Revista de la Facultad de Ciencias, *Rev. Fac. Cienc.* Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
V 6 N°2 julio-diciembre de 2017 • ISSN-e 2357-5749 • Artículo Investigación • Páginas 58 a 72
DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.65409

LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI[a]

THE BANACH-TARSKI PARADOX

CARLOS A. CADAVID M.[b], JUAN D. VÉLEZ C.[c]

Recibido 01-06-2017, aceptado 03-08-2017, versión final 14-09-2017.
Artículo Investigación

RESUMEN: En este artículo se explican las paradojas de Hausdorff y de Banach-Tarski.

PALABRAS CLAVE: Acción; Axioma de Elección; conjunto paradójico; medibilidad.

ABSTRACT: In this paper the Hausdorff and Banach-Tarski paradoxes are explained.

KEYWORDS: Action; Axiom of Choice; paradoxical set; measurability.

1. INTRODUCCIÓN

Se sabe que el Axioma de Elección es independiente de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Dicho de manera más precisa, se ha demostrado que si la teoría de Zermelo-Fraenkel no contiene contradicciones, entonces la teoría que se obtiene añadiéndole el Axioma de Elección carece de contradicciones, y la teoría que se obtiene añadiéndole la *negación* del Axioma de Elección también carece de contradicciones (Jech, 2008). Así, puede decirse que hay dos matemáticas, al menos en el sentido formal: matemáticas con el Axioma de Elección y matemáticas con la negación del Axioma de Elección. Sin embargo, la matemática con el Axioma de Elección es enormemente más rica que la matemática que lo niega. Por ejemplo, los resultados que se obtienen aplicando el conocido lema de Zörn (el cual es equivalente al Axioma de Elección (Jech, 2008)) serían, en algunos casos, imposibles de probar (porque la consecuencia obtenida resulta equivalente al lema de Zörn y por lo tanto, al Axioma de Elección) o, en otros casos, muy difíciles de probar. Se ha demostrado que sin el Axioma de Elección no es posible demostrar que existe un conjunto no medible en el sentido de Lebesgue. De hecho, en la matemática con la negación del Axioma de Elección es posible construir una medida invariante bajo translación sobre el conjunto de partes de los reales (Jech, 2008).

La paradoja de Banach-Tarski demuestra un hecho totalmente contraintuitivo, y su prueba involucra el Axioma de Elección. Esta paradoja dice que es posible tomar una esfera sólida en el espacio tridimensional,

[a]Álvarez, C., & Vélez, J. (2017). La paradoja de Banach-Tarski. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(**2**), 58–72. DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.65409

[b]Departamento de Ciencias Matemáticas. Universidad EAFIT. Medellín, Colombia. ccadavid@eafit.edu.co
[c]Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. jdvelez@unal.edu.co

dividirla en un número finito de piezas, de tal manera que, moviendo rígidamente algunas de ellas, se vuelve a formar una esfera sólida del mismo radio de la esfera original, moviendo rígidamente otras de las piezas ocurre lo mismo, es decir, se forma una esfera sólida del mismo radio de la original, y sobran algunas piezas que son simplemente ignoradas. Es decir, de una esfera sólida salen dos esferas sólidas iguales a la original y sobra un conjunto no vacío. Por supuesto, las piezas en que se parte la esfera original no son medibles en el sentido de Lebesgue. Se sabe que la demostración de la paradoja de Banach-Tarski no es posible sin usar el Axioma de Elección (Jech, 2008). Esta paradoja ha sido usada como evidencia de lo extraño que resulta, en ciertos aspectos, aceptar el Axioma de Elección dentro de la matemática.

El propósito de este artículo es hacer accesible a cualquier estudiante de matemáticas una demostración completa y rigurosa de este asombroso resultado. Se ha tratado de condensar en pocas páginas lo que en la literatura aparece, o bien en artículos de caracter puramente divulgativo (Wagon, 1993; Stromberg, 1979; French, 1988), o en textos algo prolijos. En las secciones 2 y 3 se sientan las bases para explicar, en las secciones 4 y 5, las paradojas de Hausdorff y de Banach-Tarski.

2. GRUPO LIBRE EN LAS LETRAS *a* Y *b*

La noción de grupo libre en dos letras será clave más adelante.

La definición precisa de grupo libre en un conjunto A puede consultarse en Rotman (2012). En este artículo sólo se considerará el caso donde $A = \{a, b\}$ es un conjunto con dos elementos a y b. De manera intuitiva, este grupo, que se denotará por $F\langle a, b\rangle$ consiste de todas las *palabras* que se pueden formar con los miembros del conjunto de símbolos

$$X = \{a^c, b^d : \text{donde } c, d, \text{ son enteros no nulos}\} \tag{1}$$

El término *palabra* significa una secuencia finita de símbolos de X en la cual no aparecen adyacentes dos potencias de a o dos potencias de b. La *longitud* de una palabra, es simplemente la cantidad de elementos de X de que está compuesta. Además, se considerará que la secuencia vacía es también una palabra, que se llamará la *identidad* y que se denotará por 1. La longitud de la identidad es cero. Este conjunto puede dotarse en forma natural de estructura de grupo, donde la multiplicación de palabras se define por inducción sobre la suma de las longitudes de ambas palabras, de la siguiente manera. Si $p = x_1x_2\dots x_n$ y $q = y_1y_2\dots y_m$ con $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in X$, son palabras ($n, m \geq 0$), entonces

1. el producto de cualquier palabra p por la identidad es igual a p. En símbolos,

$$p1 = 1p = p\ ; \tag{2}$$

2. si x_n y y_1 no son potencias de la misma letra, se define $pq = x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_m$;

3. si x_n y y_1 son potencias de la misma letra, se dice a^c y a^d (respectivamente b^c y b^d), el producto se define de acuerdo a los siguientes dos casos:

   a) $c+d \neq 0$. En este caso $pq = x_1 \ldots x_{n-1} h y_2 \ldots y_m$ donde h denota la palabra a^{c+d} (respectivamente b^{c+d}).

   b) $c+d = 0$. En este caso $pq = (x_1 x_2 \ldots x_{n-1})(y_2 \ldots y_m)$.

Por ejemplo, si $p = a^2 b^{-1} a^{-4}$ y $q = a^4 b^3 a$, el producto se computa inductivamente así:

$$pq = (a^2 b^{-1})(b^3 a) = a^2 b^2 a. \tag{3}$$

No es difícil ver que esta operación dota a $F\langle a,b \rangle$ de estructura de grupo, donde la palabra vacía, es el elemento neutro y donde el inverso de la palabra $p = x_1 \ldots x_n$ es la palabra $p^{-1} = z_1 \ldots z_n$, con z_i igual a la potencia de signo contrario a aquella dada por x_{n-i+1}.

3. ACCIONES DE GRUPOS SOBRE CONJUNTOS

La noción de *acción de un grupo sobre un conjunto*, será la base de las construcciones que se presentarán más adelante.

Definición 3.1. *Una acción a izquierda de un grupo G sobre un conjunto $X \neq \emptyset$, es una función τ que envía cada par $(g,x) \in G \times X$ en un elemento de X (que se denota por $g.x$), y que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$e.x = x$, donde $e \in G$ es el elemento neutro y x es cualquier elemento de X.*

2. *$(gh).x = g.(h.x)$ para todo par de elementos $g,h \in G$ y todo $x \in X$.*

Si $C \subset G$ y $A \subset X$, entonces el conjunto

$$\{c.x : c \in C \text{ y } x \in A\}, \tag{4}$$

se denotará por $C.A$. Cuando $C = \{g\}$, entonces es usual escribir $g.A$, en vez de $\{g\}.A$. Si $x \in X$, entonces el conjunto $G.\{x\}$ es llamado *órbita de x*, y se denotará por $Orb(x)$. Se llamará *translación por $g \in G$* a la función que va de X en sí mismo, y que envía a cada elemento x en $g.x$. Note que, por las propiedades de acción, toda translación es una biyección, donde la inversa de la translación por $g \in G$, es la translación por g^{-1}.

Si $g \in G$ y $x \in X$, se dirá que *x es un punto fijo de g* ó que *g tiene como punto fijo a x*, si $g.x = x$. Se dirá que una acción es *una acción sin puntos fijos* si ningún elemento de G, distinto de la identidad, tiene algún punto fijo.

Definición 3.2. *Sea A un conjunto no vacío. Una partición finita propia de A (que se abreviará como partición f. p.) es una colección no vacía y finita* $\{A_1,\ldots,A_n\}$ *de subconjuntos no vacíos de A, tal que*

1. $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ *y*

2. $A_i\cap A_j=\emptyset$, *si* $i\neq j$.

Ejemplo 3.1. *Es fácil verificar que las órbitas de una acción son siempre no vacías, que dos órbitas, o son idénticas, o son disjuntas, y que la unión de las órbitas es el conjunto* X *sobre el que está actuando el grupo. Si se supone que se tiene una acción tal que el número de órbitas es finito, entonces la familia formada por las órbitas de la acción es una partición f. p. de* X*. En el caso general, cuando el conjunto de orbitas es de cardinalidad arbitraria, el Axioma de Elección garantiza la existencia de un conjunto* $R\subset X$*, el cual contiene exactamente un representante de cada órbita. Entonces*

$$X=\bigcup_{x\in R}Orb(x), \tag{5}$$

con

$$Orb(x)\cap Orb(y)=\emptyset, \tag{6}$$

si x, y son elementos distintos en R.

Definición 3.3. *Sea* $\tau: G\times X\to X$ *una acción, y sean* A, B *subconjuntos no vacíos de* X*. Se dice que A es* $m-$*equivalente a B respecto a la acción* τ *(lo cual se denota por* $A\overset{m}{\sim}B$*), si existen particiones f. p.* $A=A_1\cup\ldots\cup A_m$ *y* $B=B_1\cup\ldots\cup B_m$*, y elementos* $g_1,\ldots,g_m\in G$*, tal que* $g_i.A_i=B_i$*, para* $i=1,\ldots,m$*. Se dice que A es equivalente a B respecto a la acción* τ *(lo cual se denota por* $A\sim B$*), si A es* $m-$*equivalente a B respecto a* τ*, para algún* $m\geq 1$.

Teorema 3.1. *La relación "ser equivalente a", es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de* X.

Demostración 3.1. *Es obvio que esta relación es reflexiva y simétrica. Se ve que es también transitiva. Sean* A, B *y* C *subconjuntos no vacíos de* X*. Suponga que A es* $m-$*equivalente a B, y que B es* $n-$*equivalente a C. Esto significa que existen particiones f. p.*

$$A=A_1\cup\ldots\cup A_m,\ B=B_1\cup\ldots\cup B_m,\ B=B_1^{'}\cup\ldots\cup B_n^{'},\ C=C_1\cup\ldots\cup C_n \tag{7}$$

y elementos $g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_n\in G$*, tales que*

$$B_i=g_i.A_i \text{ para } i=1,\ldots,m, \text{ y } C_j=h_j.B_j^{'} \text{ para } j=1,\ldots,n. \tag{8}$$

Sea $B_{ij}=B_i\cap B_j^{'}$*, para* $i=1,\ldots,m$ *y* $j=1,\ldots,n$*. Suprimiendo aquellos* B_{ij} *que sean vacíos, se obtienen r subconjuntos de B, con* $r\leq mn$*, los cuales forman una partición f. p. de B. Sean ahora*

$$A_{ij}=g_i^{-1}.B_{ij} \text{ y } C_{ij}=h_j.B_{ij}, \tag{9}$$

si $B_{ij} \neq \emptyset$, para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$. Es fácil ver que $\bigcup A_{ij}$ y $\bigcup C_{ij}$ son particiones f. p. de A y C en r conjuntos, respectivamente. En efecto, se ve en primer lugar que $A_{ij} \cap A_{kl} = \emptyset$ si $(i,j) \neq (k,l)$. Se divide la verificación en casos.

1. *$i \neq k$. Como*
$$A_{ij} \;=\; g_i^{-1}.B_{ij} \;\subset\; g_i^{-1}.B_i \;=\; A_i, \tag{10}$$
y, por razones análogas,
$$A_{kl} \subset A_k, \tag{11}$$
entonces
$$A_{ij} \cap A_{kl} \;\subset\; A_i \cap A_k \;=\; \emptyset. \tag{12}$$

2. *$i = k$ y $j \neq l$. Como*
$$A_{ij} \cap A_{kl} = A_{ij} \cap A_{il} \;=\; (g_i^{-1}.B_{ij}) \cap (g_i^{-1}.B_{il}) \;=\; g_i^{-1}.(B_{ij} \cap B_{il}), \tag{13}$$
y
$$B_{ij} \cap B_{il} = \emptyset, \tag{14}$$
se tiene que,
$$A_{ij} \cap A_{kl} = \emptyset. \tag{15}$$

Se ve ahora que $\bigcup A_{ij} = A$. Es obvio que $\bigcup A_{ij} \subset A$. Ahora, si $x \in A_i$ entonces $g_i.x \in B_{ij}$ para algún j, y $x \in g_i^{-1}.B_{ij} = A_{ij}$. Como $A = \bigcup A_i$, entonces $A \subset \bigcup A_{ij}$.
En forma similar se muestra que los C_{ij} no vacíos forman una partición f. p. de C. Claramente,

$$C_{ij} = (h_j g_i).A_{ij}. \tag{16}$$

Esto muestra que A es $r-$equivalente a C respecto a la acción.$\square$

Definición 3.4. *Sea τ una acción de un grupo G sobre un conjunto X y A un subconjunto no vacío de X. Se dice que el conjunto A es* paradójico respecto a τ*, si existen subconjuntos disjuntos por pares $A^{'}, A^{''}, A^{'''}$, de A, con $A^{'} \sim A$ y $A^{''} \sim A$ y $A = A^{'} \cup A^{''} \cup A^{'''}$.*

Teorema 3.2. *Sea $\tau : G \times X \to X$ una acción, y sean A y B subconjuntos de X, con $A \overset{m}{\sim} B$. Entonces, si A es paradójico, B también es paradójico. Además, si*

$$A = A^{'} \cup A^{''} \cup A^{'''}, \tag{17}$$

con $A^{'} \overset{r}{\sim} A$ y $A^{''} \overset{s}{\sim} A$, entonces B se puede descomponer como unión disjunta de tres subconjuntos $B^{'}, B^{''}, B^{'''}$, los dos primeros no vacíos, con $B^{'} \overset{l}{\sim} B$, para un $l \leq rm^2$, y $B^{''} \overset{t}{\sim} B$, para un $t \leq sm^2$.

Demostración 3.2. *Sean $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y $\bigcup_{i=1}^{m} B_i$ particiones f. p. de A y B, respectivamente, y sean $g_1,\ldots,g_m$ elementos de G tales que $g_i.A_i = B_i$, para $i = 1\ldots m$. Se define*

$$\begin{aligned} B^{'} &= \bigcup g_i.(A^{'}\cap A_i), \\ B^{''} &= \bigcup g_i.(A^{''}\cap A_i), \\ B^{'''} &= \bigcup g_i.(A^{'''}\cap A_i), \end{aligned} \tag{18}$$

donde sólo se considera, en cada unión, aquellas intersecciones de A_i con los conjuntos $A^{'}$, $A^{''}$, $A^{'''}$, que no sean vacías. Es claro que

$$B = B^{'}\cup B^{''}\cup B^{'''}, \tag{19}$$

y que $B^{'}$ y $B^{''}$ no son vacíos. Se verifica que $B^{'}\cap B^{''} = \emptyset$. Para ello se ve que para cada (i, j),

$$g_i(A^{'}\cap A_i)\cap g_j(A^{''}\cap A_j) = \emptyset. \tag{20}$$

En primer lugar, se supone que $i = j$. Como la translación por cada g_i es una biyección, los conjuntos $g_i.(A^{'}\cap A_i)$ y $g_i.(A^{''}\cap A_i)$ son disjuntos, puesto que $A^{'}\cap A_i$ y $A^{''}\cap A_i$ lo son. En segundo lugar, como

$$g_i.(A^{'}\cap A_i) \subset g_i.A_i = B_i \text{ y } g_j.(A^{''}\cap A_j) \subset g_j.A_j = B_j, \tag{21}$$

para todo $i = 1,\ldots,m$ y $j = 1,\ldots,m$, entonces si $i \neq j$,

$$g_i.(A^{'}\cap A_i)\cap g_j.(A^{''}\cap A_j) \subset B_i\cap B_j = \emptyset. \tag{22}$$

Esto muestra que $B^{'}$ y $B^{''}$ son disjuntos. En forma similar se muestra que $B^{'}\cap B^{'''} = \emptyset$, y que $B^{''}\cap B^{'''} = \emptyset$. De aquí se sigue que B es la unión disjunta $B^{'}\cup B^{''}\cup B^{'''}$.
Ahora, como

$$g_i.(A^{'}\cap A_i) \subset g_i.A_i = B_i \tag{23}$$

para cada $i = 1,\ldots,m$, y si $i \neq j$, entonces $B_i\cap B_j = \emptyset$, se tiene que el conjunto formado por todos los conjuntos $g_i.(A^{'}\cap A_i)$, tales que $A^{'}\cap A_i \neq \emptyset$, es una partición f. p. de $B^{'}$. Entonces $A^{'}$ y $B^{'}$ son equivalentes. Por transitividad de la relación $\sim$ se tiene que como $B^{'}\sim A^{'}\sim A\sim B$, entonces $B^{'}\sim B$. Como cada conjunto en esta cadena es equivalente al siguiente, con particiones que tienen un número de conjuntos menor o igual a m, r y m, respectivamente, entonces se sigue que $B^{'}$ es $l-$equivalente a B para un $l \leq rm^2$. Similarmente se ve que $B^{''}$ es $t-$equivalente a B para un $t \leq sm^2$.$\square$

Observación 3.1. *De la demostración anterior se sigue que, en total, B se parte en un número de pedazos menor o igual a $m^2 + rm^2 + sm^2$, de los cuales m^2 son desechados y con los restantes, después de transladarlos adecuadamente (usando elementos de G), se ensamblan dos copias de B.*

Definición 3.5. *Sea $\tau : G\times X \to X$ una acción. Se dice que G* actúa sin puntos fijos *si $g.x = x$, para algún $x \in X$, implica que $g = e$.*

Un grupo G siempre actúa sobre sí mismo por multiplicación a izquierda.

Definición 3.6. *Sea G un grupo. Se llama acción tautológica de G, a la acción* $\tau_G : G \times G \to G$ *definida por* $g.h = gh$.

Es fácil ver que los axiomas de grupo implican que τ_G es una acción *sin puntos fijos*.

Sean ahora A^+ y A^- los conjuntos formados por todas las palabras de $F\langle a,b\rangle$ que empiezan por una potencia *positiva* (respectivamente, *negativa*) de a y B^+, B^- los conjuntos de palabras que empiezan por una potencia *positiva* (respectivamente, *negativa*) de b. Claramente,

$$A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup \{1\}, \tag{24}$$

es una partición f. p. de $F\langle a,b\rangle$.

Teorema 3.3. *Cada una de* $A^+ \cup a.A^-$ *y* $B^+ \cup b.B^-$ *es una partición f. p. de* $F\langle a,b\rangle$.

Demostración 3.3. *Obviamente* $a.A^-$ *consta de la identidad* 1 *y de los elementos de* $F\langle a,b\rangle$ *que comienzan por una potencia cualquiera de b o una potencia negativa de a. Esto implica que* $a.A^- = \{1\} \cup (B^+ \cup B^-) \cup A^-$ *y que por lo tanto* $A^+ \cap a.A^- = \emptyset$ *y* $A^+ \cup a.A^- = F\langle a,b\rangle$. *De forma similar se demuestra que* $B^+ \cup b.B^-$ *es también una partición f. p. de* $F\langle a,b\rangle$.□

Teorema 3.4. *Suponga que* $F\langle a,b\rangle$ *actúa sobre un conjunto X, y que esta acción no tiene puntos fijos. Entonces X es un conjunto paradójico respecto a esta acción.*

Demostración 3.4. *El Axioma de Elección garantiza la existencia de un conjunto* $R \subset X$ *conteniendo exactamente un elemento de cada órbita de* X. *Se define*

$$X' = (A^+.R) \cup (A^-.R), \;\; X'' = (B^+.R) \cup (B^-.R) \;\text{ y }\; X''' = \{1\}.R = R. \tag{25}$$

En primer lugar,

$$\begin{aligned} X &= F\langle a,b\rangle.R \\ &= (A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup \{1\}).R \\ &= ((A^+.R) \cup (A^-.R)) \cup ((B^+.R) \cup (B^-.R)) \cup (\{1\}.R) \\ &= X' \cup X'' \cup X'''. \end{aligned} \tag{26}$$

Ahora, si C y D son subconjuntos disjuntos de $F\langle a,b\rangle$, *entonces* $C.R$ *y* $D.R$ *también lo son. En efecto, si* $C.R$ *y* $D.R$ *no fueran disjuntos, es decir, si existieran* $c \in C$, $d \in D$, *y* $x, y \in R$ *tales que* $c.x = d.y$, *se tendría que* $(d^{-1}c).x = y$. *Esto último implicaría que x y y están en la misma órbita de X, y como R contiene exactamente un representante de cada órbita, entonces tendría que ser que* $x = y$. *Ahora, como la acción no tiene puntos fijos y* $(d^{-1}c).x = x$, *se tiene que* $d^{-1}c = 1$, *y por consiguiente* $d = c$. *Este último elemento estaría en la intersección* $C \cap D$, *pero se ha supuesto que este último conjunto es vacío. De lo anterior se deduce que* X', X'' *y* X''', *son disjuntos por pares y que* $A^+.R \cup A^-.R$ *y* $B^+.R \cup B^-.R$ *son particiones f. p. de* X' *y* X'', *respectivamente.*

Por otro lado, el teorema anterior implica que X' es $2-$equivalente a X, ya que si se toma $g_1 = 1$ y $g_2 = a$, se tiene que

$$g_1.(A^+.R) = A^+.R \ \text{ y } \ g_2.(A^-.R) = (a.A^-).R, \tag{27}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} g_1.(A^+.R) \cup g_2.(A^-.R) &= A^+.R \cup ((a.A^-).R) \\ &= (A^+ \cup (a.A^-)).R \\ &= F\langle a,b\rangle.R \\ &= X. \end{aligned} \tag{28}$$

En forma similar se demuestra que X'' es $2-$equivalente a X. Esto concluye la demostración.$\square$

4. LA PARADOJA DE HAUSDORFF

4.1. Dos matrices muy especiales en el grupo $SO(3,\mathbb{R})$

Recordar que el grupo $O(3,\mathbb{R})$ consta de las matrices reales C de tamaño 3×3 tales que $CC^T = I_3$ bajo la operación de multiplicación de matrices. La condición $CC^T = I_3$ implica que $det(C) = \pm 1$. Los elementos de $O(3,\mathbb{R})$ cuyo determinante es $+1$ forman un subgrupo, el cual se denota como $SO(3,\mathbb{R})$. Estos grupos puede interpretarse geométricamente de la siguiente manera. Se introduce primero la noción de orientación.

Definición 4.1. *Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ una base (ordenada) de $\mathbb{R}^n$. Se dice que dicha base es positiva, si el determinante de la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica es positivo. En caso contrario, se dice que $\mathcal{B}$ es una base negativa. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + A\mathbf{x}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, y A es una matriz invertible de tamaño $n\times n$. Se dice que f preserva orientación si premultiplicación por A envía la base canónica en una base positiva. En caso contrario, se dice que f reversa orientación.*

Definición 4.2. *Se dice que una función*

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

es una isometría *si para todo par de elementos $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, se cumple que*

$$||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||. \tag{29}$$

Es claro que toda isometría es inyectiva. Lo que no es inicialmente claro es que es también sobreyectiva. Se puede ver que si una isometría $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preserva el origen, es decir $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, entonces f es una función *lineal*. Se tiene así que una isometría que preserve el origen es una función inyectiva y lineal, y por lo tanto es sobreyectiva. Ahora, se puede ver que una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría si y sólo si la matriz A tal que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pertenece a $O(3,\mathbb{R}^3)$. Se concluye así que f es una isometría que preserva el origen si y sólo si $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ donde $A \in O(3,\mathbb{R})$. Ahora, si f es una isometría que no preserva el origen, es decir, si $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, entonces $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ es una isometría que sí preserva el origen y por tanto $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para alguna $A \in O(3,\mathbb{R})$. Esto muestra que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + f(\mathbf{0})$. La gran conclusión es que f es una isometría de $\mathbb{R}^3$ si y sólo si $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ para cierta $A \in O(3,\mathbb{R})$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Definición 4.3. *Una isometría se denomina movimiento rígido si además preserva orientación. Se denota por $\mathcal{M}_3$ al conjunto formado por todos los movimientos rígidos del espacio euclidiano. Este es un grupo bajo la operación de composición.*

Resulta inmediato verificar que una matriz $A \in O(3,\mathbb{R})$ es tal que la transformación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ preserva orientación si y sólo si $A \in SO(3,\mathbb{R})$. Esto permite afirmar que $\mathcal{M}_3$ está formado por las funciones $L_{C,\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{v}$, donde $C \in SO(3,\mathbb{R})$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Claramente, el grupo $SO(3,\mathbb{R})$ puede considerarse como un subgrupo de $\mathcal{M}_3$. Note que una rotación cuyo eje sea una recta l que no pase por el origen, es un elemento de $\mathcal{M}_3$.

El siguiente teorema expresa un hecho básico acerca de $SO(3,\mathbb{R})$, el cual será útil más adelante. Para enunciarlo, se necesita el siguiente concepto.

Definición 4.4. *Se llama rotación positiva alrededor del vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ por un ángulo $\theta \in [0,2\pi)$, a la transfomación lineal $\rho_{\mathbf{u},\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz en toda base ortonormal positiva que empieza con el vector $\mathbf{u}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$, es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{30}$$

La transformación lineal $\rho_{\mathbf{u},\theta}$ se puede interpretar geométricamente de la siguiente manera. Sea l la línea recta que pasa por el origen y que es dirigida por el vector $\mathbf{u}$. Entonces $\rho_{\mathbf{u},\theta}(\mathbf{x})$ es $\mathbf{x}$ si $\mathbf{x} \in l$ y es el punto del espacio en el plano que contiene a $\mathbf{x}$ y que es perpendicular a la recta l, que se obtiene rotando a $\mathbf{x}$ por un ángulo θ, barrido en la dirección dada por la regla de la mano derecha con el pulgar señalando en la dirección del vector $\mathbf{u}$, si $\mathbf{x} \notin l$. El siguiente resultado es bien conocido, y describe la relación entre el grupo $SO(3,\mathbb{R})$ y las rotaciones positivas alrededor de vectores unitarios.

Teorema 4.1. *Sea $L_C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal inducida por $C \in SO(3,\mathbb{R})$. Entonces $L_C = \rho_{\mathbf{u}_C,\theta_C}$, para un cierto $\mathbf{u}_C \in \mathbb{R}^3$ y $0 \leq \theta_C < 2\pi$.*

Este teorema tiene la siguiente consecuencia. Dada una transformación L_C, con $C \in SO(3,\mathbb{R})$, existe un camino continuo $\gamma : [0,1] \to SO(3,\mathbb{R})$ tal que $\gamma(0) = I_3$ y $\gamma(1) = C$. Basta definir $\gamma(t)$ como la matriz tal que $L_{\gamma(t)}$ es la rotación positiva alrededor de $\mathbf{u}_C$, y por un ángulo $t\theta_C$.

Teorema 4.2. *Las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{31}$$

en $SO(3,\mathbb{R})$, son tales que el subgrupo $\langle A,B\rangle$ que ellas generan en $SO(3,\mathbb{R})$, es isomorfo al grupo libre $F\langle a,b\rangle$, vía el (único) isomorfismo $\psi : F\langle a,b\rangle \to \langle A,B\rangle$ que envía a a en A y a b en B.

Demostración 4.1. *En primer lugar, las matrices A y B se corresponden con rotaciones positivas por ángulo arcos*$(1/3)$*, alrededor de los vectores* $\mathbf{e}_3$ *y* $\mathbf{e}_1$*, respectivamente. Se define a* $\psi : F\langle a,b\rangle \to \langle A,B\rangle$ *como el único homomorfismo que envía a a en A y a b en B. Este homomorfismo envía una palabra* $w = x_1 \dots x_t$ *(con* $x_i = a^{n_i}$ *ó* $x_i = b^{n_i}$*) en* $\psi(w) = X_1 \dots X_t$*, donde* $X_i = A^{n_i}$ *ó* $X_i = B^{n_i}$*, y es, en particular, sobreyectivo. Se ve que* ψ *es también inyectivo. Por inducción sobre la longitud de w, no es difícil demostrar que si w no es la palabra identidad, entonces la matriz* $\psi(w)$ *multiplicada por el vector* $(1,0,0)^T$ *produce un vector de la forma*

$$\frac{1}{3^k}(m, n\sqrt{2}, s)^T \tag{32}$$

con m*,* n*,* s*,* k *enteros, y donde n no es divisible por* 3*. De lo anterior se sigue que* $\psi(w)$ *es la matriz identidad, si y sólo si, w es la palabra identidad.*$\square$

Considere ahora la acción τ del grupo $\langle A,B\rangle$ sobre el espacio $\mathbb{R}^3$ definida por $C.\mathbf{x} = C\mathbf{x}$. Sea

$$S^2 = \{(x,y,z)^T : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \tag{33}$$

la esfera de radio 1, centrada en el origen en el espacio tridimensional. Es claro que la acción τ puede ser restringida a S^2. Como se vió en el teorema anterior, cada elemento de $SO(3,\mathbb{R})$ es una rotación por un cierto ángulo, alrededor de una recta que pasa por el origen. En particular, todo elemento de $\langle A,B\rangle$ tiene esta forma. Esto implica que la acción τ de $\langle A,B\rangle$ sobre S^2 *tiene puntos fijos*. En efecto, toda rotación que no sea la identidad, tendrá exactamente *dos* puntos fijos. Estos puntos son las intersecciones del eje de rotación con la esfera S^2. Considere el conjunto de todos los puntos fijos de algún elemento de $\langle A,B\rangle$ distinto de la identidad,

$$F = \{p \in S^2 : p \text{ es un punto fijo de algún elemento } C \neq I_3 \text{ de } \langle A,B\rangle\}. \tag{34}$$

Este conjunto es *numerable* ya que el grupo $\langle A,B\rangle$ claramente lo es, y cada elemento distinto de la identidad contribuye con exactamente dos puntos fijos. Se puede por lo tanto escoger una ordenación de F, y escribir $F = \{p_1, p_2, \dots\}$. Considere ahora el subconjunto $S^2 - F$ de S^2. Este conjunto se llamará *la esfera perforada*. Se ve que la acción de $\langle A,B\rangle$ sobre la esfera *restringe* a la esfera perforada. Si $\mathbf{x} \in S^2 - F$ y $C \in \langle A,B\rangle$ entonces $C.\mathbf{x}$ no puede ser un punto fijo de ningún elemento $D \in \langle A,B\rangle$ distinto de la identidad, ya que si $D.(C.\mathbf{x}) = C.\mathbf{x}$, entonces, haciendo actuar $(DC)^{-1}$ a ambos lados, se tendría que

$$\mathbf{x} = (DC)^{-1}.(C.\mathbf{x}) = (C^{-1}D^{-1}).(C.\mathbf{x}) = (C^{-1}D^{-1}C).\mathbf{x}. \tag{35}$$

Pero $C^{-1}D^{-1}C \neq I_3$ puesto que de lo contrario $D^{-1} = I_3$, y por lo tanto $D = I_3$, lo cual es una contradicción. Por tanto, la acción de $\langle A,B\rangle$ sobre la esfera perforada es una acción *sin puntos fijos*. Si se aplica el Teorema 4 con X siendo la esfera perforada, se concluye que *ésta es un conjunto paradójico respecto a la acción de* $\langle A,B\rangle$. Más aún, la demostración de ese teorema permite deducir que la esfera perforada puede partirse en cinco pedazos, P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, tales que existen elementos C_1, C_2, C_3, C_4 en $SO(3,\mathbb{R})$ con

$$C_1.P_1 \cap C_2.P_2 = \emptyset \text{ y } C_1.P_1 \cup C_2.P_2 = S^2 - F \tag{36}$$

y

$$C_3.P_3 \cap C_4.P_4 = \emptyset \text{ y } C_3.P_3 \cup C_4.P_4 = S^2 - F. \tag{37}$$

Esto dice, de acuerdo al comentario a continuación del Teorema 5, que existen caminos continuos

$$\gamma_i : [0,1] \to SO(3,\mathbb{R})$$

tales que

$$\gamma_i(0) = I_3 \text{ y } \gamma_i(1) = C_i, \text{ para } i = 1,2,3,4. \tag{38}$$

Entonces cada $L_{\gamma_i(.)}(P_i)$ es un camino continuo de conjuntos congruentes con P_i, que comienza en P_i y termina en $C_i.P_i$. En conclusión ¡*una sola* esfera perforada puede partirse en cinco pedazos, de tal forma que dos de ellos pueden moverse rígidamente (pero independientemente) para formar *una copia de la esfera perforada* y otros dos pueden moverse rígidamente (pero independientemente) para formar *otra copia de la esfera perforada!*. El quinto pedazo simplemente se desecha. A continuación se verá que lo mismo puede hacerse con toda la esfera S^2.

Teorema 4.3. *(Paradoja de Hausdorff) La esfera S^2 es equivalente a $S^2 - F$ respecto a la acción de $SO(3,\mathbb{R})$ sobre S^2, y por consiguiente, del Teorema 2 y la discusión anterior, S^2 es un conjunto paradójico.*

Demostración 4.2. *Como el conjunto F es numerable, deberá existir alguna línea recta l que pasa por el origen, y tal que los dos puntos de intersección de ésta con la esfera unitaria no estén en F. Sea $\mathbf{u}_1$ un vector unitario determinado por uno cualquiera de estos dos puntos, y escoja vectores de $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, tales que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sea una base positiva y ortonormal. A continuación se demuestra que debe existir un $\theta \in [0,2\pi)$, para el cual ninguna rotación positiva alrededor de $\mathbf{u}_1$ por un ángulo de la forma $n\theta$, con $n \geq 1$, lleva un punto de F a otro punto (no necesariamente distinto) de F. En símbolos, se quiere ver que existe $\theta \in [0,2\pi)$, tal que*

$$\rho^n_{\mathbf{u}_1,\theta}(F) \cap F = \emptyset, \tag{39}$$

para todo $n \geq 1$. Se denota a $\rho_{\mathbf{u}_1,\alpha}$ por ρ_α.
Por cada tripla $(p_i, p_j, n) \in F \times F \times \{1,2,\ldots\}$ existe un único ángulo $\theta_{ij} \in [0,2\pi)$, tal que

$$\rho^n_{\theta_{ij}}(p_i) = p_j. \tag{40}$$

Como el conjunto $F \times F \times \{1,2,\ldots\}$ es numerable, por ser un producto cartesiano de una familia numerable (de hecho finita) de conjuntos numerables, entonces el conjunto $\{\theta_{ij} : i,j \in \{1,2,\ldots\}\} \subset [0,2\pi)$, es numerable. Como el conjunto $[0,2\pi)$ no es numerable, se puede escoger un ángulo $0 \leq \theta < 2\pi$, distinto de todos los ángulos θ_{ij}. La rotación ρ_θ tiene la propiedad deseada. En efecto, si $p_i, p_j \in F$ y $\rho^n_\theta(p_i) = p_j$, para cierto $n \geq 1$, entonces se tendría que $\theta = \theta_{ij}$, lo cual contradice la forma como fue escogido θ. En lo que sigue, se denota a ρ_θ simplemente por ρ. La relación

$$\rho^n(F) \cap F = \emptyset \tag{41}$$

para $n \geq 1$, implica que

$$\rho^n(F) \cap \rho^m(F) = \emptyset \tag{42}$$

para todo $n,m \geq 0$ y $n < m$. Basta observar que la relación

$$\rho^n(F) \cap \rho^m(F) = \emptyset \tag{43}$$

es cierta, si y sólo si, la relación

$$\begin{aligned} \rho^{-n}(\rho^n(F) \cap \rho^m(F)) &= (\rho^{-n} \circ \rho^n)(F) \cap (\rho^{-n} \circ \rho^m)(F) \\ &= F \cap \rho^{m-n}(F) \\ &= \emptyset \end{aligned} \tag{44}$$

es cierta. Pero esta última relación es precisamente la hipótesis.
Defina ahora el conjunto

$$F^* = \bigcup_{n \geq 0} \rho^n(F). \tag{45}$$

Este conjunto es la unión de todos los transladados de F, con potencias no negativas de ρ. *Se nota que*

$$\rho(F^*) = F^* - F. \tag{46}$$

Es claro que

$$S^2 = (S^2 - F^*) \cup F^* \tag{47}$$

es una partición f. p. de S^2. Ahora,

$$\begin{aligned} S^2 - F &= ((S^2 - F) - \rho(F^*)) \cup \rho(F^*) \\ &= (S^2 - (F \cup \rho(F^*))) \cup \rho(F^*) \\ &= (S^2 - F^*) \cup \rho(F^*). \end{aligned} \tag{48}$$

El último miembro de esta cadena de igualdades proporciona una partición f. p. de $S^2 - F$. Estas particiones f. p. de S^2 y $S^2 - F$, respectivamente, muestran que estos dos conjuntos son $2-$equivalentes respecto a la acción de $SO(3,\mathbb{R})$ sobre S^2.$\square$

Note que los dos elementos de $SO(3,\mathbb{R})$ que realizan la equivalencia entre la esfera y la esfera perforada, son la identidad y la rotación ρ. Además, el Teorema 2 y la demostración del Teorema 4 permiten concluir que tanto X' como X'' son $l-$equivalentes a S^2 con $l \leq 2 \times 2^2 = 8$. En resumen, de la Observación 1 se sigue que, *la esfera S^2 puede ser partida en menos de $2^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^2 = 20$ trozos, desechar a lo sumo los primeros cuatro, y con los restantes 16 se pueden formar dos grupos de 8 los cuales se usan para ensamblar ¡dos nuevas esferas idénticas a la original!*

5. LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI

En esta sección se ve cómo se puede explotar el hecho de que la esfera unitaria es paradójica respecto a la acción de $SO(3,\mathbb{R})$, para deducir que la bola sólida unitaria

$$B^3 = \{(x,y,z)^T : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}, \tag{49}$$

es paradójica respecto a la acción del grupo de los movimientos rígidos de $\mathbb{R}^3$. Esta última afirmación se conoce con el nombre de *Paradoja de Banach-Tarski*.

Teorema 5.1. *$B^3 - \{(0,0,0)^T\}$ es un conjunto paradójico respecto a la acción de $SO(3,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^3$, y por lo tanto, también respecto a la acción de $\mathcal{M}_3$ sobre $\mathbb{R}^3$. Además, $B^3 - \{(0,0,0)^T\}$ es equivalente a B^3, respecto a la acción del grupo $\mathcal{M}_3$ sobre $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto B^3 es un conjunto paradójico respecto a la acción de $\mathcal{M}_3$ sobre $\mathbb{R}^3$.*

Demostración 5.1. *Ya se sabe que S^2 es paradójico respecto a la acción de $SO(3,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^3$. Recuerde que esto significa que S^2 se puede escribir como una unión disjunta*

$$X^{'} \cup X^{''} \cup X^{'''}, \tag{50}$$

donde $X^{'} \sim S^2$ y $X^{''} \sim S^2$. Para cada $H \subset S^2$ se define el cono *(sin vértice)* determinado por *H, como*

$$C(H) = \{\ \lambda(u,v,w)^T :\ (u,v,w)^T \in H \text{ y } 0 < \lambda \leq 1\ \}. \tag{51}$$

Es claro que si H y $H^{'}$ son subconjuntos disjuntos de S^2, entonces $C(H)$ y $C(H^{'})$ también lo son. Por lo tanto $C(X^{'})$, $C(X^{''})$ y $C(X^{'''})$ son disjuntos a pares, y claramente su unión es $C(S^2) = B^3 - \{(0,0,0)^T\}$. Por otro lado, es fácil ver que si ρ es una rotación cuyo eje sea una recta que pase por el origen, entonces

$$\rho(C(H)) = C(\rho(H)). \tag{52}$$

Por tanto, si H es un subconjunto de S^2, tal que hay una partición f. p. $H = H_1 \cup \ldots \cup H_r$ y elementos $C_1,\ldots,C_r \in SO(3,\mathbb{R})$ tales que $C_1.H_1 \cup \ldots \cup C_r.H_r$ es una partición f. p. de S^2, entonces $C(H_1) \cup \ldots \cup C(H_r)$ es una partición f. p. de $C(H)$, y $C_1.C(H_1) \cup \ldots \cup C_r.C(H_r)$ es una partición f. p. de $C(S^2) = B^3 - \{(0,0,0)^T\}$. Aplicando este último hecho a $H = X^{'}$ y $H = X^{''}$, se deduce que

$$C(X^{'}) \sim C(S^2) = B^3 - \{(0,0,0)^T\}, \tag{53}$$

y

$$C(X^{''}) \sim C(S^2) = B^3 - \{(0,0,0)^T\}. \tag{54}$$

Esto demuestra que $B^3 - \{(0,0,0)^T\}$ es paradójico respecto a la acción de $SO(3,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^3$.

Para demostrar la segunda parte del teorema, se fija una rotación ϕ cuyo eje es la recta perpendicular al plano $z=0$, y que pasa por el punto $(\frac{1}{2},0,0)$, por un ángulo θ_0 tal que $2\pi/\theta_0$ no sea un número racional. La elección de θ_0 hace imposible que $m\theta_0 = 2\pi n$, para algún par de enteros no nulos m y n. De lo anterior se sigue que si G es el conjunto

$$G = \bigcup_{n\geq 0} \phi^n((0,0,0)^T), \tag{55}$$

entonces

$$\phi(G) \; = \; G - \{(0,0,0)^T\}. \tag{56}$$

En efecto, la inclusión

$$G - \{(0,0,0)^T\} \subset \; \phi(G) \tag{57}$$

es clara, ya que todo elemento de la forma $\phi^m((0,0,0)^T)$ con $m \geq 1$, se puede escribir en la forma $\phi(\phi^{m-1}((0,0,0)^T)) \in \phi(G)$.
La inclusión

$$\phi(G) \subset G - \{(0,0,0)^T\} \tag{58}$$

también es cierta, ya que $\phi(G) \subset G$, y $\phi(G)$ no puede contener a $\{(0,0,0)^T\}$ puesto que de lo contrario ocurriría que $\phi^m((0,0,0)^T) = (0,0,0)^T$, para algún $m \geq 1$ y por tanto $m\theta_0 = 2\pi n$, lo cual contradice la escogencia de θ_0. Finalmente, se ve que B^3 es equivalente a $B^3 - \{(0,0,0)^T\}$ respecto a la acción de $\mathcal{M}_3$ sobre $\mathbb{R}^3$. Se comienza por escribir

$$B^3 \; = \; (B^3 - G) \cup G. \tag{59}$$

Si se le aplica $id_{\mathbb{R}^3}$ al primer conjunto y ϕ al segundo, se obtiene

$$(B^3 - G) \cup \phi(G) = (B^3 - G) \cup (G - \{(0,0,0)^T\}) = B^3 - \{(0,0,0)^T\}. \tag{60}$$

Esto concluye la demostración.$\square$

Ya se había visto que S^2 se puede partir en un número de piezas menor o igual a 40, desechar a lo sumo 4, y con las piezas restantes formar dos nuevas esferas. Si se aplica nuevamente la Observación 1, se puede concluir que B^3 *se puede partir en un número de piezas* $\leq 2\times 20 = 40$, *desechar a lo sumo* 2×4 *y con las restantes* 32 *ensamblar dos nuevas bolas sólidas!*

6. CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado, con absoluto detalle, las paradojas de Hausdorff y de Banach-Tarski. Aunque se llaman paradojas, éstas son resultados correctos en la teoría de conjuntos dotada del Axioma de Elección. Estas paradojas no solo sirven para mostrar todo lo que hace posible dicho axioma dentro de la teoría de conjuntos, sino que también pone de manifiesto lo extraño que puede ser el comportamiento de los subconjuntos no medibles de los espacios euclídeos.

Referencias

French, R. M. (1988). The Banach-Tarski theorem. *The Mathematical Intelligencer*, 10(**4**), 21-28.

Jech, T. (2008). *The axiom of choice.* Courier Corporation.

Rotman, J. (2012). *An introduction to the theory of groups.*. Springer Science and Business Media, 148.

Stromberg, K. (1979). The Banach-Tarski paradox. *The American Mathematical Monthly*, 86(**3**), 151-161.

Wagon, S. (1993). *The Banach-Tarski Paradox.* Cambridge University Press, 24.