

DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN DE SISTEMAS LINEALES EN \mathbb{R}^3 ^a

BIFURCATION DIAGRAM OF LINEAR SYSTEMS IN \mathbb{R}^3

D. CORTÉS Z.^b, A. GUTIÉRREZ G.^b, J. S. LONDOÑO Q.^b

Recibido 23-02-2016, aceptado 23-05-2016, versión final 30-06-2016.

Artículo Investigación

RESUMEN: Se estudia la dinámica de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^3 en términos de los invariantes de la matriz asociada (traza, subtraza y determinante). La técnica utilizada se basa en algunas propiedades del polinomio característico asociado a matrices con determinante cero. Además, es demostrada la existencia de cuatro superficies de bifurcación que se expresan en términos de los invariantes de la matriz.

PALABRAS CLAVE: Bifurcación, sistemas lineales.

ABSTRACT: Linear dynamic systems of differential equations on \mathbb{R}^3 in terms of invariants associated matrix are studied. The technique used is based on some properties of the characteristic polynomial associated with matrices with zero determinant. It has also demonstrated the existence of four surfaces bifurcation expressed in terms of the invariants of the matrix.

KEYWORDS: Bifurcation, linear systems.

1. INTRODUCCIÓN

Varios problemas de ingeniería, ciencias sociales y ciencias básicas, ver por ejemplo Blanchard *et al.* (1998); Brown (2007); Taubes (2012); Xie (2014), se pueden expresar como sistemas autónomos:

$$\frac{dY}{dt} = f(Y) \quad (1)$$

donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable. En general no es posible resolver el problema no lineal dado en la ecuación (1), así que tener información cualitativa del comportamiento local de las soluciones de equilibrio, es decir, soluciones constantes de la ecuación (1) puede ser de gran ayuda. En particular, el teorema de Hartman-Grobman, ver Perko (2000), muestra que topológicamente el comportamiento local del sistema no lineal dado en (1) cerca de una solución de equilibrio Y_0 , es típicamente determinada por el comportamiento del sistema lineal:

^aCortés, D., Gutiérrez, A., Londoño, J.S. (2016). Diagrama de bifurcación de sistemas lineales en \mathbb{R}^3 *Revista de la Facultad de Ciencias*, 5 (1), 160–169. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v5n1.55857>

^b Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira-Colombia. danielcortezapata@utp.edu.co

$$\frac{dY}{dt} = AY, \tag{2}$$

cerca del origen, donde la matriz $A = Df(Y_0)$. Por este motivo, el estudio de la dinámica de las soluciones cercanas al origen presentadas en la (2) es importante desde el punto de vista teórico y práctico. Ahora bien, el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación (2) cerca del origen, recae en los valores propios de la matriz A que, a su vez, son los ceros de un polinomio de grado n conocido como polinomio característico de A . Así el problema se hace puramente algebraico.

A mediados del siglo pasado se establecieron diferentes criterios para determinar las raíces del polinomio característico, ver Hurwitz (1895); Routh (1877); Viola (1939) y en Marden (1966) se presentan métodos para determinar la naturaleza de las raíces de un polinomio.

Para caracterizar el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación (2) cerca del origen, es necesario conocer el signo de la parte real de los valores propios, pero los criterios antes mencionados sólo sirven para determinar si las raíces del polinomio característico son reales o no. En este artículo se establece el signo de las raíces del polinomio característico de la matriz A del sistema lineal dado en (2) en el caso de $n = 3$.

Ahora se considera la ecuación (2) con $n = 3$. Sean T, S y D la traza, subtraza y determinante de la matriz A respectivamente y λ_1, λ_2 y λ_3 los valores propios asociados, se tiene que:

$$T = \sum_{i=1}^3 \lambda_i, \quad S = \sum_{\substack{j,i=1 \\ i < j}}^3 \lambda_i \lambda_j, \quad D = \prod_{i=1}^3 \lambda_i.$$

Se definen las siguientes funciones:

$$H_+ = \frac{T(2T^2 - 9S) + 2(T^2 - 3S)^{3/2}}{27},$$

$$H_- = \frac{T(2T^2 - 9S) - 2(T^2 - 3S)^{3/2}}{27}.$$

Así todos los posibles comportamientos de las soluciones de la ecuación (2), alrededor del origen, se pueden sintetizar en el espacio TSD , conocido como diagrama de bifurcación, donde se agrupan las soluciones con la misma “estructura cualitativa” y las superficies que separan esas estructuras se llaman superficies de bifurcación, donde “la aparición de un diagrama de fase topológicamente no equivalente bajo una variación de parámetros se denomina bifurcación”, ver Kuznetsov (2004).

Ahora se enuncia el resultado principal:

Teorema 1. *Los sistemas lineales (2) con $n = 3$ tienen las siguientes superficies de bifurcación:*

$$A_1 = \{(T, S, D) : 3S \leq T^2, D = -H_+\},$$

$$A_2 = \{(T, S, D) : 3S \leq T^2, D = -H_-\},$$

$$A_3 = \{(T, S, D) : 0 \leq S, D = TS\},$$

$$A_4 = \{(T, S, D) : D = 0\}.$$

Obsérvese que las superficies A_i , $i = 1, \dots, 4$, son superficies de bifurcación debido a que en A_1 y A_2 todos los valores propios son reales, al menos uno tiene multiplicidad algebraica dos y separa los valores propios reales con los que tienen parte imaginaria y real diferente de cero. En la superficie A_3 dos de los valores propios son imaginarios puros y separa los valores propios no reales con parte real positiva y negativa. Por último, la superficie A_4 tiene al menos un valor propio igual a cero y separa el signo positivo o negativo de la parte real de los otros valores propios. En las secciones subsiguientes la caracterización del signo de la parte real de las raíces en los polinomios característicos se basa en el estudio del polinomio característico cuando $n = 2$, clasificando los polinomios tipo y trasladándolos verticalmente con el fin de que D sea función de T y S . Es necesario resaltar que no se utilizó la fórmula de cuadratura de Cardano-Tartaglia. Esta idea puede ser generalizada al caso $n = k + 1$ conociendo el diagrama de bifurcación cuando $n = k$ y el diagrama de bifurcación con $n = k$ será una de las hipersuperficies de bifurcación cuando $n = k + 1$. Un aporte de interés es el Teorema 5, porque si bien se conoce que todo polinomio de grado tres tiene una raíz real, es menos conocida la condición dada en el Teorema 5 sobre la traslación vertical del polinomio para que las raíces no reales tengan parte real cero.

Este artículo está estructurado en tres secciones. Después de la introducción, en la sección 2 se estudia la superficie A_4 y se clasifican los polinomios tipo para hacer la demostración del resultado principal y finalmente en la sección 3 se demuestra el resultado principal.

2. EL PLANO T-S

La ecuación característica de la matriz A asociada, se puede escribir en términos de T , S y D como:

$$P(\lambda) := -\lambda^3 + T\lambda^2 - S\lambda + D = 0. \quad (3)$$

Para entender cómo cambia el signo de la parte real de los valores propios de A , se estudia primero la ecuación (3) para el caso $D = 0$, seguido de ello se estudiará lo que sucede con $D \neq 0$. Para el primer caso se tiene que al menos uno de los valores propios es cero y el estudio de los otros dos valores propios se simplifica a una ecuación de segundo orden. En efecto, la ecuación (3) es equivalente a $-\lambda(\lambda^2 - T\lambda + S) = 0$. Un cálculo sencillo muestra que las otras dos raíces, de la ecuación anterior, son reales si y solamente si $T^2 \geq 4S$.

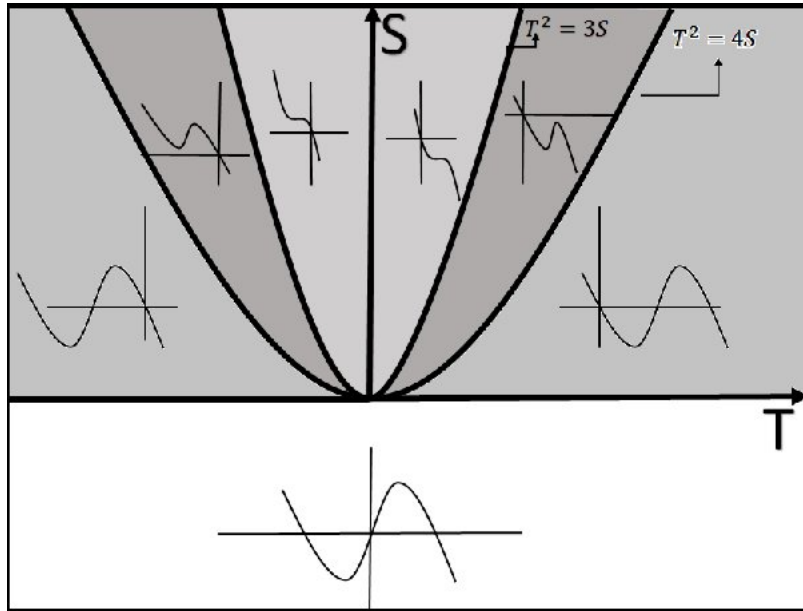


Figura 1: Gráficos de los polinomios de la ecuación (3) con $D = 0$.

Por consiguiente, en el plano $T - S$ se tiene que $\lambda_1 = 0$ y

- $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ si $S \leq \frac{T^2}{4}$. Más aún,
 - $\lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ siempre que $S \leq 0$.
 - $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ siempre que $0 < S \leq \frac{T^2}{4}$. De manera que λ_2, λ_3 son positivos (respectivamente negativos) si además $T > 0$ (respectivamente $T < 0$).
- $\lambda = \lambda_2 = \bar{\lambda}_3$ y $I(\lambda) \neq 0$ si $S > \frac{T^2}{4}$. Más aún,
 - $R(\lambda) = 0$ siempre que $T = 0$.
 - $R(\lambda) > 0$ (respectivamente $R(\lambda) < 0$) siempre que $S > \frac{T^2}{4}$ y $T > 0$ (respectivamente $T < 0$).

Como se esperaba, el comportamiento cualitativo de λ_2 y λ_3 coincide con el diagrama de bifurcación de la ecuación(2) para $n = 2$, ver Blanchard *et al.* (1998);Devaney *et al.* (2004). En la figura 1 se ilustran los polinomios tipo de cada región en el plano $T - S$.

Teorema 2. *Todos los polinomios asociados a la ecuación (3), con $D = 0$, en el plano $T - S$ que están definidos en la región $3S \leq T^2$ tienen un valor máximo (respectivamente mínimo) relativo en H_+ (respectivamente H_-), mientras si $3S > T^2$ no tienen máximos ni mínimos relativos.*

Demostración. Se verifica que $P'(\lambda)$ es cero si y solo si $3S \leq T^2$, luego se evalúan los ceros de $P'(\lambda) = 0$ en $P(\lambda)$. ■

Este resultado permitirá la clasificación de las superficies de bifurcación como se verá en la próxima sección.

3. DEMOSTRACIÓN DEL RESULTADO PRINCIPAL

De la sección anterior, se conocen los polinomios tipo P en el plano $T-S$. La idea ahora es trasladar estos polinomios tipo verticalmente y así tener control de los ceros de la ecuación (3) con $D \neq 0$. El siguiente teorema expone las condiciones para que las raíces de la ecuación (3) sean reales.

Teorema 3. *Si $S < \frac{T^2}{3}$ y $-H_+ < D < -H_-$ entonces las raíces de la ecuación (3) son reales.*

Demostración. Del Teorema 2, se tiene que el polinomio asociado a la ecuación (3) con $D = 0$ tiene un valor máximo (respectivamente mínimo) relativo en H_+ (respectivamente H_-). Más aún, si $S < \frac{T^2}{4}$, con un cálculo directo se muestra que $H_- < 0 < H_+$, siempre que $S \neq 0$. Si $S = 0$ y $T > 0$ (respectivamente $T < 0$) entonces $H_- = 0 < H_+$ (respectivamente $H_- < H_+ = 0$). En el caso $\frac{T^2}{4} \leq S < \frac{T^2}{3}$ con $T > 0$ (respectivamente $T < 0$), $H_- < H_+ \leq 0$ (respectivamente $0 \leq H_- < H_+$). Luego, el polinomio asociado a la ecuación (3) con $-H_+ < D < -H_-$ tiene sus valores máximo o mínimo relativo en $D + H_+$ o $D + H_-$ y $(D + H_+)(D + H_-) < 0$, en consecuencia, del Teorema del Valor Intermedio se obtiene que entre $(D + H_+)$ y $(D + H_-)$ existe una raíz simple. Además usando el hecho de que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = \infty$ se muestra que P tiene otro par de raíces reales. ■

Y ahora se muestran las regiones en términos de T, S y D donde los valores propios reales tienen un signo determinado.

Corolario 4. *Bajo las condiciones del Teorema 3 se tiene que las raíces de (3):*

1. *Son reales no negativas (respectivamente no positivas) siempre que $0 < S < \frac{T^2}{3}$, con $T > 0$ (respectivamente $T < 0$) y $0 \leq D < -H_-$ (respectivamente $-H_+ < D \leq 0$).*
2. *Son dos reales positivas (respectivamente negativas) y otra negativa (respectivamente positiva), siempre que $0 < S < \frac{T^2}{4}$ con $T > 0$ (respectivamente $T < 0$) y $-H_+ < D < 0$ (respectivamente $0 < D < -H_-$).*
3. *Son dos reales no positivas (respectivamente no negativas) y otra positiva (respectivamente negativa) siempre que $S < 0$ y $0 \leq D < -H_-$ (respectivamente $-H_+ < D \leq 0$).*

Demostración. El argumento de la demostración es análogo al del Teorema 3, además en cada caso se debe tener en cuenta los signos de los valores de λ donde el polinomio asociado a la ecuación (3) con $D = 0$, alcanza los valores máximo y mínimo relativos. ■

El siguiente Teorema permite las condiciones bajo las cuales dos de los ceros de la ecuación (3) tienen parte real cero.

Teorema 5. *La ecuación (3) tiene dos raíces imaginarias puras si y solo si $D = TS$ y $S > 0$.*

Demostración. Sean $\lambda = \lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ los valores propios asociados a la matriz de la ecuación (2), que también son las raíces de la ecuación (3), entonces $T = \lambda + 2a$, $S = 2a\lambda + a^2 + b^2$ y $D = \lambda(a^2 + b^2)$. Si $a = 0$ entonces $D = \lambda b^2 = TS$ y $S > 0$. Ahora el recíproco, si $D = TS$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda(a^2 + b^2) &= (\lambda + 2a)(2a\lambda + a^2 + b^2) \\ &= \lambda(a^2 + b^2) + 2a(\lambda^2 + 2\lambda a + a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Entonces la igualdad se da si $a = 0$ ya que $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Ahora se caracterizan las regiones en el espacio donde dos de los valores propios son no reales, indicando el signo de la parte real.

Teorema 6. *Se tiene que las raíces de la ecuación (3) son $\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ si:*

1. $S < 0$ y $D > -H_-$ (respectivamente $D < -H_+$) tal que $\lambda > 0$ (respectivamente $\lambda < 0$) y $a < 0$ (respectivamente $a > 0$).
2. $S > 0$, $T > 0$ (resp $T < 0$) y $D < TS$ (respectivamente $D > TS$) tal que $a > 0$ (respectivamente $a < 0$) y $\lambda > 0$ (respectivamente $\lambda < 0$) si además $D > -H_-$ (respectivamente $D < -H_+$) y $S \leq \frac{T^2}{3}$ o $D > 0$ (respectivamente $D < 0$) y $S > \frac{T^2}{3}$.
3. $S > 0$, $T > 0$ (resp $T < 0$) y $D > TS$ (respectivamente $D < TS$) tal que $\lambda > 0$ (respectivamente $\lambda < 0$) y $a < 0$ (respectivamente $a > 0$).

Demostración. 1. Como $S < 0$ entonces $2a\lambda < 0$, lo que implica que a y λ tienen signos contrarios y como $D > -H_-$ (respectivamente $D < -H_+$) entonces el polinomio asociado a la ecuación (3) tiene una raíz real positiva (respectivamente negativa).

2. Si $D > -H_-$ y $S \leq \frac{T^2}{3}$ o $D > 0$ (respectivamente $D < 0$) y $S > \frac{T^2}{3}$ entonces el Teorema del

Valor Intermedio nos garantiza que $\lambda > 0$. Además si $S \leq \frac{T^2}{3}$ entonces un cálculo directo muestra $TS > -H_-$ y del Teorema 5 se tiene que existen $\tilde{\lambda} > 0$ y $\tilde{a} = 0$ tales que $T = \tilde{\lambda}$ cuando $D = TS$ y $T = \lambda + 2a$ cuando $-H_- < D < TS$, lo que implica que $a = \frac{\tilde{\lambda} - \lambda}{2} > 0$. El caso 3 se demuestra de forma análoga. ■

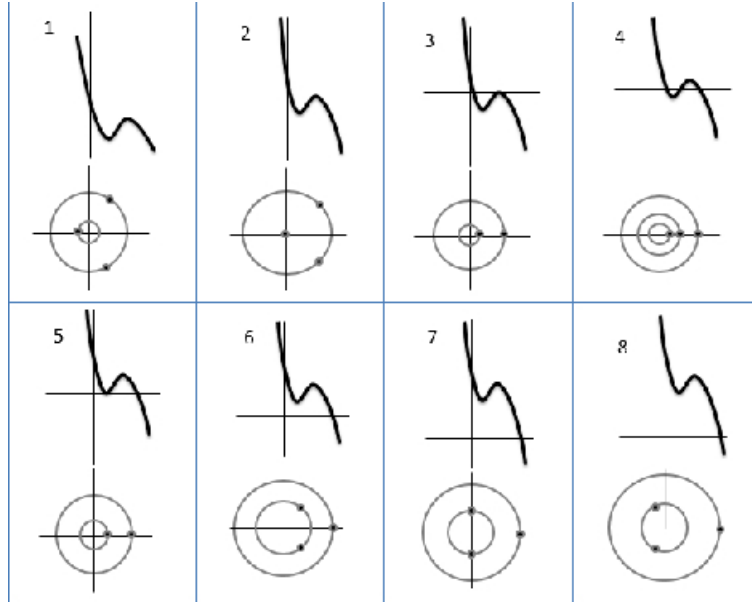


Figura 2: Ilustración del polinomio $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + D$ para diferentes valores de D .

Finalmente se hace la demostración del Teorema principal.

Teorema 1. La demostración se sigue de los Teoremas 2, 3 y 6. ■

Ejemplo 1. Como el análisis de la parte real de los ceros de la ecuación (3) caracterizan la estabilidad de la solución de equilibrio de la ecuación 2, tómesese como ejemplo ilustrativo el polinomio $P(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda$ y se estudian los ceros de la ecuación (3) para diferentes valores de D . En este caso se tiene que $T = 5$, $S = 7$, $H_+ = -1,8148$, $H_- = -3$ y $TS = 35$.

En la figura 2 se ilustran los ceros del polinomio asociado para algunos valores de D . En la parte superior se muestra el polinomio característico y en la parte inferior los ceros del mismo en el plano Complejo, representados por puntos. Como es habitual, el eje horizontal es el real y el eje vertical es el imaginario. Como el polinomio a estudiar es cúbico, existirá siempre un cero real denotado por λ , los otros dos pueden ser reales o no, en el caso en que no lo sean se denotarán por $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = a + ib$ con $b \neq 0$.

- Si $D = 0$ por el Teorema 1, se encuentra en la región A_4 en donde $3S < T^2 < 4S$, se tiene así que $\lambda = 0$ y por el Teorema 6, $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ con $a > 0$, como se puede ver en la figura 2(2).
- Si $D < 0$, se encuentra debajo de la región A_4 , se tiene que una raíz $\lambda < 0$ y por el Teorema 6-2 $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ con $b \neq 0$ y $a > 0$, como se ve en la figura 2 (1).
- Si $D = -H_+$ por el Teorema 1, se encuentra en la región A_1 , luego por el Teorema 2 y por el Teorema 3 se tiene que $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \lambda_1 < \lambda_{2,3}$, como se ve en la figura 2 (3).

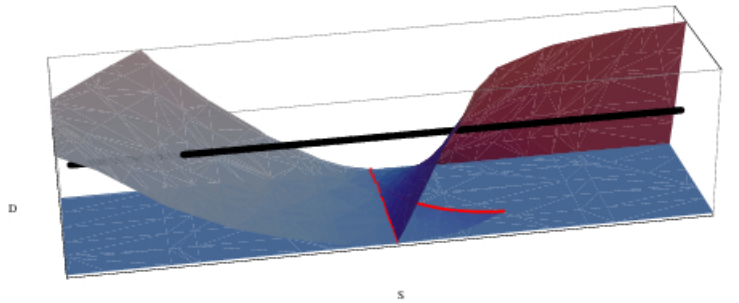


Figura 3: Ilustración del polinomio $-\lambda^3 + \lambda^2 - \alpha\lambda + 1$ para diferentes valores de α . De izquierda a derecha las superficies A_2 y A_3 .

- Si $-H_+ < D < -H_-$, se encuentra entre las regiones A_1 y A_2 , luego, por el Teorema 3 y el Corolario 4 se tienen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, como se ve en la figura 2 (4).
- Si $D = -H_-$ por el Teorema 1, se encuentra en la región A_2 , luego del Teorema 3 y del Corolario 4 se tendrá que $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \lambda_{1,2} < \lambda_3$, como se ve en la figura 2 (5).
- Si $H_- < D < TS$, se encuentra entre las regiones A_2 y A_3 ; del Teorema 6 se tiene que $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = a + ib$ con $b \neq 0, a > 0$ y $\lambda > 0$, como se ve en la figura 2 (6).
- Si $D = TS$, del Teorema 1, se encuentra en la región A_3 . Se tiene $\lambda > 0$ y por el Teorema 5, se verá que $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ con $b \neq 0, a = 0$, como se ve en la figura 2 (7).
- Si $D > TS$, se encuentra por encima de la región A_3 . Se tiene $\lambda > 0$ y del Teorema 6, $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ con $b \neq 0$ y $a < 0$, como se ve en la figura 2 (8).

Ejemplo 2. Ahora tómesese el polinomio característico $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \alpha\lambda + 1$. En este caso se tiene $T = D = 1, S = \alpha, H_-(\alpha) = \frac{2-9\alpha-2(1-3\alpha)^{\frac{3}{2}}}{27}, H_+(\alpha) = \frac{2-9\alpha+2(1-3\alpha)^{\frac{3}{2}}}{27}$ y $\hat{\alpha} = \frac{1-(6371-624\sqrt{78})^{\frac{1}{3}}}{12} - \frac{217}{12(6371-624\sqrt{78})^{\frac{1}{3}}}$. Por consiguiente, $(1, \alpha, 1)$ está por encima $A_1 \cup A_4$ lo que implica que una de las raíces de P siempre es positiva, y:

- Si $\alpha \in]-\infty, \hat{\alpha}[$ entonces por el Corolario 4-3, se tiene que las otras dos raíces de P son negativas.
- Si $\alpha = \hat{\alpha}$, entonces, por el Teorema 1, P tiene una raíz negativa con multiplicidad algebraica dos. Lo que implica que $(1, \hat{\alpha}, 1) \in A_2$.
- Si $\alpha \in]\hat{\alpha}, 1[$, entonces por el Teorema 6-1, se tiene que las otras dos raíces de P son no reales con parte real negativa. Lo que implica que $(1, \alpha, 1)$ está entre A_2 y A_3 .

- Si $\alpha = 1$, entonces P tiene dos raíces no reales con parte real cero. Lo que implica que $(1, 1, 1) \in A_3$.
- Si $\alpha \in]1, \infty[$, entonces por el Teorema 6-2, se tiene las otras dos raíces de P son no reales con parte real positiva.

Todos los casos estudiados se sintetizan en el diagrama de bifurcación ilustrado en la figura 3.

4. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a los dos jurados anónimos por sus pertinentes comentarios y sugerencias que han mejorado la presentación final del documento.

Referencias

- Blanchard P., Devaney R. L., & Hall G. R. (1998). Ecuaciones Diferenciales. International Thomson Editores. Ciudad de Mexico, México.
- Brown C. (2007). Differential Equations a modeling Approach (Quantitative Applications in the Social Sciences). Sage Publications. Los Ángeles, United States.
- Hirsh M. W., Smale S. & Devaney R. L. (2004). Differential equations, Dynamical systems: An introduction to Chaos. 2 ed. Elsevier. San Diego. U.S.A.
- Hurwitz A. (1895). Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt. *Math. Ann.* 46 (2), 273–284.
- Marden M. (1966). Geometry of Polynomials, Mathematical Surveys 3, Providence, R.I.: American Mathematical Society.
- Kuznetsov Yuri A. (2004). Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer-Verlag New York, United States.
- Perko L. (2000). Differential Equations and Dynamics Systems. Springer. California, United States.
- Routh E. J. (1877). Treatise on the Stability of a Given State of Motion. MacMillan (1877). Reprinted in 'Stability of Motion' (ed. A.T.Fuller) London 1975 (Taylor & Francis).
- Taubes C. H. (2012). Modeling Differential Equations in Biology, Second edition. Cambridge University Press. New York, United States.
- Viola T. (1939). Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali, *Rend. R. Accad. dell Scienze di Napoli*, serie IV, voll. VIII, 1937–38.

DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN DE SISTEMAS LINEALES EN \mathbb{R}^3

Xie Wei-Chau.(2014) Differential Equations for Engineers. Cambridge University Press. New York, United States.