relación a su funcionamiento.

La organización del artículo es la siguiente. En la sección 2 se definen conceptos actuariales necesarios: la distribución Gompertz-Makeham y las fórmulas para el cálculo de anualidades de vida a partir de los parámetros de esta distribución. En la sección 3 se discute el modelo de ecuación diferencial estocástica para la reserva del retiro programado. En la sección 4 se introduce la cadena de Markov en tiempo continuo, y se incorpora al modelo para encontrar una solución mediante el cálculo con semimartingalas. En la sección 5 se introduce el problema del tiempo de primer arribo a una barrera inferior y su relación con el paso a una renta vitalicia. También se define el proceso de pagos acumulados. En la sección 6 se introduce un procedimiento de estimación por máxima verosimilitud para estimar una cadena de Markov en tiempo continuo a partir de datos diarios de rendimientos observados de fondos de fiducias. En la sección 7 se define un procedimiento

para simulación de la ecuación diferencial estocástica. En la sección 8 se discuten dos ejemplos. En el primero se asume una tasa media constante durante la vida del pensionado(a). El segundo es un ejemplo más realista porque la tasa media cambia cada 10 años, disminuyendo entre 3 y 4 puntos porcentuales con relación al promedio fijo del ejemplo 1. En la sección 9 se presentan algunas conclusiones.

2. DISTRIBUCIONES DE SUPERVIVENCIA DE ANUALIDADES DE VIDA

Definición 2.1. Denotamos por X una variable aleatoria continua que represente el tiempo en años que habrá de vivir una persona recién nacida. La vida remanente de una persona de edad x se define como la variable condicional $T(x) = X - x | X > x$, con dominio $T(x) \in [0, \omega - x]$, donde ω es la edad máxima que sobrevive un ser humano. En este trabajo se asume $\omega = 110$.

La función de distribución acumulada de $T(x)$ está dada, con notación actuarial por:

$${}_tq_x := P(T(x) \leq t) = P(X \leq x + t | X > x), \quad t \in [0, \omega - x]. \quad (1)$$

Además, ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \mathbb{P}(T(x) \geq t)$, con ${}_0q_x = 0$. La función ${}_tp_x$ es clave para el cálculo de las rentas vitalicias. Depende del modelo de mortalidad humana que se adopte. En este trabajo consideramos el modelo Gompertz-Makeham. Se define especificando la función de intensidad de mortalidad, definida a continuación.

Definición 2.2. La intensidad de mortalidad de la variable $T(x)$ se define como la función

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T(x) < t + h | T(x) > t)}{h}, \quad 0 \leq t \leq \omega - x. \quad (2)$$

El valor $h \mu_{x+t}$ mide el riesgo de fallecer en un intervalo de tiempo $[t, t + h]$, con $h > 0$ muy pequeño, para una vida (x), dado que sobrevive t años. Se cumple la siguiente relación: ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$.

Definición 2.3. Se dice que $T(x)$ sigue una distribución Gompertz-Makeham con parámetros (a, b, c) si se cumple

$$\mu_{x+t} = a + b c^{x+t}, \quad (3)$$

con $a > 0$, $a + b > 0$, $c > 1$ y $0 \leq t < \omega - x$.

Introduciendo el cambio de parámetros $s = e^{-a}$, $g = \exp(-b/\ln(c))$, la probabilidad ${}_tp_x$ se expresa como ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = s^x g^{c^x (c^t - 1)}$. Una deficiencia de este modelo es que no cumple ${}_tp_x = 0$ para $t \geq \omega - x$.

Definición 2.4. El precio de la anualidad que paga a (x) mientras sobreviva, a una tasa continua, una unidad monetaria, calculada con base en una tasa continua de interés δ , y con base en una distribución específica para $T(x)$ está dada por el valor presente

$$\bar{a}_x := \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t} {}_tp_x dt. \quad (4)$$

En el caso de asumir para $T(x)$ una distribución Gompertz-Makeham, con parámetros (s, g, c) se puede calcular explícitamente \bar{a}_x utilizando la función Gamma-Incompleta $\Gamma(\alpha, z) = \int_z^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$; ver Mingari *et al.* (2006, ec.(10)):

$$\bar{a}_x = \frac{(-c^x \ln(g))^{-\frac{\ln(sv)}{\ln(c)}}}{g^{c^x \ln(c)}} \left\{ \Gamma\left(\frac{\ln(sv)}{\ln(c)}, -c^x \ln(g)\right) - \Gamma\left(\frac{\ln(sv)}{\ln(c)}, -c^\omega \ln(g)\right) \right\}, \quad (5)$$

donde $v = e^{-\delta}$. Es importante anotar que a partir de la fórmula (5) se comprueba directamente que

$$\lim_{t \uparrow \omega - x} \bar{a}_{x+t} = 0. \quad (6)$$

3. MODELO PARA EL SISTEMA DE RETIRO PROGRAMADO

Una Renta Vitalicia ó Anualidad de Vida es un contrato entre dos partes, similar a un Crédito ó a un Bono. En su figura básica, una de las partes (el Emisor) se compromete a realizar pagos periódicos, de acuerdo a una fórmula bien definida y la otra (el titular) aporta un capital en un solo contado ó en varios, como pago de una prima. Una renta vitalicia puede describirse mediante una ecuación diferencial lineal para la evolución de $V(t)$, la reserva, de la cual se descuentan los pagos a una tasa $B(t)$, y que se asume está invertida en un fondo con una tasa instantánea de rendimiento $\delta(t)$. La ecuación es:

$$V'(t) = \delta(t)V(t) - B(t). \quad (7)$$

El período del contrato es aleatorio, $0 \leq t \leq T(x)$. El valor $V(0)$ es el precio de la anualidad, y se asume dado. La tasa de pago ó tasa de consumo de la renta vitalicia es $B(t)$, la cual se asume una función de variación acotada en $[0, \infty)$, y tal que el pago durante un período $[t_1, t_2]$ está dado por $\int_{t_1}^{t_2} B(s)ds$.

La tasa instantánea de rendimiento, $(\delta(t), t \geq 0)$, se asume que es un proceso estocástico con valores en \mathbb{R} , con trayectorias de variación acotada, continuas a derecha con límite finito a izquierda. Es decir, se asume que es una semimartingala con posibilidad de tener trayectorias discontinuas con saltos. Tal que $\int_0^t V(s)\delta(s)ds$ se interpreta como los intereses generados en $[0, t]$. La solución de (7) se asume que cumple una condición $\mathbb{E}(V(T(x))) = 0$, la condición de frontera (o “de cierre”). Es útil anotar que si se reemplaza $B(t) \equiv 1$ en (7) con $\delta(t) \equiv \delta$, se obtiene, para $V(0)$ dada, y añadiendo la condición $\mathbb{E}(V(T(x))) = 0$, que $V(0) = \bar{a}_x$.

En el régimen pensional de ahorro individual RAI se plantea una expresión concreta para la tasa de consumo $B(t)$, definida por

$$B(t) = \frac{V(t)}{\bar{a}_{x+t}}. \quad (8)$$

Esta fórmula establece que la tasa de consumo es dependiente de la reserva y además, en cada tiempo t la tasa de consumo es el cociente entre la reserva y el capital necesario para pagar una renta vitalicia por una unidad monetaria, por ejemplo, el salario mínimo anual legal, a una vida de edad $x + t$. La ecuación (7) se transforma en

$$V'(t) = \left(\delta(t) - \frac{1}{\bar{a}_{x+t}} \right) V(t), \quad (9)$$

donde se asume $t \in [0, \omega - x]$, ya que el interés es estudiar la evolución de la reserva $V(t)$ para todo el ciclo vital de (x) . Definiendo $H(t) = \int_0^t \frac{1}{\bar{a}_{x+s}} ds$, $\Lambda(t) = \int_0^t \delta(s)ds$, esta última como integral sobre las trayectorias de una función de variación acotada, y $X(t) = \Lambda(t) - H(t)$, se probará que, dado el modelo para $\delta(t)$ y ciertas condiciones, la solución de (9) está dada por

$$V(t) = V(0)e^{X(t)}. \quad (10)$$

4. MODELO PARA LAS TASAS CON CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

Para resolver la ecuación (10) se introduce el modelo para $\delta(t)$ como una transformación de una cadena finita de Markov en tiempo continuo (CFMC), $Z = (Z(t), t \geq 0)$. Ver Cox and Miller (1965) para la notación y teoría sobre CFMC.

Una cadena finita de Markov en tiempo continuo es un proceso estocástico markoviano, $Z = (Z(t), t \geq 0)$, con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, \dots, d\}$, para $d > 0$ entero. Asociada a Z se dá una cadena finita de Markov en tiempo discreto que describe las probabilidades de transición entre los estados en \mathcal{S} , definida mediante una matriz de Markov $Q = [Q_{i,j}] \in \mathbb{R}^{d \times d}$, en la cual los elementos de la diagonal son ceros, $Q_{i,i} = 0$. Y se definen tiempos aleatorios $\tau_i > 0$ independientes, distribuídos exponencialmente, $\tau_i \sim \text{Exp}(q_i)$ tales que $\mathbb{E}(\tau_i) = 1/q_i$, los cuales definen el tiempo de permanencia de $Z(t)$ en cada estado $i \in \mathcal{S}$. La cadena Z se asume homogénea y sus probabilidades de transición están dadas por la matriz $\mathbb{P}(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, con

$$P_{i,j}(t) := \mathbb{P}(Z(t+h) = j | Z(h) = i). \quad (11)$$

La matriz $P(t)$ se asume que satisface una condición de continuidad en $t = 0$ con $P(t) \rightarrow I_d$ cuando $t \rightarrow 0+$, donde $I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es la matriz identidad. Además, $P(t)$ satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov,

$$P(t+s) = P(t)P(s), \quad t, s \geq 0. \quad (12)$$

La solución única de la ecuación funcional (12) es $P(t) = \exp(tq), t \geq 0$, donde $q = [q_{i,j}]$ es una matriz constante, denominada matriz generadora ó matriz de intensidades. Se puede demostrar que en este caso se cumplen las identidades siguientes.

$$q_{i,j} = \begin{cases} -q_i, & \text{si } i = j, \\ q_i Q_{i,j}, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (13)$$

Y por tanto se cumple $\sum_{j=1}^d q_{i,j} = q_i - q_i = 0$ y $q_{i,j} \geq 0, i \neq j$. La matriz q representa la cadena Z al contener sus parámetros básicos. El proceso $\delta(t)$ se define mediante la transformación

$$\begin{aligned} l : \mathcal{S} &\rightarrow \{\delta_1, \dots, \delta_d\} \\ i &\mapsto l(i) = \delta_i, \end{aligned} \quad (14)$$

donde las tasas $\delta_i \in (-1, 1)$, en orden ascendente, corresponden a ciertos rendimientos observados de un fondo, de manera que $e^{\delta_i} - 1$ son tasas efectivas anuales, con valores posiblemente negativos (en cuyo caso se tiene una afectación del capital invertido).

5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y SUS PROPIEDADES

Una vía para el planteamiento y solución de la ecuación diferencial para el flujo de caja de los saldos (10), es utilizar cálculo estocástico con semimartingalas, dado que el proceso de la cadena de Markov en tiempo

continuo es una semimartingala. En esta parte se utiliza Klebaner (2005, cap. 8). La ecuación (10) se reescribe con diferenciales como

$$dV(t) = V(t)dX(t-), \quad (15)$$

con $dX(t-) = (\delta(t-) - 1/\bar{a}_{x+t})dt$. La CFCM $\delta(t)$ es continua a derecha con límite finito a izquierda, y $\delta(t-) := \lim_{s \uparrow t} \delta(s)$. Si $X(t)$ es una semimartingala la solución única $V(t)$ de la ecuación (15) con $V(0) = 1$ se denomina la exponencial estocástica ó exponencial de Doléans-Dade. Asumiendo que $X(t)$ es semimartingala continua la solución de (15) está dada por (ver Klebaner Klebaner (2005, Th. 8.12))

$$V(t) = e^{X(t) - X(0) - \frac{1}{2}[X, X](t)}, \quad (16)$$

donde $[X, X](t)$ es el proceso de variación cuadrática de $X(t)$. De las propiedades del proceso $[X, X](t)$ (ver Klebaner Klebaner (2005, pag. 218)) se tiene que $[X, X](t)$ existe y es un proceso adaptado si $X(t)$ es una semimartingala.

De la definición en Klebaner Klebaner (2005, pag. 211) , $X(t)$ es semimartingala si cumple que es un proceso regular, con trayectorias continuas a derecha con límite finito a izquierda, que además satisface que puede ser representada como la suma de dos procesos $X(t) = X(0) + M(t) + A(t)$, donde $M(t)$ es una martingala local y $A(t)$ es un proceso de variación finita, con $M(0) = A(0) = 0$.

Se definió $H(t) = \int_0^t \frac{1}{\bar{a}_{x+s}} ds$, $\Lambda(t) = \int_0^t \delta(s) ds$, y $X(t) = \Lambda(t) - H(t)$. Para aplicar el resultado (16) se procede a comprobar que $X(t)$ es semimartingala continua. En el Lema 5.1 siguiente se prueba que $\Lambda(t)$ es semimartingala. Como $H(t)$ es función continua monótona creciente en $[0, \omega - x)$ se concluye que $X(t)$ es semimartingala continua. Por tanto, $[X, X](t) \equiv 0$, y reemplazando en (16) $X(0) = 0$ y colocando $V(0)$ no necesariamente uno, se obtiene el resultado principal.

Proposición 5.1. *Suponga que $(\delta(t), t \geq 0)$ es una cadena de Markov en tiempo continuo, con espacio de estados finito. Defina $H(t) = \int_0^t \frac{1}{\bar{a}_{x+s}} ds$, $\Lambda(t) = \int_0^t \delta(s) ds$, y $X(t) = \Lambda(t) - H(t)$. Entonces, la solución de la ecuación $dV(t) = V(t)dX(t-)$, con $V(0)$ fija, está dada por $V(t) = V(0)e^{X(t)}$.*

Lema 5.1. $\Lambda(t) = \int_0^t \delta(s) ds$ es semimartingala

Demostración. La cadena de Markov finita en tiempo continuo introducida en la Sección 4, $Z = (Z(t), t \geq 0)$ con matriz de intensidad q tiene espacio de estados \mathcal{S} y se definió una transformación tal que $l(Z(t)) = \delta(t)$. Definiendo una cadena $\underline{Z}(t)$ con espacio de estados $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d\}$ donde cada \underline{e}_j es el vector j -ésimo de la base canónica de \mathbb{R}^d , tal que tiene la misma matriz de intensidad q que la cadena Z , entonces $\underline{Z}(t)$ es una semimartingala (ver Elliot and Koop (1999, Lemma 9.8.1)) con

$$\underline{M}(t) = \underline{Z}(t) - \underline{Z}(0) + \int_0^t q \underline{Z}(s) ds, \quad (17)$$

y $\underline{M}(t)$ es una martingala en \mathbb{R}^d . Definiendo el vector $\underline{l} = (\delta_1, \dots, \delta_d)'$, entonces

$$\delta(t) = \langle \underline{Z}(t), \underline{l} \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathbb{R}^d . Por tanto $\delta(t)$ es semimartingala con una descomposición dada por

$$\delta(t) = \delta(0) + M(t) + A(t), \quad (18)$$

donde $M(t) = \langle \underline{M}(t), \underline{l} \rangle$ y $A(t) = \int_0^t \langle q\underline{Z}(s), \underline{l} \rangle ds$. A partir de la descomposición (18) se tiene

$$\Lambda(t) = \int_0^t M(s) ds + \int_0^t A(s) ds.$$

Llamando $U(t) = \int_0^t M(s) ds$, si $T > t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(T)|U(s), s \leq t) &= U(t) + \mathbb{E}\left(\int_t^T M(s)|U(s), s \leq t\right) ds \\ &= U(t) + \int_t^T \mathbb{E}(M(s)|U(s), s \leq t) ds. \end{aligned}$$

El término $\int_t^T \mathbb{E}(M(s)|U(s), s \leq t) ds$ tiene esperanza

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T \mathbb{E}(M(s)|U(s), s \leq t) ds\right) = \int_t^T \mathbb{E}(M(s)) ds = C(T - t),$$

para cierta constante C ya que $M(t)$ es una martingala. Si $C \neq 0$ entonces $U(t)$ es una super ó sub martingala, dependiendo de $C < 0$ ó $C > 0$, respectivamente, y en cualquier caso es una semimartingala. Y en el caso $C = 0$, $U(t)$ es una martingala. Como $\int_0^t A(s) ds$ es de variación finita se concluye que $\Lambda(t)$ es semimartingala. \square

Otras propiedades del sistema de retiro programado se obtienen a continuación. La condición de cierre que debe cumplirse en el modelo de anualidad (9) está dada por el siguiente resultado.

Proposición 5.2. *Con probabilidad uno se cumple*

$$\lim_{t \uparrow \omega - x} V(t) = 0. \quad (19)$$

Demostración. A partir de $V(t) = V(0)e^{X(t)} = V(0)e^{\Lambda(t) - H(t)}$, se analizan primero los límites $\lim_{t \uparrow \omega - x} H(t)$ y $\lim_{t \uparrow \omega - x} \Lambda(t)$. Veamos primero que $\lim_{t \uparrow \omega - x} H(t) = +\infty$. De la propiedad $\lim_{t \uparrow \omega - x} \bar{a}_{x+t} = 0$ enunciada en (6), se tiene que $H(\omega - x) = \int_0^{(\omega - x) - \frac{1}{\bar{a}_{x+t}}} \frac{1}{\bar{a}_{x+s}} ds$ es una integral impropia en la cual el límite $\lim_{t \uparrow \omega - x} \frac{1}{\bar{a}_{x+t}}$ no existe. Pero una aplicación directa del teorema de L'Hopital y la fórmula de Leibnitz para la derivada de integrales con límites que dependen de la variable de derivación, a la expresión para \bar{a}_{x+t} en (5) con base en la función Gamma-Incompleta, conduce a

$$\lim_{t \uparrow \omega - x} \frac{\omega - x - t}{\bar{a}_{x+t}} = 1.$$

Entonces la aplicación de un criterio para divergencia de integrales impropias (ver Widder (1968), pag. 344) permite concluir que $\lim_{t \uparrow \omega - x} H(t) = +\infty$. Para el caso de $\Lambda(t)$, como $\delta_1 \leq \delta(t) \leq \delta_d$ para $0 \leq t \leq \omega - x$, con probabilidad uno, entonces

$$\overline{\lim}_{t \uparrow \omega - x} \Lambda(t) = \delta_d(\omega - x)$$

con probabilidad uno. Por tanto se cumple

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \uparrow \omega - x} V(t) &= V(0)e^{\overline{\lim}_{t \uparrow \omega - x} X(t)} = V(0)e^{\overline{\lim}_{t \uparrow \omega - x} (\Lambda(t) - H(t))} \\ &= V(0)e^{\overline{\lim}_{t \uparrow \omega - x} \Lambda(t) - \underline{\lim}_{t \uparrow \omega - x} H(t)} \\ &= V(0)e^{\delta_d(\omega - x) - \infty} = 0. \end{aligned}$$

\square

El total acumulado de pagos en un intervalo $[0, t]$ de un sistema de anualidades con tasa de pago $B(t)$ se definió como $C(t) := \int_0^t B(s)ds$. En el caso del retiro programado se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.3. *Dada la expresión para la reserva en retiro programado (10), el pago acumulado hasta el tiempo t es un proceso estocástico dado por:*

$$C(t) = V(0) - V(t) + \int_0^t \delta(s)V(s)ds. \quad (20)$$

Demostración. De la definición de la tasa de pago $B(t)$ en (8) se tiene

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^t \frac{V(s)}{\bar{a}_{x+s}} ds = V(0) \int_0^t e^{\Lambda(s)-H(s)} H'(s) ds \\ &= -V(0) \int_0^t e^{\Lambda(s)} d e^{-H(s)} = -V(0) \left(e^{\Lambda(t)-H(t)} - 1 - \int_0^t \frac{\delta(s)V(s)}{V(0)} ds \right) \\ &= V(0) \left(1 - \frac{V(t)}{V(0)} \right) + \int_0^t \delta(s)V(s)ds = V(0) - V(t) + \int_0^t \delta(s)V(s)ds. \end{aligned}$$

Donde se aplicó en la segunda línea que $d e^{\Lambda(t)} = \delta(t)e^{\Lambda(t)} dt$, el cual es consecuencia de aplicar el exponencial estocástico a la semimartingala $\delta(t)$, (ver Klebaner Klebaner (2005, Th. 8.12)). \square

Este resultado indica que el pago acumulado hasta el tiempo t es igual al capital inicial menos una cantidad que resulta de restar a la reserva hasta t los intereses causados hasta t . Además, de $\lim_{t \uparrow \omega-x} V(t) = 0$ se tiene $C(\omega-x) = V(0) + \int_0^{\omega-x} \delta(t)V(t)dt$. Una conclusión que indica que en este sistema se entrega por concepto de pagos el capital inicial más los intereses devengados. Nótese sin embargo, que puede suceder el evento $C(\omega-x) < V(0)$ ya que los intereses (rendimientos) $\delta(t)$, pueden ser negativos.

De $\lim_{t \uparrow \omega-x} V(t) = 0$ también se desprende otra característica del sistema pensional de retiro programado. Si el saldo se agota hasta llegar a cero en la edad límite ω entonces el evento de que primero cruce una barrera $S(t) \geq 0$ puede tener una probabilidad positiva. Definiendo la barrera

$$S(t) = P_{min} e^{\delta_{\Delta} t} \bar{a}_{x+t}, \quad (21)$$

donde δ_{Δ} es una tasa continua que representa una tasa promedio de inflación, como el capital necesario para financiar una anualidad de vida por valor de un salario mínimo anual $P_{min} e^{\delta_{\Delta} t}$, entonces el tiempo de primer arribo a la barrera $S(t)$, τ , se define como

$$\tau = \sup\{t > 0 : V(t) \geq S(t)\}, \quad (22)$$

donde se asume que $V(0) > S(0)$. Además, $\sup\{\phi\} = \infty$. El objetivo es estimar mediante simulación la densidad de la variable τ .

Es conveniente anotar que si ocurre $\tau < \omega - x$ entonces por Ley la administradora del fondo en el cual están invertidos los recursos para el pago de la pensión por retiro programado debe transferir el saldo que exista en este momento, $V(\tau)$ a una Aseguradora para comprar a nombre del pensionado una renta vitalicia por un salario mínimo. Se tiene en efecto que, por ser funciones continuas, se puede plantear la igualdad $V(\tau) = S(\tau) = P_{min} e^{\delta_{\Delta} \tau} \bar{a}_{x+\tau}$. Lo cual equivale a asegurar para el pensionado una pensión anual por un salario mínimo, con ajuste por costo de vida. La tasa de la anualidad debe ser la tasa técnica, que para el caso del país es 4.0%.

6. ESTIMACIÓN DEL MODELO CON CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

Se asume dada una serie de tiempo $(y(k), k = 1, 2, \dots, n)$, de rendimientos diarios de un fondo, con $y(k) \in (-1, 1), \forall k$. El objetivo de esta sección es definir una CFMC $\delta(k)$ que aproxime a $y(k)$. La definición se hace en dos pasos. El primero es discretizar $y(k)$. Consiste en dividir el rango observado de la serie $y(k)$, $[m, M] = [\min(y(k)), \max(y(k))]$, en d sub-intervalos de igual longitud. Luego se define una CFMC $Z(t)$, con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, \dots, d\}$, tal que si $t_k = k/360$ entonces $Z(t_k)$ es el número del intervalo que contiene a $y(k)$. Se genera una muestra $Z(t_k), k = 1, 2, \dots, n$ de una CFMC $Z = (Z(t), t \geq 0)$, con valores en $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, d\}$.

El segundo paso consiste en estimar por máxima verosimilitud la matriz q , definida en (13), a partir de esta muestra. La estimación se basa en la observación de los estados en \mathcal{S} en tiempos t_k . Estos tiempos pueden ó no coincidir con los tiempos de arribo T_j a cada estado j , definidos como la suma de los correspondientes tiempos de permanencia τ_k anteriores a T_j . Cuando no coinciden se trata de una cadena observada en tiempos particulares t_k .

La función de verosimilitud se plantea aquí de acuerdo a Bladt y Sorensen (2005, sec. 2). Los tiempos t_k están igualmente espaciados con $t_{k+1} - t_k = 1/360$. Se define \mathcal{Q} el conjunto de matrices $q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ de intensidad, que cumplen $\sum_{j=1}^d q_{i,j} = 0$ y $q_{i,j} \geq 0, i \neq j$. Se define $K_{i,j} \geq 0$ el número de transiciones $i \rightarrow j$ de la cadena $Z(t)$ en el intervalo $[t_1, t_n]$. Se denota la entrada (i, j) de la matriz e^{hq} por $e_{i,j}^{hq}$. Entonces la verosimilitud de la muestra $Z(t_k), k = 1, \dots, n$, dada $q \in \mathcal{Q}$, se define como

$$L_n(q) = \prod_{i=1}^d \prod_{j=1}^d (e_{i,j}^{hq})^{K_{i,j}}. \quad (23)$$

Se define la matriz de Markov de transiciones observadas, \hat{P} como

$$\hat{P}_{i,j} = K_{i,j} / \sum_{j=1}^d K_{i,j}. \quad (24)$$

De acuerdo con Bladt y Sorensen (2005, pag. 4) si se define el conjunto $\mathcal{P}_0 = \{e^q : q \in \mathcal{Q}\}$ se cumple que si $\hat{P} \in \mathcal{P}_0$ entonces existe \hat{q} tal que $\hat{P} = e^{h\hat{q}}$ y la verosimilitud (23) se maximiza en \hat{q} . Si se definen $\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^{d \times d} : P \text{ es matriz Markov}\}$ y $\mathcal{P}_+ = \{P \in \mathcal{P} : \det(P) > 0\}$ entonces $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_+$, y además \mathcal{P}_0 es cerrado y no convexo en la topología del espacio $(\mathcal{P}_+, \|\cdot\|)$ con norma euclidiana. El conjunto \mathcal{P}_0 no es fácil de caracterizar y, por tanto, no es posible dar una condición suficiente para $\hat{P} \in \mathcal{P}_0$. Y aún en el caso de cumplirse $\hat{P} \in \mathcal{P}_0$ se tiene un problema de identificabilidad ya que la función exponencial matricial $q \mapsto e^{hq}$ no es inyectiva en \mathcal{Q} . Por tanto, se requieren condiciones suficientes que garanticen la unicidad de la solución \hat{q} en $\hat{P} = e^{h\hat{q}}$. Se conocen condiciones necesarias. En teoría de matrices son las condiciones necesarias para la existencia del logaritmo de una matriz. La posibilidad de calcular $h\hat{q} = \log(\hat{P})$ depende de condiciones que posiblemente no cumpla \hat{P} .

Sin embargo la estimación por máxima verosimilitud es diferente a estimar la matriz de intensidad resolviendo $\hat{P} = e^{h\hat{q}}$. Una implementación del método de máxima verosimilitud se encuentra en Kalbfleisch y Lawless

(2005), y consiste en hacer depender funcionalmente q de un vector $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$, colocando $\underline{\theta} \mapsto q(\underline{\theta})$. Entonces la verosimilitud queda ahora como

$$L_n(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^d \prod_{j=1}^d (e^{h_{i,j}q(\underline{\theta})})^{K_{i,j}}. \quad (25)$$

Esta estrategia se implementa en la librería `msm` de R, descrita en Jackson (2011). La función $\underline{\theta} \mapsto q(\underline{\theta})$ define cero ciertas celdas $q_{i,j}$ de la matriz q , lo que equivale a que no existen las transiciones a un paso $i \rightarrow j$. De manera que $\underline{\theta}$ es igual al vector de celdas $q_{i,j} \neq 0$. De esta manera se pueden calcular desviaciones estándar asintóticas para $\widehat{q}_{i,j}$, e intervalos de confianza asintóticos para los tiempos medios de permanencia $\mathbb{E}(\tau_i)$ (sojourn times). La optimización de (25) requiere calcular la exponencial de la matriz $e^{hq(\underline{\theta})}$.

Al ser el proceso de optimización de (25) un procedimiento iterativo requiere de un valor inicial para $\underline{\theta}$, por lo menos en la librería `msm`. Este valor inicial se define en este estudio con base en \widehat{P} y en unos valores arbitrarios para $1/q_i = \mathbb{E}(\tau_i)$, colocando $q_{i,i} = q_i \widehat{P}_{i,j}$ para $i \neq j$.

La serie $y(k)$ para la estimación corresponde a los rendimientos diarios de un portafolio conformado por inversiones en 15 fondos de fiducia del mercado colombiano, rebalanceado cada seis meses, en el período 2000-2009, ver Giraldo, Osorio y Valencia (2010). Se puede apreciar en la Figura 1 (la serie más irregular). En el Código R.1 del Apéndice se programó la estimación escogiendo una CFCM con $d = 11$ estados. El resultado es la matriz \widehat{q} estimada siguiente. Los elementos de la diagonal principal en \widehat{q} son $\widehat{q}_{i,i} = -1/\widehat{\mathbb{E}}(\tau_i)$.

$$\widehat{q} = \begin{bmatrix} -0.1667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2500 & 0.0000 & 0.2500 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.2500 & 0.0417 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0417 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0083 & 0.0083 & -0.1917 & 0.0667 & 0.0750 & 0.0167 & 0.0083 & 0.0083 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0008 & 0.0025 & -0.0548 & 0.0472 & 0.0034 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0008 & 0.1093 & -0.1204 & 0.0095 & 0.0006 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0006 & 0.0022 & 0.0411 & -0.0466 & 0.0022 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0185 & 0.0185 & 0.0000 & 0.1296 & 0.1296 & -0.3148 & 0.0185 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3333 & 0.1667 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5000 \end{bmatrix}.$$

7. SIMULACIÓN DEL MODELO CON CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

Simulación de las tasas. Para simular la cadena de tasas $\delta(t)$ se utiliza la transformación (14), $\delta(t) = l(Z(t))$, por lo que solamente se requiere simular la CFMC $Z = (Z(t), t \geq 0)$; el procedimiento consiste en programar la forma como ésta evoluciona. En $t = 0$ se asume $Z(0) = i \in \mathcal{S}$; en este estado permanece un tiempo τ_i con densidad $f_{\tau_i}(t) = q_i e^{q_i t}$. Al final de este tiempo pasa a otro estado $j \neq i$ con probabilidad $q_{i,j}/q_i$, y permanece en este estado durante un tiempo τ_j con densidad $f_{\tau_j}(t) = q_j e^{q_j t}$; al final de este tiempo pasa a otro estado $k \neq j$, y así sucesivamente, hasta que la suma de los tiempos de entre-arribos $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ sea mayor que un tiempo máximo T fijado con anterioridad.

En el Código R.2 en el Apéndice se implementó la simulación, calculando primero la matriz Q y el vector (q_i) , de acuerdo a las definiciones en (13), pag. 34, a partir de la matriz \widehat{q} , 11×11 , en (26). El programa calcula los vectores: Z y τ que contienen los valores simulados de la cadena y los tiempos de permanencia en

cada estado, respectivamente. La función `rand()` genera un número aleatorio dada una distribución discreta finita, ver Rubinstein (1981, sec. 3.7). Con el vector τ se calcula el vector de los tiempos de arribo, T_n , que es la suma acumulada de los τ : `Tn = cumsum(tau)`.

El proceso $\delta(t)$ se define mediante la transformación (14)

$$\begin{aligned} l: \mathcal{S} &\rightarrow \{\delta_1, \dots, \delta_d\} \\ i &\mapsto l(i) = \delta_i, \end{aligned} \quad (26)$$

tal que $l(Z(t_k)) = \delta_i$ si $Z(t_k) = i$, con $l(i)$ el extremo izquierdo de cada uno de los d intervalos utilizados para discretizar la serie $y(k)$, calculados con `l=seq(min(y),max(y),length.out=12)`, ver Código R.1. Por la sintaxis de R, si Z es el vector de valores simulados de la CFMC, entonces la instrucción `ys=1[Z]` produce un vector de tasas simuladas indicado por `ys`. Estas tasas son efectivas anuales, en formato porcentaje, p.ej. 8.22. Para definir las como valores de $\delta(t)$ en (9) se convierten a tasas continuas con `ys=log(1+ys/100)`.

Simulación del Modelo. La simulación del modelo para el retiro programado se realiza resolviendo aproximadamente la ecuación (9), mediante el método de discretización de Euler, para el cual, con $h = 1/360$,

$$V(t_{k+1}) = \left(1 + h\delta(t_k) - \frac{h}{\bar{a}_{x+t_k}}\right) V(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Para calcular el coeficiente $\delta(t_k)$ en la ecuación (27), se utiliza la función `stepfun()`. Al escribir `delta=stepfun(Tn/360,ys,right=TRUE)` esta función define una función de t , escalonada y continua a derecha, de tal forma que una llamada `delta(t)` para t en año ó fracción de año, produce el valor `ys[i]` si $hT_n(i-1) \leq t < hT_n(i)$. Esta función transfiere los valores simulados de la tasa a (27) como si se tratara de un coeficiente que depende (discontinua) del tiempo. Para calcular el coeficiente \bar{a}_{x+t_k} se usa (5) con parámetros adecuados. Utilizando la función `ode()` de la librería `deSolve`, (ver Soetaert *et al.* (2010)), se pueden calcular trayectorias $V(t_k)$, $k = 1, \dots, n$ resolviendo (27) para cada trayectoria simulada de las tasas dada por los vectores `Tn,ys`. En el Código R.3 en el Apéndice se muestra la programación en R. Repitiendo el código en un ciclo `for()` se obtienen varias trayectorias simuladas de la solución aproximada de (9).

8. EJEMPLOS

Parámetros generales. Los parámetros utilizados en los Ejemplos corresponden al caso de una vida de $x=62$ años, hombre, y los parámetros utilizados para evaluar \bar{a}_{x+t} en la fórmula (5) corresponden a una distribución Gompertz-Makeham ajustada a la Tabla de Vida según experiencia de las Aseguradoras para el período 2005 - 2008, actualmente vigente en Colombia para cálculos de Compañías de Vida ^(c). Estos parámetros son $s = 0.9953583$, $g = 0.9999905$, $c = 1.1395016$. La tasa escogida para la anualidad es 4.00 % efectiva anual, y la tasa de incremento por costo de vida del salario mínimo anual es 2.00 % efectiva anual.

Ejemplo 1. Los extremos izquierdos de los $d = 11$ intervalos para discretizar la serie $y(k)$ están en la Tabla 1. Por ejemplo, si la cadena toma el valor `Z=5` la transformación (14) le asigna el valor `ys=5.92`.

^cVer Resolución número 1555 de 2010 de la SuperIntendencia Financiera de Colombia

Tabla 1: Ejemplo 1: Transformación

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-11.52	-7.16	-2.80	1.56	5.92	10.28	14.64	19.00	23.36	27.72	32.08

Las series observada y simulada, y , y_s , tienen estadísticas descriptivas, ver Tabla 2. La tasa promedio (efectiva anual) es en ambas 8.47%; la volatilidad (std.dev) es 0.5 puntos mayor en la simulada.

Tabla 2: Ejemplo 1: Estadísticas descriptivas series observada y simulada

	min	max	range	median	mean	var	std.dev	coef.var
Obs	-15.42	32.54	47.96	7.84	8.47	8.49	2.91	0.34
Simul	-7.24	27.64	34.88	10.20	8.47	12.52	3.54	0.42

La gráfica de las series observada y simulada está en la Figura 1 siguiente. En esta Figura se puede apreciar el ajuste del modelo de cadena finita de Markov en tiempo continuo a la serie de rendimientos de un portafolio de fiducias, tomada de Giraldo, Osorio y Valencia (2010).

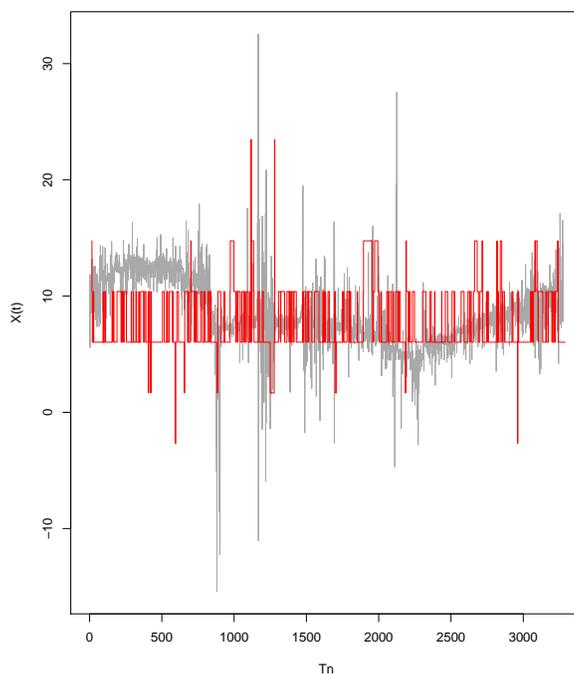


Figura 1: gris = observada , rojo = simulada (cadena markov)

Ejemplo 2. En el Ejemplo 1 se asume un valor medio de las tasas constante e igual a 8.47% durante 48 años. En este Ejemplo 2 se asume que las tasas disminuyen 3, 4, 3, 3 puntos porcentuales, con relación a 8.47%, a los 0, 11, 23, 35 años. Las transformaciones (14) en cada uno de estos períodos están dadas en cada una de las cuatro columnas de la Tabla 3.

Tabla 3: Ejemplo 2: Transformaciones de las tasas

	11	12	13	14
1	-14.67	-15.67	-14.67	-14.67
2	-10.31	-11.31	-10.31	-10.31
3	-5.95	-6.95	-5.95	-5.95
4	-1.58	-2.58	-1.58	-1.58
5	2.78	1.78	2.78	2.78
6	7.14	6.14	7.14	7.14
7	11.50	10.50	11.50	11.50
8	15.86	14.86	15.86	15.86
9	20.22	19.22	20.22	20.22
10	24.58	23.58	24.58	24.58
11	28.94	27.94	28.94	28.94

La transformación 11[Z] actúa durante los primeros 11 años. Luego 12[Z] hasta los siguientes 23 años, etc. Las estadísticas básicas de la serie observada versus la simulada con las transformaciones anteriores se muestra en la Tabla 4 siguiente. Se trata de un escenario pesimista.

Tabla 4: Ejemplo 2: Estadísticas descriptivas series observada y simulada

	min	max	range	median	mean	var	std.dev	coef.var
Obs	-15.42	32.54	47.96	7.84	8.47	8.49	2.91	0.34
Simul	-14.67	24.58	39.24	6.14	5.22	12.47	3.53	0.68

En este Ejemplo se incluye la estimación del tiempo de primer arribo a la barrera inferior definido en (22), pag.37, el cálculo de los pagos definidos en (20), pag. 37 y del valor de la anualidad una vez que el saldo toca esta barrera.

Estimación de la densidad del tiempo de primer arribo. La reserva inicial $V(0)$, se calcula como el capital para financiar mediante retiro programado el pago de 2 millones mensuales a la vida $x=62$, por valor de \$334 millones, calculado como $2(12)\bar{a}_{62|0.04}$ con la distribución Gompertz-Makeham y la fórmula (5). En este valor inician todas las trayectorias. La simulación de 30 trayectorias de soluciones de la ecuación de flujo

discretizada (27), aparece en la Figura 2 junto con la barrera inferior definida en (21).

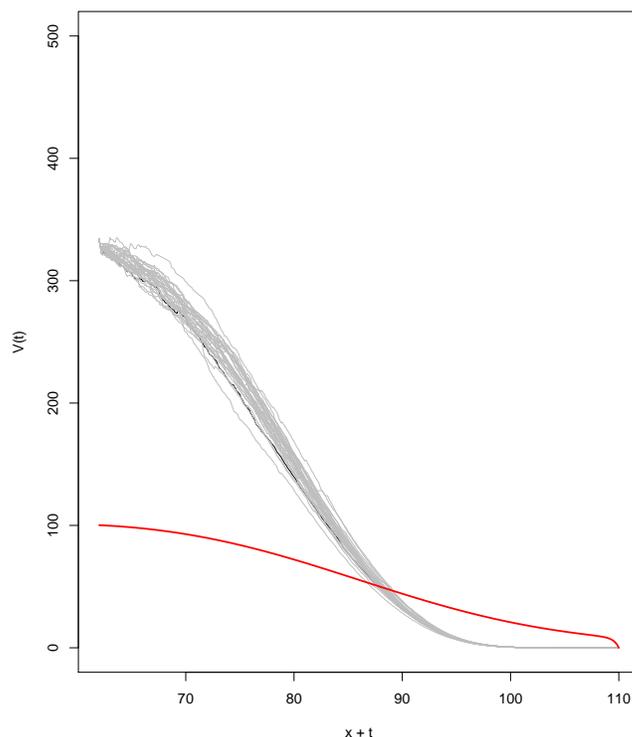


Figura 2: Trayectorias de saldos y barrera inferior

Con base en 1000 trayectorias se estimó una muestra de la variable tiempo de primer arribo τ . En la Tabla 5 están las estadísticas básicas obtenidas. Se observa que la media está en 88 años. Y en la Figura 3, el panel izquierdo muestra una estimación de la densidad, con un segmento vertical sobre la media.

Tabla 5: Estadísticas descriptivas tiempo primer arribo τ

min	max	range	median	mean	var	std.dev
87.10	89.00	1.90	88.10	88.06	0.15	0.39

Estimación de los pagos. Los pagos durante $110 - 62 = 48$ años aparecen en el panel derecho de la Figura 3. El capital inicial de \$334 millones garantizaría una pensión anual de \$24 millones. A partir de la Figura se observa que este pago se mantiene, con fluctuaciones, hasta los 80 años. De ahí en adelante empiezan a decrecer. Hasta el momento en que se llega a cruzar la barrera inferior. Lo cual ocurre a los 88 años, en promedio. En este momento se debe pasar a una anualidad de vida por un salario mínimo anual. Que empieza pagando \$12 millones el primer año. Nótese que el valor del saldo en ese momento es \$50.964 millones, y la

anualidad tiene un valor \$50.909. En la Figura esta transición está señalada con un segmento vertical. Los valores del saldo $V(t)$ que aparecen graficados después de esta transición ya no existen, pero se dejaron en la Figura para comprobación de la propiedad teórica de que el saldo se anula al final del intervalo $[0, \omega - x]$.

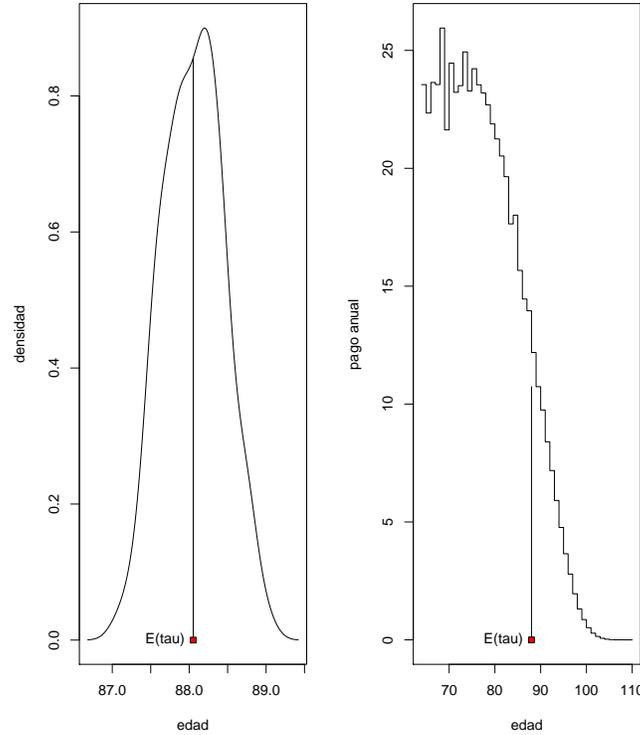


Figura 3: Densidad de τ y trayectoria de pagos

9. CONCLUSIONES

Las conclusiones siguientes están relacionadas con el modelo utilizado, el cual utiliza una cadena de Markov finita en tiempo continuo para las tasas de rendimientos del fondo en el cual se deposita un capital para financiar esta modalidad de pensión.

El sistema de RP tiene la característica de que produce un decrecimiento del saldo de la cuenta individual hasta llegar a cero. De ahí el nombre en inglés “drawdown pension scheme”. Este decrecimiento se puede obtener incluso con una tasa nula. Es decir, si $\delta(t) \equiv 0$ entonces $V_0'(t) = -V_0(t)/\bar{a}_{x+t}$ tiene una tasa negativa $-1/\bar{a}_{x+t}$ pero una solución no negativa. En este caso se obtiene una ecuación diferencial ordinaria con un punto singular en el extremo derecho del intervalo $[0, \omega - x]$. Pero la integral solución es finita. Por tanto, está bien definido. Lo que lleva considerar que este sistema puede incorporar algún mecanismo que garantice una tasa mínima positiva cuyo efecto puede ser eliminar el paso a la anualidad ($\tau = \infty$), garantizando un ingreso menos decreciente. De igual manera este mecanismo impediría que suceda el evento $C(\omega - x) < V(0)$, es decir, que los pagos del sistema no retribuyan el capital inicial, como mínimo.

Tal vez una de las críticas al sistema de retiro programado es que no debería ser el único sistema sino constituir un “pilar”, juntamente con otros sistemas. Porque sus pagos son decrecientes. De convertirse en el único pilar, de manera masiva, tendría un efecto de empobrecimiento de la tercera edad. Muchas de estas personas requieren ingresos estables para pagos de vivienda, salud, etc. Otro aspecto es la dependencia del sistema del mercado accionario. La justificación de tasas aleatorias es que los rendimientos provienen de la rotación de un portafolio accionario. Y la inversión en el mercado accionario se justifica afirmando que de esta forma se canaliza el ahorro pensional hacia inversiones en infraestructura como carreteras, etc.. Pero esa dependencia genera un riesgo sistemático sobre el portafolio conjunto de cuentas. Sobre este aspecto se trata el estudio en MacDonald & Cairns (2005).

Un aspecto que no se incluyó en este estudio es el efecto del cónyuge y los hijos. Pero esto podría implementarse cambiando la anualidad para una vida \bar{a}_{x+t} por anualidades conjuntas, por ejemplo $\bar{a}_{x+t,y+t}$. Otro aspecto es el carácter decreciente de los pagos. Los pagos anuales en el Ejemplo 2 muestran una trayectoria decreciente. Esto entra en contradicción con normas legales que requieren que los pagos pensionales se incrementen al menos en el incremento anual del salario mínimo. Dado que existen sentencias de la Corte Constitucional ordenando este incremento, se podría decir que el sistema de retiro programado sería viable como complemento pensional.

Como se mencionó en la Introducción el modelo CFCM se utiliza como alternativa a los modelos de difusión y difusión con saltos. No fué posible examinar aquí las diferencias en los resultados con estos modelos. En Giraldo (2013) y en Arango (2014) se muestran resultados similares en los cuales el modelo (9) se cambia colocando en lugar de $d\Lambda(t)$ un diferencial con el proceso Wiener, de la forma $d\Lambda(t) = \delta dt + \sigma dW(t)$, con $W(t)$ un proceso Wiener estándar.

10. APÉNDICE. PROGRAMAS EN R

Código R 1. Programa para estimacion de la matriz de intensidades

```
#----- 0) lee una serie de rendimientos: y
#----- 1) la discretiza en 11 clases
l=seq(min(y),max(y),length.out=12)
ny=cut(y,l)
f=na.omit(as.integer(factor(ny)))
fn = as.integer(f)

#----- 2) definir los tiempos de transiciones
tiempos = seq(1,length(y)-1)/360

#----- 3) estimar la matriz de transiciones observadas Q
f.g = markovchainFit(data = fn,
method = "laplace", laplacian = 0.00001)
Q=f.g$estimate@transitionMatrix

#----- 4) especificar los parametros q_i = 1/E(tau_i)
qx = c(1/2,1/2,1/4,1/5,1/6,1/7,1/4,1/3, 1/2, 1/2, 1/2)
```

```
#----- 5) estimacion inicial de la matriz q
d = nrow(Q); q = mat.or.vec(d,d);
for(i in 1:d){for(j in 1:d){
q[i,j] = ifelse(i==j,-qx[i],qx[i]*Q[i,j])}}

#----- 6) estimacion con funcion msm
D = data.frame(years = tiempos, state = fn)
cav.msm <- msm( state ~ years, data = D,
qmatrix = q, exacttimes = TRUE,
control = list ( trace = 2, REPORT = 1 ) )
```

Código R 2. Simulación de una cadena finita continua de Markov

```
#----- 0) requiere: matriz q
#----- 1) calcula matriz Q (Q.est) y vector qi (qx.est)
Q.est = q.est
qx.est = -diag(Q.est)
for(j in 1:nrow(Q.est)){
Q.est[j,]=q.est[j,]/qx.est[j]}
diag(Q.est) = 0
S = apply(Q.est,1,sum)
for(j in 1:nrow(Q.est)){
Q.est[j,]=Q.est[j,]/S[j]}
#----- 2) simulacion de la cadena
# distribucion inicial Z[1] = 5
ns = 100
J = double(ns)
for(k in 1:ns){
T = (w-x)*360; t = seq(1,T); Z = c(5); j = 1;
tau = c(rexp(1,qx.est[Z[j]]))
while( sum(tau) <= T ){
j = j+1
Z = c(Z,rando(Q.est[Z[j-1],]))
tau = c(tau,rexp(1,qx.est[Z[j]]))
}
#----- 3) salida: vectores Z, tau, delta
Tn = cumsum(tau)
delta = log(1+l[Z]/100)
```

Código R 3. Simulación de la ecuación diferencial aleatoria

```
#----- 1) Función para calcular delta(t)
delta = stepfun(Tn/360,c(log(1+l[2]/100),ys),right=TRUE)

#----- 2) libreria deSolve: especifica el modelo
```

```
modelo = function(t, y, pars) {
with(as.list(c(t, y, pars)),
{dy <- (delta(t) - 1/acx(x+t,w,s,g,C,d2))* y[1]
list(c(dy))})}

#----- 3) libreria deSolve: especifica parámetros
pars <- c(s=s4,g=g4,C=c4,d2=delta.a)
y0 <- c(y = 2*12*acx(x,w,s4,g4,c4,delta.a))
t <- seq(0, tail(Tn/360)[6], by = 0.1)

#----- 4) libreria deSolve: calcula la solución
out <- ode(y0, t, modelo, pars,method = "euler")
B = as.matrix(out)
```

Referencias

- Arango, D. (2014), Un estudio sobre tiempos de primer arribo y estrategias óptimas de inversión aplicados al esquema de retiro programado. Tesis de Maestría en Ciencias-Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.
- Bladt, M. & Sorensen M. (2005), Statistical inference for discretely observed Markov jump processes. *J. R. Statist. Soc. B*, 67, 395–410.
- Borokov, C.; Klebaner, F. & Virag, E. (2003), Random steps functions model for interest rates. *Finance and Stochastics*, 7, 123–143.
- Cox, D. & Miller, H. D. (1965), The theory of stochastic processes. Methuen & Co, Ltd. London, UK.
- Elliot, R. J.; Koop, P. E. (1999), Mathematics of financial markets. Springer-Verlag. New York, U.S.A.
- Giraldo, N.; Osorio, L. G. & Valencia, J. E. (2010), Una aplicación de estimadores robustos de matrices de covarianza en finanzas. In *Memorias XII Seminario de Estadística Aplicada IASI*: Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Estadística. Medellín, Colombia, 1–18.
- Giraldo, N. (2013), Tiempos de primer arribo y probabilidades de escape. Aplicaciones en riesgo de crédito y pensiones. In *Seminario de Estadística- Septiembre 26 de 2013. Escuela de Estadística*.: Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Estadística. Medellín, Colombia. 1–28.
- Jackson, Ch. H. (2011), Multi-State models for panel data: The msm package for R. *Journal of Statistical Software*, 38(8), 1–28.
- Kalbfleisch, J. D. & Lawless, J. F. (2005), The analysis of panel data under a Markov assumption. *Journal of the American Statistical Association*, 80, 863-871.
- Klebaner, F. (2005), Introduction to stochastic calculus with applications. Imperial College Press. London.
- MacDonald, B-J. & Cairns, A. J. G. (2005), DC Pension Plans for All: What If?. In *AFIR Colloquia*. Zurich, Switzerland. www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Zurich/MacDonald_Cairns.pdf

- Mingari, G.; Ritelli, D. & Spelta, D. (2006), Actuarial values calculated using the incomplete gamma function. *Statistica*, 66, 77-81.
- Nielsen, P. H. (2005), Optimal bonus strategies in life insurance: The Markov chain interest rate case. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2, 81-102.
- Norberg, R. (1995), A time-continuous Markov chain interest model with applications to insurance. *Insurance: Mathematics & Economics*, 17, 181-190.
- Norberg, R. (2003), The Markov chain market. *Astin Bulletin*, 33(2), 265-287.
- Rubinstein, R. (1981), Simulation and Montecarlo method. Jhon Wiley & Sons. New York. U.S.A.
- Soetaert, K.; Petzoldt, T. & Setzer, R. W. (2010), Solving differential equations in R: Package deSolve. *Journal of Statistical Software*, 33(9), 1-25.
- Widder, D. V. (1968), Advanced calculus. Second Edition. Prentice-Hall of India, New Delhi.