

COMPARATIVO DE MODELOS DE PRONÓSTICO: CLÁSICOS, BAYESIANOS Y TÉCNICAS DE COMBINACIÓN^a

COMPARATIVE OF FORECASTING MODELS: CLASSICAL, BAYESIAN AND COMBINATION TECHNIQUES

MARISOL VALENCIA^b, VICTOR OSORNO^c, JUAN CARLOS SALAZAR^d

Recibido 03-07-2017, aceptado 20-09-2017, versión final 09-10-2017.

Artículo Investigación

RESUMEN: En la industria de alimentos, los modelos de inventarios que contemplan una adecuada predicción de la demanda son de gran ayuda para la gestión óptima del abastecimiento, especialmente en los productos perecederos como los lácteos, debido a su corta vida útil y la importancia de su calidad relacionada con la salud. Sin embargo, algunas empresas pequeñas y medianas colombianas no cuentan con tecnología y capacidades para hacer pronósticos de sus productos, lo cual es muy importante para la planeación de producción e inventarios. En este trabajo se propone una comparación de la precisión de pronósticos de modelos estadísticos individuales y combinaciones entre éstos, usando un algoritmo multi-producto para las combinaciones aplicado a un caso de estudio de ventas del sector de lácteos. Se encuentra que un modelo individual de regresión Bayesiana con innovación es muy buena alternativa en el caso estudiado, así como dos de las técnicas de combinación usadas.

PALABRAS CLAVE: Estadística y probabilidad; evaluación de modelos y selección; pronósticos; estadística Bayesiana.

ABSTRACT: In the food industry, inventory models that provide adequate prediction of demand are useful for optimum supply management, especially in perishable products such as dairy products, because of their short shelf life and the importance of their quality related to health. However, some small and medium Colombian companies do not have the technology and capabilities to do forecasts of their products, which is very important for production and inventory planning. In this paper we propose a comparison of the precision of forecasts of individual statistical models and combinations between them, using a multi-product algorithm for the combinations applied to a case study of sales of the dairy sector. It is found that an individual model of Bayesian regression with innovation is a very good alternative in the case studied, as well as two of the combination techniques used.

KEYWORDS: Statistics and Probability; model evaluation and selection; forecasting; Bayesian statistics.

^aValencia, M.; Osorno, V. & Salazar, J. (2017). Comparativo de modelos de pronóstico: clásicos, bayesianos y técnicas de combinación. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 124–140. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.66085>

^bIngeniera Industrial, Msc en Estadística. Docente Institución Universitaria Tecnológico de Antioquia. mvalencia@unal.edu.co

^cIngeniero Administrativo. Joven Investigador Colciencias. vaosornov@unal.edu.co

^dPhD. en Estadística, Profesor asociado-Escuela de estadística. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. jcsalaza@unal.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Algunas empresas tipo PYME (Pequeñas y Medianas) en Colombia tienen falencias de información y de adecuada planeación que algunas veces generan pérdidas en producto o tiempos (Montoya *et al.*, 2010; Rodríguez, 2003; Sánchez *et al.*, 2007), en especial, en la cadena de alimentos lácteos, donde hay un especial cuidado debido a su corta vida útil y la importancia para la salud humana (Doganis *et al.*, 2006). Un aporte a la mejora de la gestión de información para procesos operativos, que facilitan la programación adecuada de inventarios, es el pronóstico de demanda y un aporte a la precisión de éstos pronósticos es la técnica de combinación de pronósticos, como se ha visto ya en diversas investigaciones (Barrow & Kourentzes, 2016).

En varios trabajos de series de tiempo para demandas que se han estudiado para problemas de inventarios, se presentan comportamientos como estacionalidad y ciclicidad que requieren un buen análisis y técnicas para la adecuada predicción (Simchi-Levi *et al.*, 2008).

En este trabajo se propone una comparación de la precisión de pronósticos de modelos estadísticos individuales y combinaciones entre éstos, usando un algoritmo multi-producto que es aplicado a un caso de estudio de ventas del sector de lácteos. El comparativo parte de estimar algunos modelos estadísticos propuestos individuales a las series de tiempo propuestas, el modelo lineal mixto generalizado clásico y Bayesiano, modelo lineal dinámico Bayesiano, modelo de regresión Bayesiana definido en Valencia (2016), con tres tipos de combinaciones de pronósticos basadas en dichos modelos: la primera, usada en Nowotarski *et al.* (2016), se basa en el RMSE; la segunda, de Bates & Granger (1969), que utiliza el MSE; y la de Hsiao & Wan (2014), basada en vectores propios (EIG1), las dos últimas diseñadas en el paquete GeomComb. Se eligen la mejor al encontrar el menor valor de los criterios RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio) en primer lugar y SMAPE (Media del Error Absoluto Porcentual Simétrico). Para su ejecución se diseña un algoritmo que permita estimar la combinación para múltiples productos de manera simultánea.

Este artículo está organizado así: en la primera sección se presenta una revisión sobre aplicaciones de modelos de pronóstico basados en estadística clásica y Bayesiana, y de métodos de combinación de pronósticos existentes. En la sección de métodos se muestran los que se van a comparar, y en resultados se analizan las series de tiempo para luego aplicar los modelos propuestos, y comparar, mediante los indicadores de error mencionados, los resultados que permitan determinar los modelos con mejor desempeño entre individuales o combinaciones.

2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Los datos tomados de forma cronológica suelen presentar unas estructuras correlacionadas y características o patrones visibles y a veces no visibles como: tendencia, estacionalidad, ciclos, y aleatoriedad, las cuales

se pueden presentar de muchas formas (Bowerman *et al.*, 2007; Congdon, 2002).

En la actualidad existen diversas metodologías de pronóstico que abarcan desde los conocimientos empíricos hasta las herramientas investigativas más avanzadas. En una empresa, las conjeturas sobre el futuro con base en cierta información, son más valiosos que las presunciones sin bases (Hanke & Wichern, 2006), por ello en la literatura se encuentran diversas aplicaciones de pronósticos para demanda de productos (Jun-jun & Ting, 2009; Guo *et al.*, 2017; Yelland, 2010).

Pronosticar el comportamiento de la demanda cada vez con más exactitud requiere de modelos estadísticos convenientes que logren captar la aleatoriedad de los datos históricos en el tiempo. Al respecto se han visto revisiones donde mencionan trabajos aplicados con modelos clásicos como el de regresión, ARIMA, SARIMA, suavización exponencial, pero además, otros modelos cuyas estructuras teóricas contemplan teoría Bayesiana, donde se encuentran entre otros regresión Bayesiana, modelo lineal dinámico Bayesiano, modelo de suavización exponencial Bayesiano (Valencia *et al.*, 2015).

Combinación de pronósticos

Tal y como se explica en Chan *et al.* (1999), el concepto de combinación de pronósticos parte del trabajo de Bates y Granger en 1969, quienes parten del análisis de dos pronósticos individuales de series de tiempo y luego demuestran que una adecuada combinación lineal de dos pronósticos puede resultar en un mejor resultado que los generados por medio de dos pronósticos individuales, debido a un error de varianza más pequeño y han motivado que muchos otros investigadores realicen nuevos tipos de combinaciones (Chen, 2011).

La fórmula clásica de dicha combinación (Bates & Granger, 1969) se encuentra programada en una de las funciones del paquete GeomComb (Weiss, 2016), con la ecuación de pesos dada por (1)

$$W_i^{BG} = \frac{\hat{\sigma}^{-2}(i)}{\sum_{j=1}^N \hat{\sigma}^{-2}(j)} \quad (1)$$

Donde se asume que $\hat{\sigma}^{-2}(i) = \text{MSE}$.

Además, el pronóstico combinado final \hat{f} estaría dado por:

$$\hat{f}_t = f_t \times W^{BG}$$

Recientes trabajos sobre combinación de pronósticos muestran resultados exitosos en algunos casos, encontrando que mejora la precisión de los pronósticos (Barrow & Kourentzes, 2016). Guo *et al.* (2017) mencionan que existen dos maneras de realizar pronósticos: una individual y la segunda, combinando los pronósticos de diferentes modelos; citan otras investigaciones donde se usan dichas combinaciones (Hyndman *et al.*, 2011; Miller *et al.*, 2007; Zotteri & Kalchschmidt, 2007); además, conducen una investigación donde en

primer lugar se analizan los factores que inciden en la demanda del producto que analizan. Luego, se usan cinco modelos de pronósticos en una técnica de combinación Bayesiana, llamada de doble nivel, que resulta mejor que los pronósticos individuales en su investigación. Barrow & Kourentzes (2016) mencionan que las técnicas de combinación se han diseñado acorde con diferentes teorías como aquel basado en minimización de la varianza del error (Min & Zellner, 1993), otras basadas en el criterio de regresión por mínimos cuadrados ordinarios (OLS); y otras en teoría de probabilidad Bayesiana (Andersson & Karlsson, 2007; Kociecki *et al.*, 2012).

En Chan *et al.* (1999) se describen algunos métodos para asignar pesos a cada uno de los pronósticos derivados de los modelos utilizados, entre éstos se encuentran: promedio simple (Simple average), un promedio simple lineal de los pronósticos, implicando así iguales pesos (Nowotarski *et al.*, 2016). Los más altos pesos (Highest weighting), que consiste en simplemente elegir el procedimiento de pronóstico individual al que le fue dado el peso más alto en el método de pesos fijos, éste no es una combinación, este método es equivalente a elegir la técnica de pronóstico la cual es la mejor durante los períodos de estimación de pesos.

En este trabajo se programa un algoritmo donde se estima una combinación basada en RMSE calculando los pesos según la ecuación (2). Aquí $\lambda_i = \text{RMSE}_i$, con $i=1, \dots, M$, donde M es el total de modelos individuales a considerar (Nowotarski *et al.*, 2016), y t es el periodo que se pronostica, donde $t=1, \dots, N-T$, en este caso, $t=1, \dots, 14$.

$$\omega_{i,t} = \frac{\lambda_{it}^{-1}}{\sum_{j=1}^M \lambda_{jt}^{-1}} \quad (2)$$

Gracias a esto, el peso correspondiente a cada pronóstico dependerá individualmente de su desempeño histórico tal que los pronósticos más precisos tienen una mayor proporción en la combinación. Luego de obtenidos los pesos se procede a resolver la siguiente fórmula para la combinación resultante (Nowotarski *et al.*, 2016): $\hat{Y}_t^c = \sum_{i=1}^M \omega_{i,t} \hat{Y}_{i,t}$, donde hay $i=1, 2, \dots, M$ modelos de pronóstico y t es el periodo que se pronostica.

En el paquete GeomComb (R Core Team, 2014) se encuentra la combinación programada de Bates & Granger (1969), también, la función comb_EIG1, que calcula los pesos de la combinación de acuerdo al enfoque de vectores propios estándar dado por Hsiao & Wan (2014).

3. MÉTODOS

Los datos fueron proporcionados por una empresa de transformación láctea Antioqueña. Estos consisten en tres años de ventas diarias para tres productos distintos, en total son 1096 datos por producto, denominados aquí: $Y1$, $Y2$ y $Y3$.

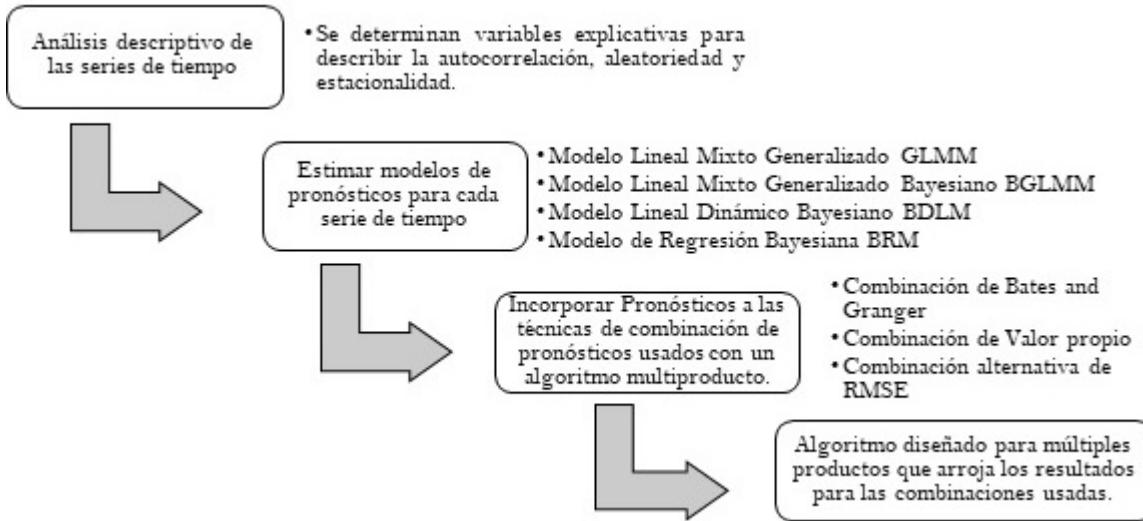


Figura 1: Metodología. Fuente: Elaboración propia.

La figura 1 describe los pasos que fueron seguidos para las estimaciones de los modelos de pronósticos usados en este trabajo, la cual es replicable a otros casos que requieran desarrollar combinaciones de pronósticos de múltiples productos para mejorar la precisión.

Para iniciar el análisis en series temporales, se hace un corte en la serie de datos, de N valores, T ($T < N$) serán usados para analizar correlación y análisis descriptivo y para estimar modelos; los $N-T$ restantes serán usados para validar la estimación y para determinar si el modelo tiene una capacidad de pronóstico adecuada. Los períodos $N-T$ se asocian con la planeación logística que tenga la empresa, que para este caso, son 14 días.

Se realiza entonces un análisis descriptivo de las series de tiempo con T valores, de donde salen variables explicativas para el comportamiento de las series. Al encontrar aleatoriedad, estacionalidad, no estacionariedad, se analiza la incorporación de variables explicativas a los modelos como la senoidal, cosenoidal, indicadoras, la tendencia por medio de tiempo, dejando las más significativas en los modelos individuales.

Como medidas para evaluar los distintos modelos que se usarán, se propone el uso del RMSE y del SMAPE (ecuaciones (3) y (4)), éstas, con el fin de determinar la capacidad de ajuste y de pronóstico y posteriormente realizar una comparación más precisa (Muñoz, 2013):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2} \quad (3)$$

Donde y_t es el valor observado para cada producto en el tiempo t , \hat{y}_t es el valor pronosticado por el modelo respectivo, y n es el número de datos.

$$SMAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|F_t - A_t|}{((A_t + F_t)/2)} \quad (4)$$

Donde A_t es el valor real, F_t es el valor pronosticado y n es el número de datos.

Los modelos a ser utilizados para la estimación y pronóstico de las series de ventas de productos lácteos son: el modelo lineal mixto generalizado (GLMM), modelo basado en estadística clásica, y los modelos lineal mixto generalizado bayesiano (BGLMM), el modelo lineal dinámico Bayesiano (BDLM) y el modelo de regresión bayesiana (BRM) presentado en Valencia (2016) como representantes de esta rama de la estadística.

Los modelos usados y las técnicas de combinación realizadas con base en el algoritmo diseñado en este trabajo para múltiples productos se describen a continuación.

3.1. Modelo lineal mixto generalizado (GLMM)

El modelo lineal mixto generalizado puede ser utilizado cuando existen unidades con estructuras correlacionadas en el tiempo, pero a su vez, expresan algún grado de relación con otras variables, una parte fija y otra aleatoria. La ecuación (4) representa éste modelo con ambas componentes, para cada unidad o individuo i -ésimo (Gómez-Restrepo & Cogollo-Flórez, 2012).

$$y_i = x_i\beta + z_i\alpha_i + \varepsilon_i$$

Donde y_i es el vector de respuestas del i -ésimo individuo, β es un vector de parámetros $p \times 1$, que corresponde a los efectos fijos, x_i representa la matriz de las covariables relativas al sistema del i -ésimo individuo, α_i , representa el efecto del i -ésimo individuo, z_i las covariables del efecto aleatorio y ε_i , el error intra-individual.

En estos casos, la respuesta y_i no tiene una naturaleza continua, como en el modelo lineal mixto gaussiano.

Éstos modelos mixtos generalizados se estiman con máxima verosimilitud con la ayuda de funciones del Programa R, como las del paquete lme4 (Bates *et al.*, 2015), donde es posible especificar la distribución de probabilidad de la variable respuesta, por ejemplo, Poisson. Para este tipo de modelos, la variable respuesta tiene una función link acorde con los modelos lineales generalizados, que, para la respuesta que se asume en este trabajo de tipo Poisson, es el “logaritmo natural”, indicando que el “ln(respuesta)” es la nueva variable respuesta a ser estimada y que el ajuste devuelve la transformación realizada.

3.2. Modelo lineal mixto generalizado Bayesiano (BGLMM)

El modelo lineal mixto generalizado Bayesiano (BGLMM) como se explica en McNeil & Wenden (2007), parte del mismo tipo de ecuación que el expresado en (4), pero, como se ha señalado, por las premisas teóricas de la estadística Bayesiana, los parámetros parten de una distribución a priori, y se construye con

ello, una distribución a posteriori de los mismos parámetros y se realiza un muestreo vía Monte Carlo Por Cadenas de Markov (McNeil & Wendum, 2007).

Para la estimación de estos modelos se parte de una distribución a priori para los parámetros fijos del modelo Lineal Mixto Generalizado, otra distribución para la matriz de varianza covarianza del (los) efecto (s) aleatorio (s), y una distribución de probabilidad para los datos. La función *bglmer* del paquete *blme* del software R (Dorie, 2015), realiza esta estimación, basado en la familia Poisson como la distribución de probabilidad para los datos.

Para los parámetros fijos, las distribuciones de probabilidad a priori que se pueden utilizar en dicha función puede ser la Normal, la t, una no informativa, o un valor específico de desviación o de varianza. En el caso de la varianza de los residuales, su matriz de varianza puede tener una distribución a priori Gamma, Gamma Inversa, o no informativa. En este trabajo se prueban diversas combinaciones de distribuciones a priori hasta encontrar las que tienen mejor desempeño, definiendo una Wishart para la matriz de covarianza de los efectos aleatorios y no informativas para los parámetros fijos y varianza de residuales.

3.3. Modelo lineal dinámico bayesiano (BDLM)

Estos modelos se basan en la estructura y funcionamiento de los modelos en espacio de estado, usados por varios autores para elaborar pronósticos con base en teoría Bayesiana, cuya estimación se facilita al usar el filtro de Kalman (Petris *et al.*, 2009; Valencia *et al.*, 2015). Dicho filtro es un sistema con base en ecuaciones matemáticas que implementan estimadores con técnicas que ayudan a realizar una corrección del error de predicción en un estimador, en el sentido que busca una minimización de la estimación de la varianza del error bajo ciertas condiciones.

Los modelos de espacio estado generan estimaciones donde efectúan actualizaciones recursivas generadas con el filtro de Kalman, por estas razones, dicho filtro es especialmente aplicable a estimaciones bayesianas (Peña & Guttman, 1988). Precisamente en Valencia *et al.* (2015) se describe el paso a paso de la actualización recursiva que se surte en el filtro de Kalman dentro de un Modelo Lineal Dinámico Bayesiano, donde se actualiza el vector de parámetros, las distribuciones a priori y a posteriori, así como la ecuación de observación, generando un nuevo error y convirtiendo el proceso en un ciclo que se renueva continuamente.

La ecuación general para la estructura del BDLM para series multivariadas se describe mediante las ecuaciones de observación y del sistema (5) y (6), respectivamente.

$$Y_{i,t} = F\theta_t^{(i)} + \mathbf{v}_{i,t} \quad (5)$$

$$\theta_t^{(i)} = G\theta_{t-1}^{(i)} + w_{i,t} \quad (6)$$

Donde:

$$v_{i,t} \sim N(0, V_i), w_{i,t} \sim N(0, W_i)$$

$Y_{i,t}$: Pronóstico que actualiza la media de la distribución predictiva en cada ciclo del filtro de Kalman. $\theta_t^{(i)}$: Vector de parámetros del sistema que también actualiza las distribuciones a priori y a posteriori en cada ciclo.

El modelo estimado sigue una representación estacional de espacio-estado multivariada (Petris, 2010; Petris *et al.*, 2009), expresiones mostradas en (7). En éstas el factor estacional es $\delta_t^{(i)}$, para este caso es el día de la semana.

$$\begin{aligned} Y_{i,t} &= \mu_t^{(i)} + \delta_t^{(i)} + v_{i,t} \\ \mu_t^{(i)} &= \mu_{t-1}^{(i)} + \delta_t^{(i)} + w_{i,t} \\ \delta_t^{(i)} &= \delta_{t-1}^{(i)} - \delta_{t-2}^{(i)} - \delta_{t-3}^{(i)} - \delta_{t-4}^{(i)} - \delta_{t-5}^{(i)} - \delta_{t-6}^{(i)} + w_{i,t}^s \end{aligned} \quad (7)$$

Donde:

$$v_{i,t} \sim N(0, V_i), w_{i,t} \sim N(0, W_i), w_{i,t}^s \sim N(0, W_i^s), \text{ son las variables del error.}$$

3.4. Modelo de regresión Bayesiana (BRM)

Este modelo es descrito en la tesis de Valencia (2016). Parte de asignar una distribución normal a priori para el vector de parámetros β , y normal para los datos. En dicho trabajo se muestra un proceso de innovación para el vector inicial β_0 para cada tiempo t , pero el parámetro de precisión $\tau_0 = 1/\sigma$ es fijo. La deducción de la distribución predictiva usada para pronosticar es presentada en dicha tesis, la cual resulta en una T de Student.

La distribución predictiva, luego de hecha la integral del producto entre la posterior y la distribución futura de los datos está dada en la ecuación (8):

$$f(Y_+|y_0, Y) = [((Y_+ - Y_n)' A^{-1} + (Y_+ - Y_n) + 1) A]^{-\frac{T+4}{2}} \quad (8)$$

La cual es una T-student, con media $Y_n = X_+ \tilde{\beta}$, v grados de libertad, y varianza dada por (9):

$$V = \frac{v}{v-2} \quad A = \frac{v}{v-2} (Y_+ - Y_n)' (Y_+ - Y_n) \quad (9)$$

Para el proceso de combinación de pronósticos se basa en la inclusión de los modelos individuales previamente descritos. Se diseña un algoritmo basado en una técnica de combinación que usa el RMSE; se usan además, las combinaciones dadas por las funciones `comb_BG` y `comb_EIG1` del paquete `GeomComb` (Weiss, 2016). Finalmente se agregan las anteriores programaciones y funciones en un algoritmo que unifica los pronósticos individuales y estima las combinaciones para las múltiples series de tiempo que han sido usadas, posterior a las estimaciones individuales, como se explica a continuación.

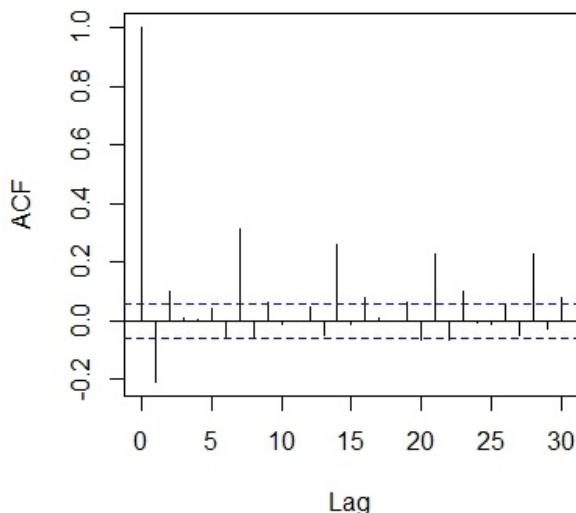
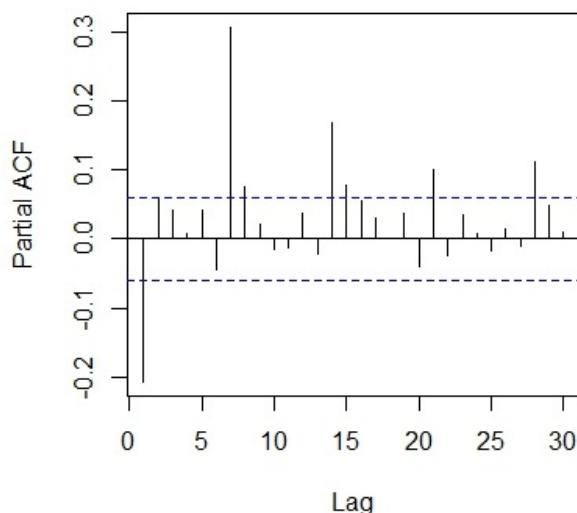
Función ACF para la serie Y1**Función PACF para la serie Y1**

Figura 2: Funciones de ACF y PACF de la serie Y1. Fuente: Elaboración propia.

3.5. Combinación de pronósticos

En la fase de combinaciones se diseñó un algoritmo que puede ser replicado en cualquier otro programa, sacando como resultado las combinaciones para múltiples productos, con los siguientes pasos: 1. Lectura de series de tiempo de las demandas de todos los productos. 2. Lectura de valores ajustados con los modelos individuales. 3. Lectura de valores pronosticados con los modelos individuales. 4. Estimación de valores de RMSE y SMAPE de ajuste y de pronósticos para todos los modelos. 5. Estimación de combinaciones: la primera programada con base en el RMSE, la segunda en Bates & Granger, la tercera en vector propio, las últimas dos bajo funciones programadas en GeomComb de Weiss (2016). 6. Estimación de indicadores RMSE y SMAPE de pronóstico para todas las combinaciones. 7. Resultados de indicadores de todos los modelos y de las combinaciones.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Del análisis descriptivo se encuentra una autocorrelación en las series de tiempo y estacionalidad de orden 7, lo cual puede apreciarse en la figura 2, dados los valores de autocorrelación por fuera de las bandas en las funciones ACF y PACF.

Para las otras series de tiempo, las figuras son muy similares, indicando un orden estacional 7. Se usan entonces las mismas variables explicativas en las estimaciones de los modelos individuales como se describe en los resultados.

Se estimaron todos los modelos y combinaciones en el siguiente caso de estudio. El objeto de estudio son tres series de tiempos de productos facturados por una empresa del sector lácteo de Colombia, durante un periodo de tres años, empezando desde el 1 de enero de 2010 y finalizando el 31 de diciembre del 2012, para un total de $N=1096$ observaciones, dejando para evaluar la capacidad de pronóstico 14 observaciones finales de la base (2 semanas calendario) es decir $m=14$, dadas las condiciones de planeación logística de la empresa; por tanto el ajuste se hace con $n=1082$ observaciones. La serie es de frecuencia diaria.

4.1. Modelo lineal mixto generalizado (GLMM)

El análisis parte de los siguientes datos:

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos.

Variables explicativas: TIEMPO, SENOIDAL, COSENOIDAL, INDICADORAS: DIAjueves, DIALunes, DIAmartes, DIAmiercoles, DIAsabado, DIAviernes.

La estimación del GLMM permite obtener los resultados presentados en la tabla 1.

Tabla 1: Tabla de parámetros estimados para $m=14$ y $n=1082$ del modelo GLMM. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor Z	P($ z $)
Intercepto	8.5449906	0.3426657	24.9	<2e-16
COSENOIDAL	-0.0442598	0.0006001	-73.8	<2e-16
SENOIDAL	-0.0303668	0.0380426	-0.8	0.425
DIAjueves	0.1614398	0.0007957	202.9	<2e-16
DIALunes	0.1815893	0.0007909	229.6	<2e-16
DIAmartes	0.1375735	0.0008001	171.9	<2e-16
DIAmiércoles	0.0668904	0.0008137	82.2	<2e-16
DIAsábado	0.2969244	0.0007711	385.1	<2e-16
DIAviernes	0.1821512	0.0007908	230.3	<2e-16

Al usar el nivel de significancia alfa de 0.05 para el análisis de este modelo, se aprecia la significancia de la mayoría de las variables, excepto SENOIDAL. En la tabla 2 se aprecian los indicadores SMAPE y RMSE del modelo GLMM.

Tabla 2: Indicadores SMAPE y RMSE para el modelo GLMM, 14 días de pronóstico. Fuente: Elaboración propia.

Modelo	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
GLMM	SMAPE AJUSTE	0.1133046	0.1498572	0.1019512
	RMSE AJUSTE	861.1126	650.3818	2190.745
- 14 DÍAS	SMAPE PRONOSTICO	0.2607798	0.2660003	0.2157739
	RMSE PRONOSTICO	2234.262	1723	4852.498

4.2. Modelo lineal mixto generalizado bayesiano (BGLMM)

El análisis parte de los siguientes datos iniciales:

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos, para un total de 3288 datos.

Variables explicativas: TIEMPO, SENOIDAL, COSENOIDAL, INDICADORAS: DIAjueves, DIALunes, DIAMartes, DIAmiercoles, DIAsabado, DIAviernes.

Los resultados del modelo BGLMM son presentados en la tabla 3.

Tabla 3: Tabla de parámetros estimados para m=14 y n=1082 modelo BGLMM. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor Z	P(> z)
Intercepo	8.5593729	0.4160576	20.6	<2e-16
COSENOIDAL	-0.0441165	0.0006001	-73.5	<2e-16
SENOIDAL	-0.0292278	0.0482913	-0.6	0.553
DIAjueves	0.1616877	0.0007957	203.2	<2e-16
DIALunes	0.1818705	0.0007909	230.0	<2e-16
DIAMartes	0.1378317	0.0008002	172.2	<2e-16
DIAmiercoles	0.0671176	0.0008138	82.5	<2e-16
DIAsabado	0.2971862	0.0007711	385.4	<2e-16
DIAviernes	0.1824183	0.0007908	230.7	<2e-16

Al usar el nivel de significancia α de 0.05 para el análisis de este modelo, se aprecia la significancia de la mayoría de las variables, excepto SENOIDAL.

La tabla 4 resume los indicadores SMAPE y RMSE para este modelo. Se aprecia que los resultados no difieren demasiado con respecto al modelo GLMM previo.

Finalmente, del modelo BGLMM es posible ver que, con base en el indicador SMAPE, tanto en términos de ajuste como en términos de pronóstico y para los tres productos se presentaron mejores resultados para el análisis de 14 días. Situación similar a la que se presenta cuando se analiza con base en el indicador

Tabla 4: Indicadores SMAPE y RMSE para el modelo BGLMM, 14 días. Fuente: Elaboración propia.

Modelo	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
BGLMM - 14 DÍAS	SMAPE AJUSTE	0.1133110	0.1498913	0.1019335
	RMSE AJUSTE	861.1319	650.4701	2190.609
	SMAPE PRONÓSTICO	0.2608418	0.2660491	0.2157681
	RMSE PRONÓSTICO	2234.355	1723.022	4852.443

de RMSE, puesto que el caso de 14 días genera mejores resultados tanto en términos de ajuste, como en términos de pronóstico.

4.3. Modelo dinámico lineal bayesiano o BDLM

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos, para un total de 3288 datos.

Con este modelo se procedió a su estimación con valores distintos para las matrices de varianzas W2 y V, aplicando un porcentaje de la matriz de varianza original, con el fin de comparar los resultados y determinar si hay algún indicio de cambios en los indicadores SMAPE, tanto de ajuste como de pronóstico.

Las variaciones porcentuales de la matriz de varianza y covarianza fueron: 100 %, 20 %, 10 %, 5 % y 1 %. Para todos los anteriores se procedió a analizar su SMAPE respectivo, valores que se resumen en la tabla 5.

Tabla 5: Indicadores de SMAPE para variaciones de la varianza, productos modelo BDLM, 14 días. Fuente: Elaboración propia.

% Var Modelo BDLM	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
(Var 100 %)	SMAPE Ajuste	0.1360946	0.1825339	0.1186081
	SMAPE Pronóstico	0.2587795	0.2601995	0.2349506
(Var 20 %)	SMAPE Ajuste	0.1365151	0.1822709	0.1183841
	SMAPE Pronóstico	0.2587626	0.2602433	0.2349855
(Var 10 %)	SMAPE Ajuste	0.1366053	0.1830196	0.1182411
	SMAPE Pronóstico	0.2587437	0.2602715	0.2350241
(Var 5 %)	SMAPE Ajuste	0.1365431	0.1839926	0.1182124
	SMAPE Pronóstico	0.2587092	0.2603142	0.2350910
(Var 1 %)	SMAPE Ajuste	0.1370200	0.1880636	0.1194906
	SMAPE Pronóstico	0.2584839	0.2605035	0.2353633

De esta tabla 5 se puede observar que para el producto Y1 su mejor ajuste se realiza con la varianza al 100 % aunque el mejor pronóstico es dado por la varianza al 1 %, no difiere mucho del caso del 100 %. Siendo

en términos generales mejor el ajuste y pronóstico. Para el producto Y2, su mejor ajuste se realiza con la varianza al 20 %, mientras que el mejor pronóstico se realiza con la varianza al 100 %. Para el producto Y3, el mejor ajuste se realiza con la varianza al 5 %, mientras que el mejor pronóstico se realiza con la varianza al 100 %. Dado que hubo pocas variaciones de un porcentaje de la varianza a otro, se decide usar los valores de la varianza al 100 %, para continuar con el comparativo.

4.4. Modelo BRM

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos, para un total de 3288 datos.

Variables explicativas: Variable indicadora, día de la semana: DIAjueves, DIALunes, DIAMartes, DIAMiercoles, DIAsabado, DIAviernes.

La tabla 6 resume los indicadores RMSE y SMAPE para este modelo, para cada uno de los productos. Para el producto Y1, el mejor resultado fue alcanzado con el percentil 0.01 de la distribución T de Student predictiva; para el producto Y2, el percentil 0.95 al igual que para el producto Y3.

Tabla 6: Indicadores SMAPE y RMSE, modelo BRM, para los productos Y1, Y2 y Y3. Fuente: Elaboración propia.

Modelo	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
BRM - 14 Días	SMAPE AJUSTE	0.114054	0.1450512	0.1062252
	RMSE AJUSTE	856.625221	643.392469	2172.65243
	SMAPE PRONOSTICO	0.2230162	0.2276766	0.2072645
	RMSE PRONOSTICO	2212.77999	1719.06294	4845.11599

4.5. Combinaciones de pronósticos

Para la combinación de pronósticos se realizaron 3 metodologías: la combinación con base en el RMSE; la combinación basada en Bates & Granger en la función comb_BG del paquete GeomComb; y la combinación basada en vectores propios de la función comb_EIG1 desarrollada por los autores Hsiao y Wan en 2014. Los resultados de todos los modelos individuales y las combinaciones realizadas, se muestran en la tabla 7, con el fin de realizar el comparativo.

Los resultados de indicadores señalan al modelo BRM como el mejor en casi todos los casos, excepto para el producto Y2, cuyo menor RMSE le corresponde a la combinación BG. Sin embargo, para el producto Y1, la combinación BG y el modelo BDLM también muestran buen desempeño. En general, las combinaciones RMSE y BG tienen resultados cercanos al modelo BRM para Y1 y Y3, lo cual muestra que son alternativas funcionales para elaborar pronósticos, así como el modelo BGLMM para Y3, para este tipo de casos con

Tabla 7: Indicadores RMSE y SMAPE de pronóstico para todos los modelos y combinaciones, m=14. Fuente: Elaboración Propia.

Modelo	Producto Y1		Producto Y2		Producto Y3	
	RMSE	SMAPE	RMSE	SMAPE	RMSE	SMAPE
BDLM	2212.91300	0.25878	1768.00000	0.26020	5035.75800	0.23495
GLMM	2234.26200	0.26078	1723.00000	0.26600	4852.49800	0.21577
BGLMM	2234.35500	0.26084	1723.02200	0.26605	4852.44300	0.21577
BRM	2212.77999	0.22302	1719.06294	0.22768	4845.11599	0.20726
COMB - RMSE	2216.61800	0.25016	1712.69800	0.23331	4874.82200	0.21559
COMB - BG	2217.32200	0.24969	1711.53600	0.23533	4871.66500	0.21521
COMB - EIG1	2216.72700	0.25060	1713.29700	0.23258	4876.26400	0.21581

comportamiento estacional.

5. CONCLUSIONES

Se realizó una revisión de diferentes modelos para pronósticos, así como técnicas de combinación que se usan diferentes pronósticos individuales para buscar una mayor precisión. Algunas metodologías se basan en promedio simple, pesos fijos, pesos rotativos, etc., en el inverso del RMSE o IRMSE usado en (Nowotarski *et al.*, 2016), en regresiones. Además, algunas de éstas se encuentran en el paquete de R llamado Geom-Comb.

Se diseñó un algoritmo en R para tres productos que incorpora los pronósticos individuales y genera pronósticos combinados usando tres técnicas, que también puede replicarse en otros casos en los que se requiera comparar resultados. Las 3 metodologías de combinaciones de pronósticos fueron la del RMSE usada en (Nowotarski *et al.*, 2016); la de Bates & Granger (1969) con la función comb_BG; y la basada en vectores propios con la función comb_EIG1 desarrollada por los autores Hsiao y Wan en 2014, que no encuentra tan buen desempeño en este caso de estudio. Algunas de las técnicas de combinación usadas, si bien fueron mejores que otros pronósticos individuales, ninguna de éstas logró ser mejor en todos los casos, pero generan resultados que en general pueden clasificarse con un buen desempeño predictivo.

A partir de las comparaciones de los indicadores SMAPE y RMSE, para el caso de estudio, puede afirmarse que el modelo BRM tuvo buenos resultados, pero se logró observar que las combinaciones RMSE y BG tienen resultados cercanos al modelo BRM con buen desempeño, lo cual muestra que son alternativas funcionales para elaborar pronósticos, y por lo tanto, se recomienda su uso cuando se tengan datos similares a los del caso de estudio aquí presentado.

AGRADECIMIENTOS

A Colciencias, por beca de joven investigador, por medio de la Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Referencias

- Andersson, M. & Karlsson, S. (2007). Bayesian forecast combination for VAR models. *Sveriges Riskbank-Working Papers*, 1-17. Disponible en: http://www.riksbank.se/Upload/Dokument_riksbank/Kat_publicerat/WorkingPapers/2007/wp216.pdf
- Barrow, D. & Kourentzes, N. (2016). Distributions of forecasting errors of forecast combinations: Implications for inventory management. *International Journal of Production Economics*, 177, 24-33. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.03.017>
- Bates, D.; Maechler, M.; Bolker, B. & Walker, S. (2015). Fitting Linear Mixed-Effects Models Using lme4. *Journal of Statistical Software*, 67(1), 1-48. <https://doi.org/10.18637/jss.v067.i01>
- Bates, J. & Granger, C. (1969). The combination of forecasts. *Operational Research Quarterly*, 20(4), 451-468.
- Bowerman, B.; Koehler, A. & O'Connell, R. (2007). Pronósticos, series de tiempo y regresión: un enfoque aplicado. México, DF: CENCAGE Learning.
- Chan, C.; Kingsman, B. & Wong, H. (1999). The value of combining forecasts in inventory management ± a case study in banking. *European Journal of Operational Research*, 117(2), 199-210.
- Chen, K. (2011). Combining linear and nonlinear model in forecasting tourism demand. *Expert Systems with Applications*, 38(8), 10368-10376. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.02.049>
- Congdon, P. (2002). *Bayesian Statistical Modelling*. (U. of London, Ed.). London, England: Wiley Series in Probability and Statistics.
- Doganis, P.; Alexandridis, A.; Patrinos, P. & Sarimveis, H. (2006). Time series sales forecasting for short shelf-life food products based on artificial neural networks and evolutionary computing. *Journal of Food Engineering*, 75(2), 196-204. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2005.03.056>
- Dorie, V. (2015). Package “blme”. Disponible en: <https://cran.r-project.org/>
- Jun-jun, G. & Ting, K. (2009). A joint decision model of inventory control and promotion optimization based on demand forecasting. *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Automation and Logistics, ICAL 2009*, 201800(August), 119-123. IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICAL.2009.5262965>

Gómez-Restrepo, J. & Cogollo-Flórez, M. (2012). Detection of Fraudulent Transactions Through a Generalized Mixed Linear Models. *Ingeniería y Ciencia*, 8(16), 221-237.

Guo, F.; Diao, J.; Zhao, Q.; Wang, D. & Sun, Q. (2017). A double-level combination approach for demand forecasting of repairable airplane spare parts based on turnover data. *Computers & Industrial Engineering*, 110, 92-108. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.05.002>

Hanke, J., & Wichern, D. (2006). *Pronósticos en los negocios*. Pearson Educación.

Hsiao, C. & Wan, S. (2014). Is there an optimal forecast combination? *Journal of Econometrics*, 178, 294-309. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2013.11.003>

Hyndman, R.; Ahmed, R.; Athanasopoulos, G. & Shang, H. (2011). Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(9), 2579-2589. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2011.03.006>

Kociecki, A., Kolasa, M., & Rubaszek, M. (2012). A Bayesian method of combining judgmental and model-based density forecasts. *Economic Modelling*, 29(4), 1349-1355. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2012.03.004>

McNeil, A. & Wenden, J. (2007). Bayesian inference for generalized linear mixed models of portfolio credit risk. *Journal of Empirical Finance*, 14(2), 131-149. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2006.05.002>

Miller, J.; Berry, C. & Lai, C. (2007). A comparison of alternative forecasting strategies for multistage production-inventory systems. *Decision Sciences*, 7(4), 714-724.

Min, C. & Zellner, A. (1993). Bayesian and non-Bayesian methods for combining models and forecasts with applications to forecasting international growth rates. *Journal of Econometrics*, 56(1-2), 89-118. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4076\(93\)90102-B](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4076(93)90102-B)

Montoya, A.; Montoya, I. & Castellanos, O. (2010). Situación de la competitividad de las Pyme en Colombia: elementos actuales y retos. *Agronomía Colombiana*, 28(1), 107-117.

Muñoz, L. (2013). Cálculo del RMSE vertical del Modelo de Elevación de Superficie NEXTMap® World 30 DSM vs. la Red Geodésica de Primer Orden de Costa Rica.

Nowotarski, J.; Liu, B.; Weron, R. & Hong, T. (2016). Improving short term load forecast accuracy via combining sister forecasts. *Energy*, 98, 40-49. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2015.12.142>

Peña, D. & Guttman, I. (1988). Bayesian approach to robustifying the Kalman filter. *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Linear Models*, 227-254.

Petris, G. (2010). An R Package for Dynamic Linear Models. *Journal of Statistical Software*, 36(12), 1-16. Retrieved from <http://www.jstatsoft.org/>

- Petris, G.; Petrone, S. & Campagnoli, P. (2009). Dynamic Linear Models with R. Disponible en: <http://www.springer.com/statistics/statistical+theory+and+methods/book/978-0-387-77237-0>
- R Core Team. (2014). A Language and Environment for Statistical Computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Disponible en: <http://www.r-project.org/>
- Rodríguez, A. (2003). La realidad de la Pyme colombiana: desafío para el desarrollo (pp. 1-20). Programa Mejoramiento de las Condiciones de Entorno Empresarial, FUNDES Colombia.
- Sánchez, J.; Osorio, J. & Baena, E. (2007). Algunas aproximaciones al problema de financiamiento de las Pymes en Colombia. *Scientia et Technica*, 13(34).
- Simchi-Levi, D.; Kaminski, P. & Simchi-Levi, E. (2008). *Designing and Managing the Supply Chain: concepts, strategies, and cases*. New York: McGraw-Hill.
- Valencia, M. (2016). *Dynamic Model for the Multiproduct Inventory Optimization with Multivariate Demand*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. Disponible en: <http://www.bdigital.unal.edu.co/51516/1/43616826.2015.pdf>
- Valencia, M.; Correa, J.; & Díaz, F. (2015). Métodos Estadísticos Clásicos y Bayesianos para el pronóstico de demanda. Un análisis comparativo. *Revista Facultad de Ciencias*, 4(1), 52-67. <https://doi.org/https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v4n1.49775>
- Valencia, M.; Díaz, F. J. & Correa, J. C. (2015). Planeación de inventarios con demanda dinámica. Una revisión del estado del arte. *Dyna*, 82(190), 182-191. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.15446/dyna.v82n190.42828>
- Weiss, M. (2016). Package “GeomComb”.
- Yelland, P. (2010). Bayesian forecasting of parts demand. *International Journal of Forecasting*, 26(2), 374-396. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2009.11.001>
- Zotteri, G. & Kalchschmidt, M. (2007). A model for selecting the appropriate level of aggregation in forecasting processes. *International Journal of Production Economics*, 108(1), 74-83. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2006.12.030>