Revista de la Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
V 5 N°1 Enero-Junio de 2016 • ISSN 0121-747X / ISSN-e 2357-5749 • Artículo Investigación • Páginas 61 a 75
DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v5n1.55306

PRECISIONES SOBRE LA DERIVADA Y LA ANTI-DERIVADA DE LA RAÍZ DE UNA POTENCIA ENTERA[a]

PRECISIONS OF THE DERIVATIVE AND ANTI-DERIVATIVE OF THE ROOT OF AN INTEGER POWER

MANUEL SIERRA-ARISTIZÁBAL[b]

Recibido 01-02-2016, aceptado 17-05-2016, versión final 19-05-2016.
Artículo Investigación

RESUMEN: En este artículo, se construyen de manera detallada, fórmulas para calcular la derivada y la anti-derivada de funciones de la forma $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, donde m es un entero y n es un entero positivo. Se prueba que estas fórmulas son válidas en todo el dominio de la función. Se muestra que si $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$, donde m y n son pares y x es negativo, entonces las fórmulas tradicionales, $D_X[x^r] = rx^{r-1}$ y $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, fallan. Finalmente, las fórmulas tradicionales son modificadas, cuando m y n son pares y x es negativo.

PALABRAS CLAVE: *Anti-derivada, derivada, exponente racional, raíz.*

ABSTRACT: In the present article, formulas for calculating the derivatives and antiderivatives of functions of the form $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, where m is an integer and n is positive integer, are constructed in detail. These formulas are shown to be valid for the entire domain of the corresponding function. It is shown that if $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$, where m and n are even and x is negative, then the traditional formulas, $D_x[x^r] = rx^{r-1}$ y $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, fail. Finally, traditional formulas are modified, when m and n are even and x is negative.

KEYWORDS: *Antiderivative, derivative, rational exponent, root.*

1. INTRODUCCIÓN

La función potencia entera de una raíz, $g(x) = (\sqrt[n]{x})^m$, donde n es un entero positivo y m es un entero diferente de cero, es ampliamente utilizada en los cursos de cálculo diferencial e integral que se imparten en las universidades que tienen programas de ciencias, administración e ingeniería. Con el fin de calcular la derivada y la anti-derivada de esta función en el campo de los

[a]Sierra-Aristizábal M. (2016). *Precisiones sobre la derivada y la anti-derivada de la raíz de una potencia entera. Revista de la Facultad de Ciencias, 5 (**1**), 61–75. DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v5n1.55306*

[b]Profesor del Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad EAFIT

números reales, se acostumbra representarla como una función de potencias racionales, definiendo $(\sqrt[n]{x})^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$, y se afirma que la derivada y la anti-derivada están dadas por las siguientes fórmulas tradicionales: $D_x\left[(\sqrt[n]{x})^m\right] = D_x[x^r] = rx^{r-1}$ y $\int (\sqrt[n]{x})^m dx = \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, donde $r = \frac{m}{n}$. En los textos de cálculo González *et al.* (2012), Larson & Edwards (2016), Stewart (2012), Zill (2011), se presentan estas fórmulas como válidas en todo el dominio de la función, y además, en los textos Edwards *et al.* (2008), Leithold (1998), Purcell *et al.* (2007) y Thomas (2005), se presentan razonamientos con los cuales se prueba la validez de las mismas en todo el dominio de esta función.

La función raíz de una potencia entera, $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, donde n es un entero positivo y m es un entero diferente de cero, también se acostumbra representarla como una función de potencias racionales, definiendo $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$, y se afirma que la derivada y la anti-derivada están dadas por las fórmulas tradicionales: $D_x[\sqrt[n]{x^m}] = D_x[x^r] = rx^{r-1}$ y $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, donde $r = \frac{m}{n}$. En los textos de análisis matemático como Apostol (1967), Lax & Terrell (2014), Mahmudov (2013), Mercer (2014), Schinazi (2013), se prueba que estas fórmulas son válidas para los reales positivos, pero no se refuta ni se prueba su validez en los reales negativos. Por otro lado, en Spivak (1996) se prueba que las fórmulas valen para los reales positivos, y además, para los reales negativos cuando la raíz es impar, pero no se considera el caso para los reales negativos, cuando m y n son pares.

Se tiene entonces que las fórmulas tradicionales, proporcionan resultados correctos cuando se trata de la función $g(x) = (\sqrt[n]{x})^m$. También se tiene que estas fórmulas proporcionan resultados correctos cuando se trata de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, y el dominio se restringe a los reales positivos, y también cuando n es impar y x es un real arbitrario. Finalmente, se tiene que para x tomando valores en los reales no negativos, ambas funciones coinciden, es decir, $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$. Lo anterior tiene como consecuencia, que en las aplicaciones a la ingeniería y a la administración, las fórmulas tradicionales sean pertinentes, puesto que en estas aplicaciones se trabaja con valores de x no negativos.

En este trabajo se muestra que, para el caso de la $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, las fórmulas tradicionales no pueden ser aplicadas cuando m y n son pares y x es un real negativo, y que éste es el único caso en el cual estas fórmulas no aplican. También se prueba que las nuevas fórmulas $D_x[\sqrt[n]{x^m}] = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x}$ y $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{n}{m+n} x \sqrt[n]{x^m} + C$, funcionan correctamente en todo el dominio de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$. Finalmente se prueba que, cuando x es negativo y tanto m como n son pares, entonces $\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x} = (-1)x^{\frac{m}{n}-1}$ y $x\sqrt[n]{x^m} = (-1)x^{\frac{m}{n}+1}$, y en consecuencia, las fórmulas tradicionales se pueden adaptar de la siguiente manera $D_x[\sqrt[n]{x^m}] = (-1)\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ y $\int \sqrt[n]{x^m} dx = (-1)\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$, cuando m y n son pares y x es negativo.

Respecto al estado del arte, en lo referente a las fórmulas tradicionales, en Malik (1984) se muestra que en 1635, Cavalieri, publica el trabajo, *Geometria Indivisibilibus*, en el cual introduce la idea de *indivisible*, y con ella establece un resultado previo al surgimiento del cálculo, el cual es análogo a la fórmula $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Además, en Boyer (1970) se muestra que, en la misma época, este resultado fue obtenido independientemente por Roberval y por Torricelli, y que fue generalizado por Fermat para todos los valores racionales de n, excepto $n = -1$. Por otro lado en Rosenthal (1951), se tiene que en 1656, Wallis, en su libro *Arithmetica infinitorum*, establece la validez de esta fórmula para cualquier exponente real n, con $n = -1$. Finalmente, en Green (1979) se muestra que algunas décadas después, Newton prueba que el área bajo la curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$, está dada por $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$. Se tienen de esta manera, resultados con cerca de 400 años de antigüedad.

El artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: en la parte 2 se presentan contraejemplos con los cuales se muestra que las fórmulas tradicionales no pueden ser extendidas para el caso de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, cuando x es negativo con m y n pares. En las partes 3 y 4 se presentan las nuevas fórmulas para la derivada y la anti-derivada, las cuales son válidas en todo el dominio de la función raíz de una potencia entera. En la parte 5 se establecen las condiciones y las modificaciones precisas en las fórmulas tradicionales, para que puedan ser utilizadas en el caso de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, cuando x es negativo con m y n pares. En la parte 6 se muestra que las fórmulas tradicionales funcionan perfectamente en el campo de los números complejos. Finalmente, en la parte 7 se presentan las conclusiones y algunas observaciones.

2. CONTRAEJEMPLOS

El primer paso consiste en ilustrar, con un caso específico de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, que las fórmulas tradicionales no aplican cuando x toma valores en los reales negativos siendo m y n pares. Para esto, se consideran dos problemas típicos del cálculo diferencial e integral.

Problema 1. Encontrar el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y = 0, x = -1, y = \sqrt[6]{x^2}$.

Problema 2. Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[6]{x^2}$ en el punto $P(-1, 1)$

Para solucionar estos problemas, se utilizan los siguientes resultados del cálculo diferencial e integral:

Resultado 1. En Larson & Edwards (2016) se tiene que, el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y = 0, x = a, x = b, y = f(x)$, donde $a < b$ y $f(x) \geq 0$, está dada por la integral $\int_a^b f(x)dx$.

Resultado 2. En Larson & Edwards (2016) se tiene que, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es $f'(c)$.

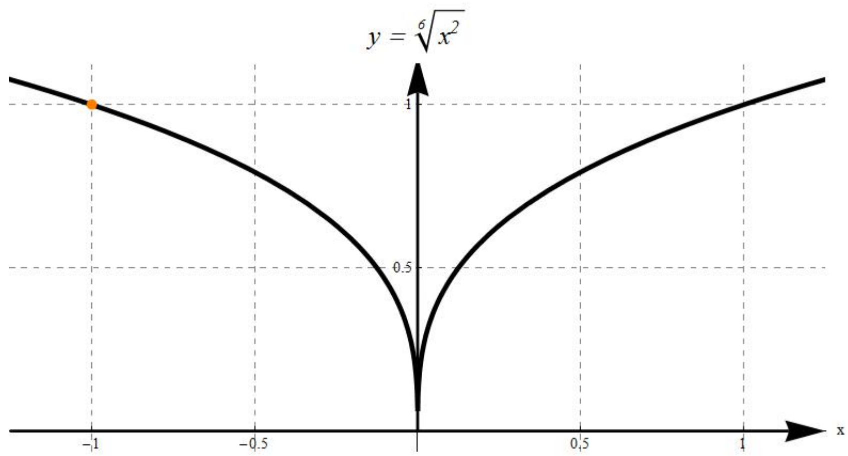

Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt[6]{x^2}$

Solución al problema 1.
Las fórmulas tradicionales no pueden ser aplicadas en este caso, puesto que al hacerlo resulta la siguiente contradicción:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^2}dx = \int_{-1}^{0} x^{\frac{2}{6}}dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}}\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{(0)^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} - \frac{(-1)^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} = -\frac{(-1)^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} = -\frac{\sqrt[6]{(-1)^8}}{\frac{8}{6}} = -\frac{6}{8}, \end{aligned} \tag{1}$$

Obteniéndose un área negativa, lo cual es imposible.

Considerando la simetría de la gráfica de la función, se puede asegurar que el área coincide con la integral evaluada entre los valores no negativos 0 y 1, y utilizando las fórmulas tradicionales se obtiene como resultado el valor correcto. Si se quiere proceder sin utilizar las fórmulas tradicionales con exponentes racionales no enteros, una forma de hacerlo es la siguiente:

Teniendo en cuenta que $x < 0$, se infiere que $|x| = -x$, y en consecuencia:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^2}dx = \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{\sqrt{x^2}}dx = \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{|x|}dx = \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{-x}dx = \int_{-1}^{0} -\sqrt[3]{x}dx. \tag{2}$$

Sea $u = \sqrt[3]{x}$, entonces $u^3 = x$, por lo que $3u^2du = dx$, resultando que

$$\int_{-1}^{0} -\sqrt[3]{x}dx \quad = \quad \int_{x=-1}^{x=0} -u(3u^2du) = \int_{x=-1}^{x=0} -3u^3du$$

$$= \left[-\frac{3u^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=0} = \left[-\frac{3(\sqrt[3]{x})^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{3(\sqrt[3]{0})^4}{4} + \frac{3(\sqrt[3]{-1})^4}{4} = \frac{3}{4}. \qquad (3)$$

Solución al problema 2.

Las fórmulas tradicionales tampoco pueden ser aplicadas en este caso, puesto que al hacerlo se obtiene el siguiente resultado inválido:

$f'(x) = D_x[\sqrt[6]{x^2}] = D_x[x^{\frac{2}{6}}] = \frac{2}{6}x^{\frac{2}{6}-1} = \frac{2}{6}x^{-\frac{4}{6}} = \frac{1}{3\sqrt[6]{x^4}}$, evaluando en $x = -1$ se tiene que la pendiente es, $f'(-1) = \frac{1}{3\sqrt[6]{(-1)^4}} = \frac{1}{3}$, lo cual es imposible, puesto que la función es decreciente cuando $x = -1$, por lo que la pendiente debe ser negativa.

Si se definen $h(x) = \sqrt[6]{x}$ y $t(x) = x^2$ entonces $\sqrt[6]{x^2} = h \circ t(x) = h(t(x))$, por lo que, aplicando la regla de la cadena y utilizando las fórmulas tradicionales, se obtiene el valor correcto de la derivada. Si se quiere proceder sin utilizar las fórmulas tradicionales con exponentes racionales no enteros, una forma de hacerlo es la siguiente: sea $u = \sqrt[6]{x^2}$, como $x < 0$ resulta $u = \sqrt[3]{|x|} = \sqrt[3]{-x}$, es decir, $u^3 = -x$ por lo que $3u^2u' = -1$, resultando que $f'(x) = u' = \frac{-1}{3u^2} = \frac{-1}{3(\sqrt[3]{-x})^2}$.

La pendiente se obtiene evaluando la derivada en $x = -1 : f'(-1) = \frac{-1}{3(\sqrt[3]{-(-1)})^2} = -\frac{1}{3}$.

Se concluye entonces, que existen casos concretos de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, en los cuales la estrategia usual, utilizando las fórmulas tradicionales, no puede ser utilizada, tanto para el caso de la derivada como para el caso de la anti-derivada.

Con base en lo anterior, la propuesta de este trabajo es encontrar fórmulas para la derivada y para la anti-derivada, las cuales puedan ser aplicadas en todo el dominio de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, en el campo de los números reales. Antes de hacerlo, en la proposición 2.1, se presentan algunos resultados que deben ser tenidos en cuenta, cuando se necesita transferir propiedades de los exponentes enteros a los exponentes racionales.

Proposición 2.1. *Propiedades de la raíz de una potencia entera.*

a) *Si se define* $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$ *entonces no tienen validez general ninguna de las siguientes dos afirmaciones:* $D_x[x^r] = rx^{r-1}$ *y* $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, *donde* $r = \frac{m}{n}$ *es un racional.*

b) *No se puede asegurar que* $x^p x^q = x^{p+q}$, *ni que* $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$, *cuando* p *y* q *son racionales siendo* x *un real negativo.*

c) $\sqrt[n]{x^n} = x$, *cuando* n *es un entero positivo impar y* x *un real arbitrario.*

d) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, *cuando* n *es un entero positivo par y* x *un real arbitrario.*

Demostración. a) Es consecuencia directa de los contraejemplos presentados más arriba.

b) Se sigue de los siguientes contraejemplos:
$(-1)^1(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)1 = -1$, mientras que $(-1)^{\frac{2}{6}+1} = (-1)^{\frac{8}{6}} = 1$, por lo que $(-1)^1(-1)^{\frac{2}{6}} \neq (-1)^{\frac{2}{6}+1}$.
$\frac{(-1)^1}{(-1)^{\frac{2}{6}}} = \frac{-1}{1} = -1$, mientras que $(-1)^{1-\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{4}{6}} = 1$, por lo que $\frac{(-1)^1}{(-1)^{\frac{2}{6}}} \neq (-1)^{1-\frac{2}{6}}$.

c) Sea $\sqrt[n]{x^n} = b$, entonces $b^n = x^n$. Si n es impar entonces $b = x$, por lo que $\sqrt[n]{x^n} = x$, si n es par entonces b es positivo y además $b^n = (-x)^n$, en consecuencia $b = |x|$, es decir, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

■

3. DERIVADA

En el teorema 3.1 de esta sección, se encuentra una fórmula para la derivada, la cual es válida en el dominio de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$. En la prueba se utiliza la derivada de una potencia entera, y teniendo presente la parte b) de la proposición 2.1, sólo se utilizan las propiedades de los exponentes enteros.

Teorema 3.1. *Derivada de la función raíz de una potencia entera.*
Si n *es un entero positivo,* m *un entero,* $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ *una función de valor real, entonces, para toda* x *diferente de cero en el dominio de definición de la función* f*, se cumple que:* $D_x[\sqrt[n]{x^m}] = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x}$

Demostración. Sea $u = \sqrt[n]{x^m}$, por lo que $u^n = x^m$, derivando con respecto a x se tiene $nu^{n-1}u' = mx^{m-1}$, al ser x diferente de cero, u también lo es, por lo que $\frac{nu^n u'}{u} = mx^{m-1}$, de donde $\frac{nx^m u'}{\sqrt[n]{x^m}} = mx^{m-1}$, luego $u' = \frac{mx^{m-1}\sqrt[n]{x^m}}{nx^m} = \frac{m\sqrt[n]{x^m}}{nx^{m-(m-1)}} = \frac{m\sqrt[n]{x^m}}{nx}$, y se concluye que $D_x[\sqrt[n]{x^m}] = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x}$. ■

Se ha probado de esta manera lo que se pide, para cada real positivo x en el caso que m sea un entero impar y n entero positivo par, y para cada real x diferente de cero en los demás casos. Además, es un hecho ampliamente conocido, que cuando la función está definida en $x = 0$, también es derivable en este valor, excepto cuando $m < n$, y cuando $m = n$ con n par.

Solución al problema 2.

El valor correcto de la pendiente pedida en el problema 2, puede ser encontrado aplicando la nueva fórmula presentada en el teorema 3.1, resultando que $f'(x) = D_x[\sqrt[6]{x^2}] = \frac{2}{6}\frac{\sqrt[6]{x^2}}{x}$, lo cual implica que la pendiente correcta es: $f'(-1) = \frac{2}{6}\frac{\sqrt[6]{(-1)^2}}{-1} = -\frac{2}{6}$.

4. ANTI-DERIVADA

Ya se sabe que el teorema 3.1 proporciona una fórmula para la derivada, la cual es válida en todo el dominio de la función (salvo en $x = 0$ cuando $m < n$, y cuando $m = n$ con n par). A partir de este resultado, y utilizando el teorema fundamental del cálculo, en el teorema 4.1, se obtiene una fórmula para la anti-derivada, la cual es válida en todo el dominio de la función.

Teorema 4.1. *Anti-derivada de la función raíz de una potencia entera.*
Sea n un entero positivo, m un entero, $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ una función de valor real. Para toda x en el dominio de definición de la función f, se cumple que:

$$\int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} + C, \;\; \textit{donde } m \neq -n \tag{4}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} D_x\left[\frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m}\right] &= \frac{n}{m+n}D_x[x\sqrt[n]{x^m}] = \frac{n}{m+n}[D_x[x]\sqrt[n]{x^m} + xD_x[\sqrt[n]{x^m}]] \\ &= \frac{n}{m+n}\left[\sqrt[n]{x^m} + x\frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x}\right] = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^m}\left[1+\frac{m}{n}\right] \\ &= \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^m}\left[\frac{n+m}{n}\right] = \sqrt[n]{x^m} \end{aligned} \tag{5}$$

■

La prueba anterior tiene la restricción $x \neq 0$. Para que la prueba sea válida en todo el dominio de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ cuando su dominio incluye $x = 0$, se debe probar que $F(x) = \frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m}$ es derivable en $x = 0$, lo cual se hace a continuación:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} - \frac{n}{m+n}0\sqrt[n]{0^m}}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^m}\right) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

En consecuencia, $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} + C$ donde $m \neq -n$, en el dominio de la función.

Solución al problema 1.

El valor correcto del área pedida en el problema 1, puede ser encontrado aplicando la nueva fórmula presentada en el teorema 4.1, resultando que el área correcta es:

$$\int_{-1}^{0}\sqrt[6]{x^2}dx = \left[\frac{6}{2+6}x\sqrt[6]{x^2}\right]_{-1}^{0} = \frac{6}{8}0\sqrt[6]{0^2} - \frac{6}{8}(-1)\sqrt[6]{(-1)^2} = \frac{6}{8}. \tag{7}$$

5. DERIVADAS Y ANTI-DERIVADAS DE LAS POTENCIAS RACIONALES

Hasta el momento se tiene que las fórmulas tradicionales, no aplican para el caso de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, cuando m y n son pares y x un real negativo, además, con los teoremas 3.1 y 4.1, se han encontrado fórmulas que sí aplican en todo el dominio de esta función. En esta sección, con los teoremas 5.2 y 5.3, se establece la conexión entre ambos tipos de fórmulas, y se ajustan las fórmulas tradicionales cuando m y n son pares y x un real negativo. Antes de hacerlo, en el teorema 5.1, se presentan algunos resultados, los cuales son claves para lograr la conexión propuesta.

Teorema 5.1. *Propiedades de la raíz n-ésima.*

a) $\sqrt[n]{\frac{x}{z}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{z}}$, *cuando n es un entero positivo impar, x es un real, con z es un real diferente de cero; y también cuando n es un entero positivo par, x un real no negativo, con z un real positivo.*

b) $\sqrt[n]{xz} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{z}$, *cuando n es un entero positivo impar, y tanto x como z son reales; y también cuando n es un entero positivo par, y tanto x como z son reales no negativos.*

c) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$, *en todo el dominio de la función $f(x) = (\sqrt[n]{x})^m$, es decir, x es un real no negativo cuando n es par, y x es un real arbitrario cuando n es impar. Pero, $\sqrt[n]{x^m} \neq (\sqrt[n]{x})^m$, cuando n es un entero positivo par y m un entero par, con x un real negativo.*

Demostración. a) Sean $\sqrt[n]{x} = a$, $\sqrt[n]{z} = b$, entonces $a^n = x, b^n = z$, como $z \neq 0$ entonces $b \neq 0$ y se obtiene $\frac{x}{z} = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. Si n es impar entonces $\sqrt[n]{\frac{x}{z}} = \frac{a}{b}$, por lo que $\sqrt[n]{\frac{x}{z}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{z}}$, si n es par con x y z positivos entonces a, b y $\frac{a}{b}$ son positivos, por lo que también se infiere que $\sqrt[n]{\frac{x}{z}} = \frac{a}{b}$, es decir, $\sqrt[n]{\frac{x}{z}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{z}}$.

b) Sean $\sqrt[n]{x} = a$, $\sqrt[n]{z} = b$ entonces $a^n = x, b^n = z$, de donde se obtiene $xz = a^n b^n = (ab)^n$. Si n es impar entonces $\sqrt[n]{xz} = ab$, por lo que $\sqrt[n]{xz} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{z}$, si n es par con x y z positivos entonces a, b y ab son positivos, por lo que también se infiere que $\sqrt[n]{xz} = ab$, resultando $\sqrt[n]{xz} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{z}$.

c) Sean $\sqrt[n]{x} = a$, $\sqrt[n]{x^m} = b$, entonces $a^n = x, b^n = x^m$, y también $a^{nm} = x^m$, de donde $b^n = a^{mn}$. Si n es impar entonces $b = a^m$, si n es par y x es positivo resulta que a y b son positivos, por lo que también $b = a^m$. Como en ambos casos $b = a^m$ se infiere que $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$. Por otro lado, cuando n es un entero positivo par y m un entero par con x un real negativo, $(\sqrt[n]{x})^m$ no es un número real, mientras que $\sqrt[n]{x^m}$ si lo es, en consecuencia $\sqrt[n]{x^m} \neq (\sqrt[n]{x})^m$.

■

Teorema 5.2. *Conexión entre la fórmula correcta para la derivada y la fórmula tradicional. Si se define* $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$ *entonces* *a)* $D_x[\sqrt[n]{x^m}] = D_x[x^{\frac{m}{n}}] = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$, *cuando n es un entero positivo impar, m un entero diferente de cero y x un real arbitrario (x diferente de cero cuando m es negativo); también cuando n es un entero positivo par, m un entero impar y x un real positivo; y además, cuando n es un entero positivo par, m un entero par diferente de cero y x un real positivo.*

b) $D_x[\sqrt[n]{x^m}] = D_x[x^{\frac{m}{n}}] = (-1)\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$, *cuando n es un entero positivo par, m un entero par y x un real negativo.*

c) $D_x\left[(\sqrt[n]{x})^m\right] = D_x\left[x^{\frac{m}{n}}\right] = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$, *en todo el dominio de la función $f(x) = (\sqrt[n]{x})^m$, es decir, x es un real no negativo cuando n es par, y x es un real arbitrario cuando n es impar.*

Demostración. Aplicando el teorema 3.1, la parte a) del teorema 5.1, las partes b), c) y d) de la proposición 2.1, y las propiedades de los exponentes enteros, resulta que:

a) $D_x\left[x^{\frac{m}{n}}\right] = D_x[\sqrt[n]{x^m}] = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x} = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[n]{x^n}} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{\frac{x^m}{x^n}} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$.

b) $D_x\left[x^{\frac{m}{n}}\right] = D_x[\sqrt[n]{x^m}] = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x} = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{(-\sqrt[n]{x^n})} = \left(-\frac{m}{n}\right)\sqrt[n]{\frac{x^m}{x^n}} = \left(-\frac{m}{n}\right)\sqrt[n]{x^{m-n}} = \left(-\frac{m}{n}\right)x^{\frac{m-n}{n}} = (-1)\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

c) Consecuencia directa de la parte a) de este teorema y de la parte c) del teorema 5.1.

■

Teorema 5.3. *Conexión entre la fórmula correcta para la anti-derivada y la fórmula tradicional. Si se define $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$ entonces*

a) $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \int x^{\frac{m}{n}}dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$, *cuando n es un entero positivo impar, m un entero y x un real arbitrario (x diferente de cero cuando m no es positivo); también cuando n es un entero positivo par, m un entero impar y x un real positivo; y además cuando n es un entero positivo par, m un entero par y x un real positivo.*

b) $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \int x^{\frac{m}{n}}dx = (-1)\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$, *cuando n es un entero positivo par, m un entero par y x un real negativo.*

c) $\int (\sqrt[n]{x})^m dx = \int x^{\frac{m}{n}}dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$, *en todo el dominio de la función $f(x) = (\sqrt[n]{x})^m$.*

Demostración. Aplicando el teorema 4.1, la parte b) del teorema 5.1, las partes b), c) y d) de la proposición 2.1, y las propiedades de los exponentes enteros, resulta que a)

$$\begin{aligned}\int x^{\frac{m}{n}}dx &= \int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} + C = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^n}\sqrt[n]{x^m} + C = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^n x^m} + C \\ &= \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{n+m}} + C = \frac{n}{m+n}x^{\frac{n+m}{n}} + C = \frac{1}{\frac{n+m}{n}}x^{\frac{n+m}{n}} + C = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int x^{\frac{m}{n}}dx &= \int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} + C = \frac{n}{m+n}\left(-\sqrt[n]{x^n}\right)\sqrt[n]{x^m} + C = \frac{(-n)}{m+n}\sqrt[n]{x^n x^m} + C \\ &= \frac{(-n)}{m+n}\sqrt[n]{x^{n+m}} + C = \frac{-n}{m+n}x^{\frac{n+m}{n}} + C = \frac{(-1)}{\frac{n+m}{n}}x^{\frac{n+m}{n}} + C = (-1)\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C\end{aligned}$$

c) Consecuencia directa de la parte a) de este teorema y de la parte c) del teorema 5.1.

■

6. CONSIDERACIONES EN EL CAMPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Al observar los resultados obtenidos en los teoremas 5.2 y 5.3, surge una pregunta natural: ¿Ocurre algo similar en el campo de los números complejos? La respuesta es no. A continuación, esto se prueba en la proposición 6.1; para realizar esta prueba es necesario tener en cuenta los siguientes resultados sobre los números complejos.

El número complejo $z = x + iy$, donde tanto x como y son números reales, puede ser representado en forma polar como $z = r(cos\theta + isen\theta)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el módulo de z; cuando x es diferente de cero, $\theta = Arctan\left[\frac{y}{x}\right]$ es el argumento de z; cuando x es cero y y es positivo, $\theta = \frac{\pi}{2}$, cuando x es cero y y es negativo, $\theta = -\frac{\pi}{2}$; es decir, θ es el ángulo que forma z con el eje real positivo cuando z se interpreta como un radio vector.

Por otro lado, en Merzbach & Boyer (2011) se muestra que, en relación con el problema de los logaritmos de números negativos, Euler, en 1747 presenta la fórmula $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$. Como consecuencia de esta fórmula y de la representación polar, se obtiene la representación exponencial $z = re^{i\theta}$.

Para ser utilizado en la prueba de la proposición 6.1, es importante notar que:

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} &= \frac{cos\theta_1 + isen\theta_1}{cos\theta_2 + isen\theta_2} = (cos\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) + i(sen\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_2 cos\theta_1) \\ &= cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2) = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}\end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, y como consecuencia se tiene la fórmula (hallada por Moivre en 1707):

$$(e^{i\theta})^n = (cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta) = e^{in\theta},$$

de lo anterior resulta que $z^n = re^{in\theta}$.

Respecto a la igualdad de complejos, se tiene que, $r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$ si y sólo si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$ donde k es un entero.

Por otro lado, cada complejo tiene n raíces n-ésimas:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = \left\{c_k \, : \, c_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \text{ con k } = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\} \tag{8}$$

En consecuencia,

$$\sqrt[n]{z^m} = (z^m)^{\frac{1}{n}} = (r^m e^{im\theta})^{\frac{1}{n}} = \left\{c_k \, : \, c_k = \sqrt[n]{r^m}e^{i\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)} \text{ con k } = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\} \tag{9}$$

En Katz (2009), se afirma que Euler, en un trabajo publicado en 1777, establece que una función compleja, $f(x+yi)$, puede ser expresada de la forma $u(x,y)+iv(x,y)$. Siguiendo esta idea, Cauchy, en una memoria publicada 1827, obtiene las actualmente llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann*, además, Riemann en 1851, en su tesis doctoral, *Foundations for a General Theory of Functions of One Complex Variable (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse)*, convierte estas ecuaciones en fundamentales para el desarrollo de las funciones de variable compleja.

En Churchill (1986) se prueba que, si $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, entonces las *ecuaciones Cauchy-Riemann* son las siguientes: $u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \frac{1}{r}u_\theta = -v_r$, y ocurre que, si $z = re^{i\theta}$ las satisface, entonces $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r - iv_r)$.

Proposición 6.1. *Derivada de la raíz de una potencia entera en el campo de los números complejos.*

Si $f(z) = \sqrt[n]{z^m} = (z^m)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{m}{n}}e^{i\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)}$ *para algún entero* k *donde* $0 \leq k \leq n-1$, *entonces*

$$f'(z) = D_z\left[\sqrt[n]{z^m}\right] = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{z^m}}{z} = \frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}$$

Demostración. Como $\sqrt[n]{z^m} = r^{\frac{m}{n}}e^{i\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)} = r^{\frac{m}{n}}\left(cos\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)\right)$. Tomando

$$u(r,\theta) = r^{\frac{m}{n}}cos\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right), v(r,\theta) = r^{\frac{m}{n}}sen\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right),$$

resulta que:

$$\begin{aligned}
u_r &= \left(\frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}}{r}\right)\cos\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right),\ v_\theta = r^{\frac{m}{n}}\left(\frac{m}{n}\cos\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)\right),\\
u_\theta &= r^{\frac{m}{n}}\left(-\frac{m}{n}sen\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)\right),\ v_r = \left(\frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}}{r}\right)sen\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)
\end{aligned}$$

Observando que se satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*: $u_r = \dfrac{1}{r}v_\theta, \frac{1}{r}u_\theta = -v_r$, se puede asegurar que $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r - iv_r)$, es decir:

$$\begin{aligned}
D_z\left[\sqrt[n]{z^m}\right] &= f'(z) = e^{-i\theta}\left[\left(\frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}}{r}\right)cos\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right) - i\left(\frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}}{r}\right)sen\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)\right]\\
&= \left(\frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}}{r}\right)\frac{1}{e^{i\theta}}\left[cos\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right) - isen\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}\right)\right] = \left(\frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}}{r}\right)\frac{e^{i\frac{m\theta+2\pi k}{n}}}{e^{i\theta}}\\
&= \frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}e^{i\frac{m\theta+2\pi k}{n}}}{re^{i\theta}} = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{z^m}}{z}
\end{aligned}$$

Pero también, como r es positivo:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n}\frac{r^{\frac{m}{n}}e^{i\frac{m\theta+2\pi k}{n}}}{re^{i\theta}} &= \frac{m}{n}r^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}e^{i\left(\frac{m\theta+2\pi k}{n}-\theta\right)} = \frac{m}{n}r^{\left(\frac{m-n}{n}\right)}\\
e^{i\left(\frac{(m-n)\theta+2\pi k}{n}\right)} &= \frac{m}{n}r^{\left(\frac{m-n}{n}\right)}e^{i\left(\frac{m\theta+2ßk-n\theta}{n}\right)} = \frac{m}{n}z^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}.
\end{aligned}$$

Concluyéndose finalmente que:

$$D_z\left[\sqrt[n]{z^m}\right] = \frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{z^m}}{z} = \frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}.$$

■

7. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

Como consecuencia de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se tienen las siguientes conclusiones y observaciones:

Conclusión 1. Para la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, cuando n es un entero positivo par, m un entero par y x un real negativo, la derivada no coincide con la expresión $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ y la anti-derivada no coincide con la expresión $\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$, pero la derivada y la anti-derivada si coinciden con estas expresiones en los demás casos en los que la función esté definida.

Definiendo $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$, y utilizando los teoremas 3.1, 4.1, 5.2 y 5.3, en la tabla 1 se presentan los ajustes a las fórmulas tradicionales, mediante la conexión con las nuevas fórmulas.

Tabla 1: Fórmulas y restricciones

Fórmulas	Restricciones
$\frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x} = D_x\left[\sqrt[n]{x^m}\right] = D_x\left[x^{\frac{m}{n}}\right] = (-1)\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = (-1)\frac{m}{n}\sqrt[n]{\frac{x^m}{x^n}}$ $\frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} = \int\sqrt[n]{x^m}dx = \int x^{\frac{m}{n}}dx = (-1)\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{(-1)n}{m+n}\sqrt[n]{x^{m+n}}$	Cuando n es un entero positivo par, m un entero par y x un real negativo.
$\frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x} = D_x\left[\sqrt[n]{x^m}\right] = D_x\left[x^{\frac{m}{n}}\right] = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{\frac{x^m}{x^n}}$	En los demás casos
$\frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} = \int\sqrt[n]{x^m}dx = \int x^{\frac{m}{n}}dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{m+n}}$	

Observar que $\frac{m}{n}\frac{\sqrt[n]{x^m}}{x} = (-1)\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ y $\frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} = (-1)\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$, cuando m y n son pares y x es negativo.

Conclusión 2. Se debe enfatizar que, para el caso de la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, las restricciones en las fórmulas tradicionales para la derivada y la anti-derivada, tal como se señala en la proposición 6.1, sólo se requieren en el campo de los números reales, concretamente con los reales negativos cuando m y n son pares; no hay restricciones con la función $g(x) = (\sqrt[n]{x})^m$, y tampoco con la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ en el campo de los números complejos.

Conclusión 3. Es importante tener presente que, si n es un entero positivo, m un entero, y tanto p como q son racionales, entonces tal como se muestra en la proposición 2.1, no se puede asegurar que las siguientes ecuaciones se satisfacen siempre: $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m, x^p x^q = x^{p+q}, \dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$.

Como consecuencia de la conclusión anterior, los razonamientos presentados en los textos Edwards *et al.* (2008), Leithold (1998), Purcell *et al.* (2007), Thomas (2005), con los cuales se prueba la validez de las fórmulas tradicionales para el caso la función $g(x) = (\sqrt[n]{x})^m$, no pueden ser aplicados a la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, cuando m y n son pares y x un real negativo.

Observación 7.1. *Algunas veces se restringe la validez de las fórmulas tradicionales a los casos en los cuales m y n sean primos entre sí. Observando la tabla 1, es claro que bajo esta restricción las fórmulas funcionan, sin embargo, esta restricción no es adecuada, puesto que las fórmulas también funcionan en muchos casos en los cuales la restricción no se cumple, por ejemplo, con $\frac{m}{n} = \frac{3}{6}$. Debe quedar claro, que las fórmulas tradicionales no aplican con la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, únicamente, cuando m y n son ambos pares y x es un real negativo.*

Observación 7.2. *Se acostumbra extender, las funciones consideradas en este trabajo a funciones con exponentes reales, mediante la definición $x^c = e^{(c.ln(x))}$, donde c es un número real. Vale anotar, que las fórmulas tradicionales aplican con estas funciones, puesto que su dominio no incluye los reales negativos; en consecuencia, las funciones definidas de esta manera no son relevantes en este* *trabajo.*

Finalmente, considerando que la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, satisface las siguientes ecuaciones:

$$f'(x) = k_1 \frac{f(x)}{x}, \int f(x)dx = k_2 x f(x) + C,$$

donde k_1 y k_2 son constantes reales; se plantea, para ser desarrollado en trabajos posteriores, un estudio sobre la familia de funciones que satisfacen estas ecuaciones.

8. AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a los siguientes profesores de la Universidad EAFIT: Carlos Alberto Cadavid, José Albeiro Sánchez y Pedro Vicente Esteban.

Referencias

Apostol, T. (1967). Calculus, Volume 1. *(Jon Wiley & Sons)*(p. 30, 81, 93, 120, 161, 162, 163, 166, 397, 368).

Boyer, C. B. (1970). The history of the calculus. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 1(**1**), 60-86.

Churchill, R. V. & Brown, J. W. (1986). Variable compleja y aplicaciones. *(McGraw-Hill)* (p. 14-22, 60, 61).

Edwards, C. H.; Edwards, D. E. H. & Penney, D. E. (2008). Cálculo con trascendentes tempranas. *(Pearson Educación)*(p. 121, 126, 138, 139, 140, 319, 373).

González, J.; Bravo, J. & Mesa, F. (2012). Cálculo integral en una variable. *(Ecoe Ediciones)* (p.12).

Green, D. R. (1979). Historical topics: The development of integral calculus. *Mathematics in School*, 8(**3**), 24-28.

Katz, V. (2009). A history of mathematics. (Addison-Wesley)(p. 797, 804).

Larson, R. & Edwards, B. (2016). Cálculo Tomo 1. *(Cengage Learning)* (p. 107, 122, 147, 246).

Lax, P. & Terrell, M. (2014). Calculus with applications. *(Springer)* (p. 135, 141, 276).

Leithold, L. (1998). El cálculo. *(Oxford– Harla)* (p.174, 175, 300, 1253, 1259).

Mahmudov, E. (2013). Single variable differential and integral calculus. Mathematical analysis. *(Atlantis Press)* (p. 119, 121, 225).

Malik, M. (1984). A note on Cavalieri integration. Mathematics Magazine, 57(**3**), 154-156.

Mercer, P. (2014). More calculus of a single variable. *(Springer)* (p.78, 79, 80, 253).

Merzbach, U., & Boyer, C. (2011). A history of mathematics. *(John Wiley & Sons)* (p. 413).

Purcell, E.; Varberg, D. & Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. *(Pearson Educación)* (p. 108, 133, 198, A5).

Rosenthal, A. (1951). The history of calculus. The American Mathematical Monthly, 58(**2**), 75-86.

Schinazi, R. (2013). From calculus to analysis. *(Springer)* (p. 152, 174).

Spivak, M. (1996). Cálculo infinitesimal. *(Reverté)* (p. 330, 331, 377, 404).

Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable trascendentes tempranas. *(Cengage Learning)* (p. 175, 176, 345, 398).

Thomas, G. (2005). Cálculo, una variable. *(Pearson Educación)* (p. 160, 166, 209, 210, 369).

Zill, D., & Wright, W. (2011). Cálculo: trascendentes tempranas. *(MacGraw-Hill)* (p. 10, 131, 149, 269).