

CARTA DE CONTROL T DE ARL INSESGADO CON PARÁMETRO ESTIMADO ^a

ARL UNBIASED CONTROL T CHART WITH ESTIMATED PARAMETER

JHON EDINSON HINESTROZA RAMÍREZ^b, NELFI GERTRUDIS GONZÁLEZ ÁLVAREZ^c

Recibido 19-12- 2017, aceptado 23-05-2018, versión final 21-01-2019.

Artículo Investigación

RESUMEN: Usualmente, los límites de una carta de control se construyen usando estimaciones de los parámetros asociados a la distribución de la variable o estadístico que se monitorea y estas estimaciones pueden afectar desfavorablemente las medidas de desempeño, tales como la tasa de falsas alarmas y la longitud promedio de corrida o *ARL* (*Average Run Length*). En particular, en este trabajo se estudian los efectos de las estimaciones en el desempeño de la carta t en fase II a través del análisis de su *ARL*. La carta t es usada para monitorear el tiempo T entre eventos de interés, asumiendo que esta variable sigue una distribución exponencial con tasa de falla λ_0 , es decir, $T \sim \exp(\lambda_0)$. Inicialmente, se evalúa la *ARL* cuando λ_0 es conocido y cuando se usa un valor estimado según dos estimadores (sesgado e insesgado). Este análisis preliminar muestra que la carta en cualquiera de los casos (parámetro conocido y estimado) es de *ARL* sesgado, es decir, esta cantidad no es máxima cuando el proceso está en control. Adicionalmente, es posible ver que, si se usa una muestra de tamaño pequeño en la estimación, la curva *ARL* difiere significativamente en relación a la obtenida cuando λ_0 es conocido. En este trabajo se consideran correcciones en los límites de la carta t para obtener una carta de *ARL* insesgado bajo los siguientes dos diseños: *i*) Límites de control con probabilidades de colas con valores nominales iguales, *ii*) Límites de control con probabilidades de colas con valores nominales diferentes. En ambos casos usando dos criterios de optimización. En el primero, el par de límites de control es tal que la *ARL* sea igual a un valor nominal deseado, ARL_0 , y sea el máximo alcanzado cuando el proceso esté en control. En el segundo criterio, el par límites de control es tal que la tasa de falsas alarmas es igual a un valor nominal α_0 deseado. Los resultados sugieren que cuando se corrigen los límites, es mejor construirlos partiendo de probabilidades de colas con valores nominales iguales, pero es indiferente la elección del estimador entre los dos que fueron considerados en este artículo.

PALABRAS CLAVE: *ARL* (longitud promedio de corrida); *ARL* insesgado; distribución exponencial; tiempo entre eventos.

ABSTRACT: Usually, the limits of a control chart are calculated using estimated values to the parameters of the statistical distribution associated to the variable or statistics which is monitored. These estimations can affect performance

^aHinestroza, J. E., González, N. G. (2019). Carta de control T de *ARL* insesgado con parámetro estimado *Rev. Fac. Cienc.*, 8(2), 6–38. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v8n2.69524>

^bM.Sc. Estadística, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Escuela de Estadística, jhehinestrozara@unal.edu.co.

^cProfesora asociada, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Escuela de Estadística, ngonzale@unal.edu.co.

measures such as the false alarm rate and the Average Run Length (ARL). Particularly, this work considers the effects of the estimations in the performance of the t chart. The t chart is used for monitoring the time T between events of interest, when it is assumed that this variable has an exponential distribution with failure rate λ_0 , that is, $T \sim \exp(\lambda_0)$. Firstly, the ARL is evaluated when λ_0 is known and then when this parameter is estimated using two estimators: biased and unbiased estimator. The initial analysis shows that in each case (known and estimated parameter) the t chart is an ARL-biased chart, that is, the ARL does not have a maximum when the process is in control. Additionally, it is possible to see that if a small sample is used to the estimation, the ARL curve differs significantly from the one is obtained when λ_0 is known. In this work we consider corrections on the limits of the t chart for obtaining an ARL-unbiased chart by means of the following two designs: *i*) Control limits obtained by using tail probabilities with equal nominal value, *ii*) Control limits obtained by using different tail probabilities but such that their sum equals to a nominal false alarm rate. In both cases, we apply two optimization criteria. The first criterion is, the pair of control limits is such that the in-control ARL value is equal to some desired nominal value, ARL_0 , and the ARL attains its maximum when the process is in control. The second criterion is, the pair of control limits is such that the false alarm rate is equal to a desired nominal value α_0 and the ARL attains its maximum when the process is in control. The results suggest that when the limits are corrected, the best option is to use limits with equal tail probabilities and the ARL in control is equal to a desired nominal value, but it does not matter which estimator is selected between the two used in this work.

KEYWORDS: *ARL* (average run length); *ARL* unbiased; time between events; exponential distribution.

1. INTRODUCCIÓN

En el control estadístico de productos no conformes o defectuosos con una baja probabilidad de ocurrencia, se ha propuesto el uso de la denominada carta geométrica en la cual se monitorea el número de ítems buenos hasta el primero que resulte defectuoso. Los límites de esta carta son probabilísticos (con igual probabilidad abajo del límite inferior y arriba del límite superior de control) y constituyen cierta mejora con relación a las cartas np y p (Xie, Goh & Kuralmani, 2000; Yang, Xie, Kuralmani & Tsui, 2002; Tang & Cheong, 2004). Sin embargo, de acuerdo a Xie, Goh & Ranjan (2002) y Montgomery (2007), si la proporción p de ítems defectuosos es extremadamente pequeña, la carta geométrica ya no muestra un desempeño eficiente, por lo que resulta más recomendable monitorear el tiempo transcurrido entre dos unidades defectuosas. En particular, si la ocurrencia de defectuosos se puede modelar como un proceso de Poisson, entonces el tiempo T entre dichos eventos puede modelarse como una variable aleatoria con distribución exponencial (Zhang, Xie & Goh, 2005). Bajo el anterior supuesto, fue propuesta la carta *CQC* (cumulative quantity control) que también es conocida como carta exponencial, carta *TBE* o carta t (Chan, Xie & Goh, 2000; Xie *et al.*, 2002). La carta t es por tanto usada en el monitoreo del tiempo entre eventos raros o de baja tasa de ocurrencia, como por ejemplo, los sismos y la producción de unidades defectuosas en procesos altamente confiables (Xie & Goh, 1992; Chan *et al.*, 2000; Borrór, Keats & Montgomery, 2003; Jensen, Jones-Farmer, Charles & Woodall, 2006; Santiago & Smith, 2013).

En la literatura de cartas de control han aparecido muchos trabajos con relación al monitoreo del tiempo entre eventos. De acuerdo con Yen, Chong & Ha (2013), Calvin (1983) fue el primero en desarrollar la carta

para el tiempo entre eventos, la cual fue luego estudiada por Goh (1987) como el conteo acumulado de no conformes y la denominó como carta *CCC* (cumulative count of conforming). La contraparte continua de esta carta es la carta *CQC* propuesta por Chan *et al.* (2000), aunque previamente Radaelli (1998) ya había presentado una metodología unificada para el diseño de cartas tipo Shewhart unilaterales y bilaterales para el tiempo entre eventos, la cual ejemplificó con la carta exponencial. Xie *et al.* (2002), Huang & Yang (2015) y Kumar, Chakraborti & Rakitzis (2017) propusieron el monitoreo del tiempo hasta observar r fallas o defectuosos y construyeron límites bajo la distribución Gamma; Xie *et al.* (2002) consideraron además las distribuciones Weibull y Erlang mientras que Kumar *et al.* (2017) adicionaron reglas de corridas junto con correcciones a los límites de control con el fin de obtener una carta de ARL insesgado y con mayor sensibilidad a pequeñas desviaciones, asumiendo conocida la tasa de falla del proceso en control; Huang & Yang (2015) también presentaron un método para corregir los límites en la carta Gamma asumiendo conocidos los parámetros de la distribución subyacente. Cheng & Chen (2010) y Santiago & Smith (2013) consideraron la aplicación de reglas de corridas en la carta *CQC* o carta t con el mismo fin.

Zhang, Xie & Goh (2006) propusieron para la carta exponencial estimar la tasa de falla del proceso durante la Fase I de control aplicando un esquema de muestreo secuencial y la corrección de los límites para obtener una carta de ARL insesgado, siguiendo la misma fórmula de ajuste propuesta por Xie *et al.* (2000), pero adaptando las constantes de corrección al tamaño de muestra usado en la estimación de la tasa de falla. Por su parte, Guo, Wang & Xie (2014) diseñaron límites para la carta exponencial aplicada a muestras con censura tipo II, para monitorear la media del tiempo de falla de un proceso, construyendo límites de control tales que las cartas fueran de ARL insesgado, tanto en el caso de media conocida como estimada.

Esquemas de monitoreo tipo CUSUM (*cumulative sum*) y EWMA (*exponential weighted moving average*) también han sido propuestos para el monitoreo del tiempo entre eventos con el fin de detectar mejor pequeñas desviaciones en la tasa de ocurrencia de unidades defectuosas. Por ejemplo, Borror *et al.* (2003) proponen una carta CUSUM para detectar el incremento en la tasa de unidades defectuosas monitoreando el tiempo transcurrido hasta observar una unidad defectuosa. Aslam, Azam & Jun (2015) y Ozsan, Testik & Weiß (2010) proponen una carta EWMA a partir de la cual obtienen una mejora en la sensibilidad de la misma para detectar cambios en el proceso.

De acuerdo a Ryan (2011), cuando se implementa una carta de control con límites 3σ , esto es, a ± 3 desviaciones estándar de la media del estadístico o variable monitoreada y se parte del supuesto de que estas cantidades se distribuyen de forma normal o aproximadamente normal. Sin embargo, cuando la no normalidad afecta significativamente el desempeño de la carta, es más recomendable usar límites probabilísticos. En cualquier caso, es necesario considerar que la distribución de probabilidad depende de uno o más parámetros según su tipo, los cuáles suelen asumirse conocidos cuando se opera en la denominada Fase II de control o de monitoreo (Jensen *et al.*, 2006). Este último supuesto en la práctica no es cierto, puesto que resulta necesaria la estimación de los parámetros en la Fase I de control.

El efecto negativo de la estimación de los parámetros sobre el desempeño de las cartas de control ha sido una preocupación para muchos investigadores en el área del control estadístico de procesos (SPC), tal como se evidencia en Ryan (2011), Jensen *et al.* (2006), Montgomery (2007), Woodall & Montgomery (2014), Psarakis, Vynioua & Castagliola (2014), Knoth, S., & Schmid, W. (2015), entre otros. Se han desarrollado diversos trabajos abordando los efectos de la estimación de parámetros sobre el desempeño de las cartas \bar{X} , S , cartas tipo EWMA y CUSUM (Chakraborti, 2007; Ozsan *et al.*, 2010; Zhang, Peng, Schuh, Megahed & Woodall, 2013; Yang *et al.*, 2002; Khoo, Lee, Teoh, Liew & Teh, 2013; Saghir, Lin & Chen, 2015).

Según Jensen *et al.* (2006) y Psarakis *et al.* (2014), cuando los límites de control son determinados usando estimaciones de los parámetros de la distribución subyacente, las cartas de control con dichos límites no exhiben el mismo desempeño que las construidas con los parámetros conocidos, en especial si las estimaciones fueron hechas a partir de muestras pequeñas, aunque en la práctica suele desconocerse que esto puede tener efectos desfavorables en el desempeño de la carta de control en la Fase II de control. Por ejemplo, trabajar con parámetros estimados puede afectar negativamente la tasa de falsas alarmas, así como conducir a una lenta generación de señales válidas sobre desviaciones del estado estable en un proceso, lo cual a su vez puede impedir la corrección y prevención temprana de situaciones críticas debidas a causas asignables. También resultan afectadas medidas de desempeño de la carta como la longitud promedio de corrida o ARL (*Average Run Length*), la desviación estándar de la longitud de corrida o SDRL (*Standard Deviation of the Run Length*), el tiempo promedio para una señal o ATS (*Average Time to Signal*) y la longitud mediana de corrida o MRL (*Median Run Length*).

Este artículo tiene como propósito estudiar los efectos de la estimación del parámetro λ_0 sobre el desempeño de la carta t en la Fase II de control a partir del análisis de su curva *ARL*, la cual se define como una función del factor δ que modifica la tasa de falla del proceso, es decir, cuando este parámetro cambia a $\lambda = \delta\lambda_0$, $\delta > 0$. El estudio desarrollado parte de la formulación de límites de control para la carta t , considerando que λ_0 es estimado, teniendo en cuenta para ello dos estimadores y para los cuales se analizan y comparan su influencia sobre el desempeño de la carta. Esta es una contribución importante, en la medida que permite establecer una comparación entre los resultados obtenidos con un estimador sesgado y otro insesgado para la ARL de la carta t , a diferencia de lo que ocurre en Zhang *et al.* (2006) en donde sólo trabaja con el primero. Es de resaltar que aunque en Zhang *et al.* (2006) usan el mismo estimador insesgado del parámetro λ_0 empleado aquí, los autores desarrollan un muestreo secuencial en fase I, el cual consiste en actualizar el valor del estimador cada vez que se tiene una observación (muestra) adicional del proceso, para luego recalcular los límites de control, lo anterior tiene el inconveniente de que la estimación de los límites no es independiente de las observaciones, además, en el desarrollo presentado por los autores no es claro la forma de valorar si dicha observación nueva proviene o no del proceso en control. Además de lo anterior, Zhang *et al.* (2006) corrigen los límites de control siguiendo la idea aplicada por Xie *et al.* (2000) en la carta geométrica, para lo cual suponen colas de igual probabilidad. Zhang *et al.* (2006) realizan el estudio de la

ARL de la carta t partiendo de una aproximación del mismo y de acuerdo a Yang *et al.* (2002). A diferencia de lo anterior, en este artículo se hace un estudio del desempeño de la carta t durante la fase II, usando una muestra histórica en control de tamaño n que corresponde a tiempos distribuidos de manera exponencial para determinar el estimador sesgado o insesgado de λ_0 para luego calcular los límites de control de acuerdo a la metodología propuesta, establecer colas nominales de igual y distinta probabilidad fijando en un escenario la ARL en un valor y en otro, la tasa de falsa alarma. Además, para el estudio de la ARL se propone el uso de la ARL exacta de la carta no su aproximación.

El desarrollo del artículo comienza con la definición de la carta t y de los estimadores a usar. En la sección 3 se presenta la ARL de la carta estudiada cuando el parámetro es estimado. En la sección 4, se presentan las propuestas para obtener una carta t de ARL insesgado. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. LÍMITES DE LA CARTA t

Si se supone que $T \sim \exp(t; \lambda_0)$ representa el tiempo entre eventos, entonces su función de densidad de probabilidad acumulada (fda) es:

$$F(t; \lambda_0) = 1 - e^{-\lambda_0 t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

en donde λ_0 es la tasa de falla. Cuando λ_0 se asume conocido, los límites de control inferior y superior de la carta t , LCL y UCL, respectivamente, corresponden a los cuantiles $\frac{\alpha}{2}$ y $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución en (1), es decir,

$$LCL = -\frac{1}{\lambda_0} \log(1 - \alpha/2), \quad UCL = -\frac{1}{\lambda_0} \log(\alpha/2). \quad (2)$$

De otra parte, suponga que T_1, T_2, \dots, T_n representan una muestra aleatoria del tiempo entre eventos que provienen de una distribución exponencial con tasa de falla λ_0 , tal que para todo $i = 1, 2, \dots, n$, cada T_i es independiente e idénticamente distribuido. Considere Y la suma de estos n tiempos; es decir,

$$Y = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (3)$$

entonces se cumple que $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$ (Zhang *et al.*, 2006), por lo que su densidad de probabilidad es

$$f_Y(y; n, 1/\lambda_0) = \frac{\lambda_0^n y^{n-1} \exp(-\lambda_0 y)}{(n-1)!}. \quad (4)$$

Un estimador insesgado para el parámetro λ_0 (ver apéndice página 35) de la función de densidad dada en (4) es

$$\hat{\lambda}_{\text{unb}} = \frac{n-1}{Y}, \quad \text{con } Y > 0. \quad (5)$$

Un estimador alternativo para λ_0 es el estimador por máxima verosimilitud,

$$\hat{\lambda}_{\text{bias}} = \frac{n}{Y}, \quad (6)$$

pero $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ sobreestima a λ_0 , es decir, no es un estimador insesgado, pues $E(\widehat{\lambda}_{\text{bias}}) = \frac{n}{n-1}\lambda_0$. Sin embargo, si $n \rightarrow \infty$, $E(\widehat{\lambda}_{\text{bias}}) \rightarrow \lambda_0$ (ver apéndice página 35). Los límites de control para la carta t con λ_0 desconocido son definidos de acuerdo a (2), usando un estimador para λ_0 ($\widehat{\lambda}_0$), así

$$\widehat{LCL} = \frac{-\log(1 - \alpha/2)}{\widehat{\lambda}_0}, \quad \widehat{UCL} = \frac{-\log(\alpha/2)}{\widehat{\lambda}_0}, \quad (7)$$

3. ARL PARA LA CARTA t

3.1. λ_0 Conocido

En este estudio se considera que si un cambio en el proceso ha ocurrido, el parámetro de la distribución se puede escribir en la forma $\lambda = \delta\lambda_0$, $\delta > 0$, de modo que si $0 < \delta < 1$, ha ocurrido una mejora en el proceso; por el contrario si $\delta > 1$ se considera que ha ocurrido un deterioro. Ahora bien, si $\delta = 1$, entonces $\lambda = \lambda_0$ y por lo tanto el proceso está en control. Ahora bien, la probabilidad de que una observación esté por fuera de los límites de control en (2), cuando $T \sim \exp(\delta\lambda_0)$, es,

$$\beta(\delta) = 1 + \exp(\delta \log(\alpha/2)) - \exp(\delta \log(1 - \alpha/2)), \quad (8)$$

y desde que la ARL es el inverso de (8) (Yang *et al.*, 2002; Zhang *et al.*, 2006), entonces

$$ARL(\delta) = \frac{1}{\beta(\delta)} = \frac{1}{1 + \exp(\delta \log(\alpha/2)) - \exp(\delta \log(1 - \alpha/2))}. \quad (9)$$

3.2. λ_0 Estimado

Suponga que durante el monitoreo la tasa de falla cambia de λ_0 a $\lambda = \delta\lambda_0$, $\delta > 0$ y considere a $\Psi(\delta|Y = y)$, la probabilidad condicional definida por,

$$\Psi(\delta|Y = y) = P\{T < \widehat{LCL} \text{ ó } T > \widehat{UCL} | T \sim \exp(\lambda), Y = y\} = 1 - \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}) + \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}),$$

luego, usando (7) se obtiene que

$$\Psi(\delta|Y = y) = 1 - \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(1 - \alpha/2)}{\widehat{\lambda}_0}\right] + \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(\alpha/2)}{\widehat{\lambda}_0}\right]. \quad (10)$$

De otra parte, la ARL condicional a $Y = y$ para los límites dados en (7), se puede definir como:

$$ARL(\delta|Y = y)_{\text{Est}} = [\Psi(\delta|Y = y)]^{-1},$$

entonces la ARL incondicional,

$$ARL(\delta)_{\text{Est}} = E[ARL(\delta|Y = y)_{\text{Est}}],$$

corresponde a

$$ARL(\delta)_{\text{Est}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(1 - \alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right] + \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(\alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right]} dy, \quad (11)$$

donde $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$ y su función de densidad se escribe como en (4). Si se reemplaza a $\hat{\lambda}_0$ en (7) por los estimadores definidos en (5) y (6), los límites de control quedan respectivamente como

$$\widehat{LCL}_{\text{unb}} = -\log(1 - \alpha/2) \frac{Y}{n-1}, \quad \widehat{UCL}_{\text{unb}} = -\log(\alpha/2) \frac{Y}{n-1}, \quad (12)$$

y

$$\widehat{LCL}_{\text{bias}} = -\log(1 - \alpha/2) \frac{Y}{n}, \quad \widehat{UCL}_{\text{bias}} = -\log(\alpha/2) \frac{Y}{n}, \quad (13)$$

donde $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}})$ y $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$, son respectivamente, los límites estimados de la carta t usando los estimadores $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ y $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ de λ_0 . De acuerdo a la ecuación (11), las ARL s incondicionales con estos estimadores son, respectivamente,

$$ARL(\delta)_{\text{unb}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 + \exp\left[\delta\lambda_0 \log(\alpha/2) \frac{y}{n-1}\right] - \exp\left[\delta\lambda_0 \log(1 - \alpha/2) \frac{y}{n-1}\right]} dy \quad (14)$$

y

$$ARL(\delta)_{\text{bias}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 + \exp\left[\delta\lambda_0 \log(\alpha/2) \frac{y}{n}\right] - \exp\left[\delta\lambda_0 \log(1 - \alpha/2) \frac{y}{n}\right]} dy, \quad (15)$$

La Figura 1 muestra las curvas ARL incondicionales vs. δ , en donde, $ARL(\delta)$ es la ARL de la carta con límites (2), $ARL(\delta)_{\text{unb}}$ representa a (14) y $ARL(\delta)_{\text{bias}}$ se refiere a (15), $\alpha = 0.0027$ y $\lambda_0 = 0.01$. La Figura 1(a) corresponde a un tamaño de muestra $n = 5$ y la 1(b) a $n = 100$, estos tamaños de muestra son considerados con la finalidad de mostrar el comportamiento de la curva ARL cuando se usa una muestra “pequeña” o “grande”. Los resultados muestran que para $n = 5$ y desviaciones por encima de $\delta = 1$, la carta t con el estimador $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ (curva $ARL(\delta)_{\text{unb}}$) tiene mejor desempeño que la carta que se construye con el estimador $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ (curva $ARL(\delta)_{\text{bias}}$); por el contrario, para desviaciones por debajo de $\delta = 1$ resulta un poco mejor la carta con el estimador $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$. Si se compara la curva $ARL(\delta)$ con $ARL(\delta)_{\text{unb}}$, se observa que para grandes desviaciones con $\delta \geq 4$, el comportamiento es aproximadamente el mismo, mientras que la $ARL(\delta)_{\text{bias}}$ de la carta con el estimador sesgado es similar a la $ARL(\delta)$ en casos donde hay desviaciones por debajo de $\delta = 1$. Obsérvese además que cuando $n = 100$, la ARL de las cartas de control con parámetro estimado se aproximan a la curva $ARL(\delta)$; es decir, cuando λ_0 es conocido.

La Figura 1 evidencia que sin importar el tamaño de la muestra, las cartas construidas con los estimadores $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ y $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ son de ARL sesgado, por lo cual es necesario aplicar una corrección a sus respectivos límites,

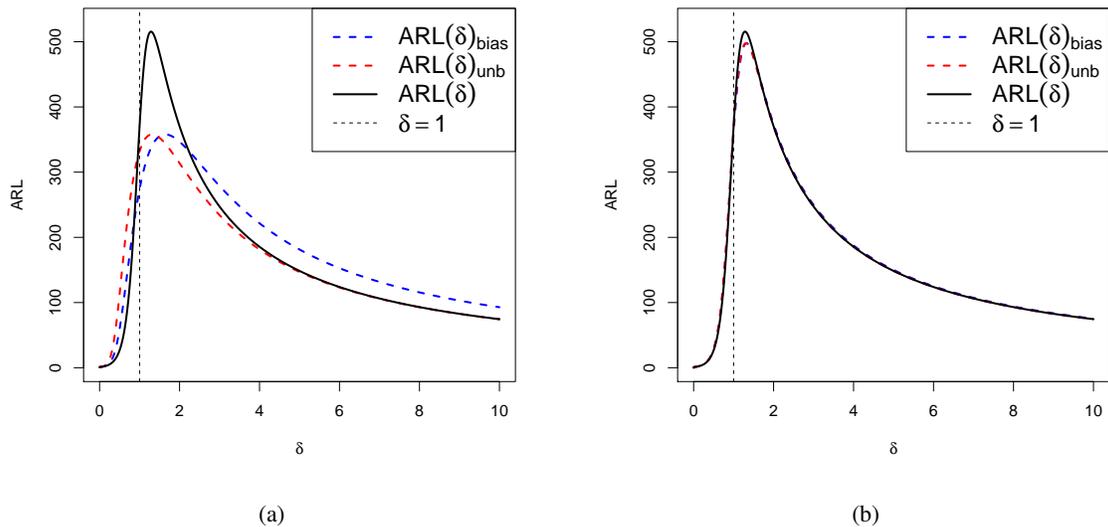


Figura 1: Curvas ARL de la carta t con $\lambda_0 = 0.01$ y $\alpha = 0.0027$ con parámetro conocido y según (14) y (15). (a) $n = 5$ (b) $n = 100$. Fuente: Elaboración propia.

de modo que estas cartas sean de ARL incesgado. Finalmente note de la Figura 1, que las curvas ARL no son simétricas alrededor de $\delta = 1$. En particular, para $\delta = 1 - \Delta$, las ARL s son menores que para $\delta = 1 + \Delta$, con $\Delta > 0$, lo cual implica que en general, las cartas son más lentas para detectar deterioros del proceso que mejoras.

A partir de la ecuación (14) se obtienen los resultados presentados en la Tabla 1, y mediante (15) se obtienen los resultados de la Tabla 2, estas tablas muestran la ARL en control de la carta t empleando los estimadores $\hat{\lambda}_{unb}$ y $\hat{\lambda}_{bias}$ definidos en (5) y (6), respectivamente; la tasa nominal de falsa alarma usada fue $\alpha = 0.0027$. Los resultados en éstas Tablas muestran que la ARL es sensible al tamaño de muestra n pero no al valor de λ_0 . También puede observarse que a mayor tamaño de muestra, la ARL en control con ambos estimadores, es decir, $ARL(1)$, se aproxima más al valor nominal ARL_0 ($ARL_0 = 1/\alpha \approx 370$) y por tanto, se acercan al valor de la $ARL(1)$ cuando λ_0 es conocido. Nótese además que cuando se usa $\hat{\lambda}_{unb}$ los valores de $ARL(1)$ tienden a acercarse más rápido al valor nominal ARL_0 que cuando se emplea el estimador $\hat{\lambda}_{bias}$, lo cual indicaría un comportamiento más favorable con el primer estimador, en especial si se tienen muestras pequeñas y bajo el proceso en control.

Dado el valor de $\alpha = 0.0027$, se espera que la ARL en control esté cerca de 370, pero de acuerdo con los valores en las Tablas 1 y 2, dicha meta ni siquiera es alcanzada para un tamaño de muestra $n = 200$, lo cual indica una fuerte influencia del tamaño de la muestra en el desempeño de la carta cuando λ_0 es estimado. Ahora bien, el valor alcanzado por la $ARL(1)$ cuando λ_0 es estimado también es afectado por el tipo de estimador que se usa, puesto que si se comparan los valores de la $ARL(1)$ para todos los tamaños de muestra usados en las Tablas 1 y 2, su valor es menor cuando el estimador es $\hat{\lambda}_{bias}$.

Tabla 1: Valores de $ARL(1)_{unb}$ para $\alpha = 0.0027$ y distintos λ_0 y $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$.

n	Medida	λ_0						
		0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	1	10
5	$ARL(1)_{unb}$	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892
15	$ARL(1)_{unb}$	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674
30	$ARL(1)_{unb}$	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652
50	$ARL(1)_{unb}$	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942
100	$ARL(1)_{unb}$	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470
200	$ARL(1)_{unb}$	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253

Tabla 2: Valores de $ARL(1)_{bias}$ para $\alpha = 0.0027$ y distintos λ_0 y usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$.

n	Medida	λ_0						
		0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	1	10
5	$ARL(1)_{bias}$	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995
15	$ARL(1)_{bias}$	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607
30	$ARL(1)_{bias}$	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218
50	$ARL(1)_{bias}$	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782
100	$ARL(1)_{bias}$	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694
200	$ARL(1)_{bias}$	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527

En las Figuras 2(a) y 2(b), se comparan nuevamente las curvas $ARL(\delta)_{unb}$ y $ARL(\delta)_{bias}$ respectivamente, con la curva $ARL(\delta)$ correspondiente al caso λ_0 conocido, usando $\alpha = 0.0027$ y $\lambda_0 = 0.01$, pero ésta vez considerando $n = 5, 15, 30$ y 50 . Puede observarse en 2(a) que para $n = 5$ y $1 < \delta \leq 4$ aproximadamente la ARL es menor que la alcanzada con cualquier otro tamaño de muestra, incluso es menor que la $ARL(\delta)$, mientras que para $\delta > 4$ prácticamente coinciden las curvas, en tanto que en 2(b), se observa que con $n = 5$ la curva ARL se ubica por debajo del resto cuando $1 < \delta \leq 2.2$. Sin embargo con δ mayores es peor el desempeño a menor tamaño de muestra (las curvas ARL con $\hat{\lambda}_{bias}$ quedan por encima de la curva $ARL(\delta)$ y se alejan más de ésta a menor n). Lo anterior parece indicar que mientras no se corrijan los límites, resulta mejor un tamaño de muestra pequeño en la detección de deterioros del proceso de la carta t construida con los límites definidos en (12). Sin embargo, lo deseable es que el incremento del tamaño de muestra favoreciera el desempeño de la carta y no al contrario.

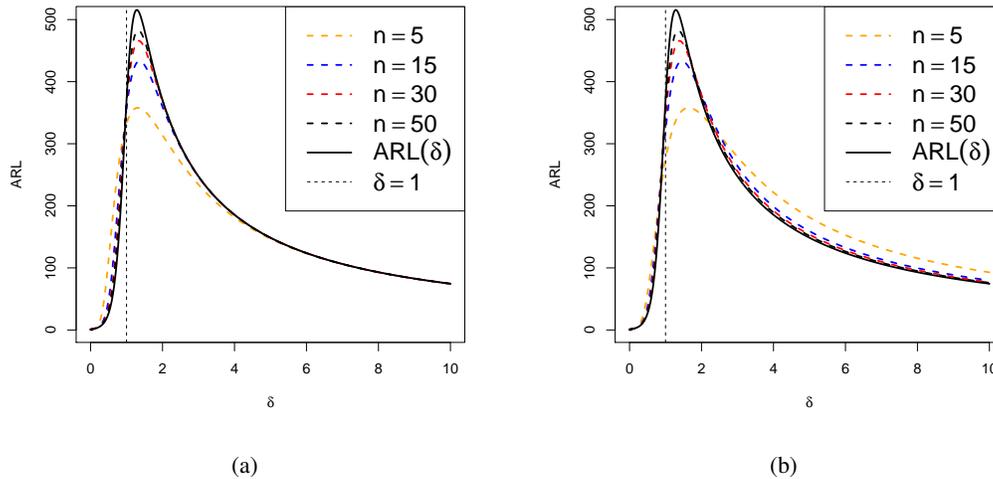


Figura 2: Curva de ARL de la carta t con $\lambda_0 = 0.01$, $\alpha = 0.0027$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$, y 50 . (a) Curvas $ARL(\delta)$ según (2) y de $ARL(\delta)_{unb}$ según (14). (b) Curvas $ARL(\delta)$ según (2) y de $ARL(\delta)_{bias}$ según (15). Fuente: Elaboración propia.

4. CARTA t DE ARL INSESGADO CON λ_0 ESTIMADO

Debido a los resultados presentados en la sección anterior, se buscará construir unos límites de control con los cuales la carta t sea de ARL incesgado. Lo anterior se hará de varias formas, usando límites de control con colas nominales de igual o distinta probabilidad nominal, en ambos casos fijando la ARL o la tasa nominal de falsa alarma.

4.1. Ajuste de Límites con Probabilidades de Colas Iguales

Con la finalidad de construir una carta t de ARL incesgado se recurre a ajustar los límites de control dados en (12) y (13) siguiendo las ideas propuestas por Zhang *et al.* (2006), Xie *et al.* (2000), Huang & Yang (2015) y Guo *et al.* (2014). Conforme a esto se procede a escribir respectivamente los límites de control corregidos de forma conveniente como

$$\widehat{LCL}_{\alpha,unb} = C_{\alpha} \frac{Y}{n-1}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha,unb} = D_{\alpha} \frac{Y}{n-1} \quad (16)$$

y

$$\widehat{LCL}_{\alpha,bias} = C_{\alpha}^* \frac{Y}{n}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha,bias} = D_{\alpha}^* \frac{Y}{n}, \quad (17)$$

tal que $D_{\alpha} > C_{\alpha} > 0$ y $D_{\alpha}^* > C_{\alpha}^* > 0$. Se busca determinar cuáles son los valores que deben tomar estas constantes de forma tal que la carta t sea de ARL incesgado, con λ_0 estimado de acuerdo a (5) y (6), respectivamente.

Nótese que con los límites corregidos la ARL para cada estimador, según las ecuaciones (14) y (15), se puede

escribir respectivamente como

$$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, \lambda_0^{-1})}{1 - \exp\left(-\delta \lambda_0 C_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\delta \lambda_0 D_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right)} dy, \quad (18)$$

$$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, \lambda_0^{-1})}{1 - \exp\left(-\delta \lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\delta \lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)} dy, \quad (19)$$

donde Y es definida como en (3).

4.1.1. Carta t de ARL Insegado Fijando la ARL en Control

Para resolver el problema de ARL sesgado de la carta t se plantearán varias propuestas, en la primera se busca obtener un valor fijo de la ARL en control, ARL_0 , y tal que éste sea el máximo valor alcanzado; es decir, se requiere que $ARL(1) = ARL_0$ y que adicionalmente, $\frac{d}{d\delta}ARL(\delta) = 0$, cuando $\delta = 1$, por lo que según el estimador a usar $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ o $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$, se debe trabajar respectivamente con los sistemas de ecuaciones

$$\left. \frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}} \right|_{\delta=1} = 0, \quad ARL(1)_{\alpha, \text{unb}} = ARL_0 \quad (20)$$

y

$$\left. \frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}} \right|_{\delta=1} = 0, \quad ARL(1)_{\alpha, \text{bias}} = ARL_0. \quad (21)$$

En los sistemas de ecuaciones (20) y (21) se desea hallar respectivamente, los pares de valores (C_{α}, D_{α}) y $(C_{\alpha}^*, D_{\alpha}^*)$, satisfaciendo las condiciones expresadas por estas ecuaciones. A partir de la evaluación en $\delta = 1$ de (18) y (19) y de su correspondiente derivada, los sistemas (20) y (21) quedan

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{D_{\alpha} \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right) - C_{\alpha} \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} dy = 0, \quad (22)$$

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{1}{1 - \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right)} dy = ARL_0$$

y

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{D_{\alpha}^* \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) - C_{\alpha}^* \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)\right]^2} dy = 0, \quad (23)$$

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{1}{1 - \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)} dy = ARL_0.$$

La Tabla 3 es obtenida haciendo uso de la función **R** `multiroot` del paquete `rootSolve` de Soetaert (2015) y resume los coeficientes obtenidos para los tamaños de muestra 5, 15, 30, 50, 100 y 200 en la solución de los sistemas (22) y (23), usando una $ARL_0 = 370$ y un $\lambda_0 = 0.01$, junto con la ARL que produce cada una de las soluciones respectivas. La Tabla muestra que las ARL s en control son 370 o valores muy próximos a éste.

La Tabla 3 muestra además que a medida que $n \rightarrow \infty$, los valores tomados por los pares (C_α, D_α) y (C_α^*, D_α^*)

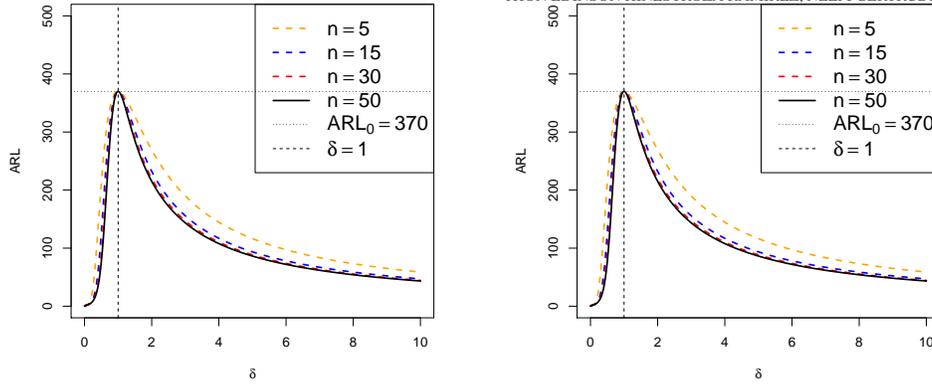
Tabla 3: Solución (C_α, D_α) y (C_α^*, D_α^*) de (22) y (23), y los correspondientes $ARL(1)_{\alpha,unb}$ y $ARL(1)_{\alpha,bias}$, considerando $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$, $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$.

n	C_α	D_α	$ARL(1)_{\alpha,unb}$	C_α^*	D_α^*	$ARL(1)_{\alpha,bias}$
5	0.001718379	8.733026080	370.0000	0.002147974	10.916628226	370.0000
15	0.002148018	8.781759222	370.0001	0.002301448	9.4090277370	370.0000
30	0.002275757	8.574570872	369.9999	0.002354231	8.8702457300	370.0000
50	0.002329849	8.438466077	369.9999	0.002377397	8.6106796710	369.9999
100	0.002370807	8.303863396	370.0000	0.002394754	8.3877408040	369.8848
200	0.002390818	8.221622592	370.0000	0.002402832	8.262937279	370.0000

tienden a ser muy parecidos. Se puede verificar que si $n = 35000$ por ejemplo, se obtienen los valores de $C_\alpha = 0.002409653$, $D_\alpha = 8.126261849$, $C_\alpha^* = 0.002409722$ y $D_\alpha^* = 8.126494035$.

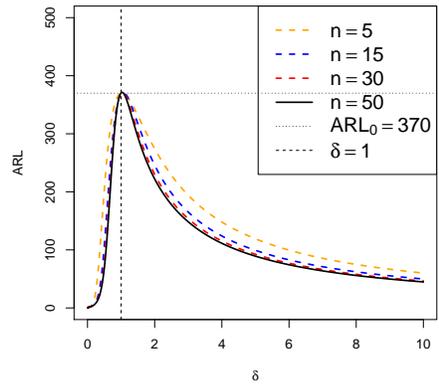
Las Figuras 3(a) y 3(b) representan la ARL de la carta t con límites corregidos de acuerdo a (16) y (17), usando las constantes halladas respectivamente en la solución de (22) y (23), para $n = 5, 15, 30$ y 50 . Las figuras mencionadas muestran que con ambas propuestas se obtienen cartas de ARL insegado, permitiendo además de controlar el valor de la ARL_0 de acuerdo a la necesidad del usuario, es decir, se puede tener una ARL_0 fijo sin importar el tamaño de la muestra con la que se cuente. Una propiedad que resulta conveniente frente a las limitaciones prácticas que se pueden tener en algunos campos de aplicación donde los datos disponibles pueden ser escasos. También, las Figuras 3(a) y 3(b) muestran que para $\delta < 1$ ó $\delta > 1$, a mayor n son menores los valores de la ARL , lo que indica que en promedio a mayor n , las cartas informan más rápido que el proceso ha sufrido cambio. Lo anterior es una característica deseable y muestra que al corregir los límites de control se elimina un patrón desfavorable que fue observado en la Figura 2, puesto que ahora se observa que el incremento de la muestra mejora el desempeño de la carta para informar situaciones de cambio del proceso, en particular cuando hay deterioro (incremento de $\lambda = \delta\lambda_0$).

Note además que al comparar las Figuras 3(a) y 3(b) en cada n , las curvas ARL son similares, y esto ocurre debido a que para cada n los pares de límites corregidos $(\widehat{LCL}_{\alpha,unb}, \widehat{UCL}_{\alpha,unb})$ y $(\widehat{LCL}_{\alpha,bias}, \widehat{UCL}_{\alpha,bias})$ son prácticamente iguales. Para verificar esto, basta comparar los pares de coeficientes $\frac{C_\alpha}{n-1}$, $\frac{C_\alpha^*}{n}$, $\frac{D_\alpha}{n-1}$ y $\frac{D_\alpha^*}{n}$ que multiplican a Y en las ecuaciones (16) y (17) y usando los valores óptimos de (C_α, D_α) y (C_α^*, D_α^*) encontrados como soluciones de (22) y (23). En la Tabla 4 pueden observarse estos valores para $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$, y puede concluirse que con cualquiera de los estimadores $\widehat{\lambda}_{unb}$ o $\widehat{\lambda}_{bias}$ los límites corregidos



(a)

(b)



(c)

Figura 3: Curvas de ARL de la carta t con límites corregidos, $\lambda_0 = 0.01$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ y 50 . (a) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,unb}$ según soluciones de (22). (b) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,bias}$ según soluciones de (23). (c) Curvas de $ARL_{\alpha,Zhang}$ según Zhang et al. (2006). Fuente: Elaboración propia.

en cada tamaño de muestra toman los mismos valores aproximadamente. En la Figura 3(c) se muestran las

Tabla 4: Valores de coeficientes de la variable aleatoria Y en límites corregidos según ecuaciones (16) y (17), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ y obtenidos en las soluciones óptimas para (C_{α}, D_{α}) y $(C_{\alpha}^*, D_{\alpha}^*)$.

n	$\frac{C_{\alpha}}{n-1}$	$\frac{C_{\alpha}^*}{n}$	$\frac{D_{\alpha}}{n-1}$	$\frac{D_{\alpha}^*}{n}$
5	0.00042959475000	0.00042959480000	2.18332565200000	2.18332565200000
15	0.00015342985714	0.00015342986667	0.62726851585714	0.62726851580000
30	0.00007847437931	0.00007847436667	0.29567485765517	0.29567485766667
50	0.00004754793878	0.00004754794000	0.17221359340816	0.17221359342000
100	0.00002394754545	0.00002394754000	0.08387740804040	0.08387740805000
200	0.00001201416080	0.00001201416000	0.04131468639196	0.04131468640000

curvas ARL para la carta t con λ_0 estimado y límites corregidos de acuerdo a lo propuesto por Zhang *et al.*

(2006). A primera vista parece que las curvas ARL para esta carta no se diferencian de las obtenidas con las correcciones propuestas. Sin embargo, la Tabla 5 revela que sí hay diferencias importantes. En esta Tabla se presentan los valores de las ARL s de las cartas t con parámetro λ_0 estimado sin correcciones de límites: $ARL(\delta)_{\text{unb}}$, $ARL(\delta)_{\text{bias}}$ y los límites corregidos $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$, $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$ y $ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$, donde los sufijos unb y bias hacen referencia a las cartas con λ_0 estimado por $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ o $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ respectivamente, mientras que el sufijo Zhang denota la carta con límites corregidos para la carta t y propuestos por Zhang *et al.* (2006). En esta Tabla de nuevo se observa la proximidad entre las ARL s de las cartas con límites corregidos según las propuestas formuladas en este trabajo. Ahora bien, comparando con la propuesta de Zhang *et al.* (2006), se observa que esta última es más efectiva para valores de $\delta < 1$, es decir, para detectar mejoras, pero es menos efectiva cuando $\delta > 1$, o sea, cuando hay deterioro del proceso. Si ahora se comparan las ARL s de las cartas con límites corregidos vs. sin corregir, la Tabla 5 muestra que las correcciones perjudican el desempeño en la detección de mejoras del proceso ($\delta < 1$), en especial con n pequeño, pues la ARL con límites corregidos son mayores que las ARL con límites sin corregir; sin embargo, cuando hay deterioro en el proceso ($\delta > 1$), es mejor usar límites corregidos, y esta ventaja es mayor a medida que n aumenta. Considerando que resulta más grave la menor efectividad en la detección de deterioro que la mejora del proceso, se puede concluir que la corrección de los límites es necesaria y recomendable.

La Tabla 6 muestra para diferentes tamaños de muestra, las tasas de falsa alarma, α_{unb} , α_{bias} , $\alpha_{\alpha, \text{unb}}$ y $\alpha_{\alpha, \text{bias}}$ para las cartas construidas con los límites según (12), (13), (16) y (17), respectivamente, en los dos últimos casos con las soluciones óptimas encontradas para los sistemas de ecuaciones en (22) y (23). Puede observarse que en todos los casos, las tasas de falsa alarma son mayores al valor nominal y que antes de corregir los límites, existen diferencias notorias entre las tasas de falsa alarma de las cartas usando los estimadores $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ y $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$, especialmente para n pequeño, siendo $\alpha_{\text{unb}} < \alpha_{\text{bias}}$. Una vez se aplican las correcciones a los límites de control, las diferencias entre las tasas de falsa alarma disminuyen significativamente ($\alpha_{\alpha, \text{unb}}$ y $\alpha_{\alpha, \text{bias}}$). Otro aspecto importante a resaltar, es que a mayor n , las tasas de falsa alarma se aproximan a la tasa de falsa alarma nominal de $\alpha = 0.0027$, sin embargo, la aproximación es más rápida con los límites corregidos, pero en general, se necesita un tamaño de muestra grande para alcanzar este valor.

Ahora bien, si se comparan las tasas de falsa alarma $\alpha_{\alpha, \text{unb}}$ y $\alpha_{\alpha, \text{bias}}$ con los de la Tabla 3 de Zhang *et al.* (2006), columna para $\lambda_0 = 0.01$ para los tamaños de muestra $n = 5, 10, 15, 30, 50, 100, 200$ y 300 , éstos últimos son ligeramente mayores, esto quiere decir que las correcciones propuestas en este trabajo logran una leve mejora en ésta característica, comparada con Zhang *et al.* (2006), puesto que la aproximación con esta última al valor nominal es más lenta.

4.1.2. Carta t de ARL Insegado Fijando la Tasa de Falsa Alarma en un Valor Nominal α

Una forma alternativa de construir una carta t de ARL insegado cuando λ_0 es estimado, consiste en corregir los límites de forma tal que la ARL obtenga su máximo en $\delta = 1$ y tal que la tasa de falsa alarma sea un valor

Tabla 5: Valores de ARL de la carta t para algunos tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$, δ , con $\lambda_0 = 0.01$ y $ARL_0 = 370$ usando los límites dados por Zhang et al. (2006), (12) y (13) y los límites corregidos según (16) y (17).

n	Medida	δ									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{unb}$	13.2	112.97	252.26	331.99	357.04	352.63	335.36	313.70	291.55	270.58
	$ARL(\delta)_{bias}$	7.29	59.36	172.64	273.70	331.99	355.10	356.64	346.65	331.21	313.70
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha,Zhang}$	29.8	203.67	335.58	370.06	358.18	331.19	301.70	274.13	249.69	228.43
15	$ARL(\delta)_{unb}$	6.55	48.30	195.04	356.67	427.41	426.55	396.20	359.40	324.75	294.53
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.74	37.56	158.87	320.96	414.12	432.43	412.12	379.08	345.07	314.16
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha,Zhang}$	11.0	106.67	292.56	369.75	356.22	317.19	278.51	245.93	219.41	197.79
30	$ARL(\delta)_{unb}$	5.79	35.79	165.51	363.87	460.02	454.01	412.14	367.41	328.57	296.32
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.46	31.75	146.56	340.92	453.01	459.82	422.82	378.89	339.50	306.39
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha,Zhang}$	9.06	79.35	274.47	370.23	349.06	302.99	262.26	230.06	204.67	184.28
50	$ARL(\delta)_{unb}$	5.54	31.74	150.43	366.79	477.78	465.94	417.20	369.21	329.17	296.52
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.35	29.62	139.12	351.08	473.74	470.62	424.36	376.39	335.79	302.54
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha,Zhang}$	8.43	68.79	265.08	370.45	343.29	294.30	253.59	222.16	197.56	177.86
100	$ARL(\delta)_{unb}$	5.37	29.08	137.75	368.85	494.06	474.63	420.00	369.98	329.37	296.57
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.28	28.12	132.23	359.97	492.27	477.55	423.83	373.63	332.68	299.56
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}$	8.28	65.31	267.13	370.00	331.69	280.98	241.44	211.39	187.96	169.22
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}$	8.11	62.86	260.65	369.88	334.38	283.72	243.86	213.52	189.86	170.92
	$ARL(\delta)_{\alpha,Zhang}$	7.99	61.26	256.43	370.17	336.69	286.03	245.89	215.30	191.44	172.35
200	$ARL(\delta)_{unb}$	5.29	27.87	131.02	369.73	503.47	478.62	421.02	370.21	329.43	296.58
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.24	27.41	128.33	364.95	502.69	480.24	422.98	372.04	331.07	298.07
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha,Zhang}$	7.79	57.72	251.60	370.13	332.75	281.54	241.84	211.72	188.26	169.48

Tabla 6: Tasa de falsa alarma para las cartas con los límites (12) y (13) y los límites corregidos dados en (16) y (17), con una tasa de falsa alarma nominal $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$.

n	α_{unb}	α_{bias}	$\alpha_{\alpha,unb}$	$\alpha_{\alpha,bias}$
5	0.0093112995431	0.0161793813682	0.0052043151606	0.0052043154099
10	0.0055646736953	0.0076148642848	0.0033031434176	0.0033031439718
15	0.0044766424337	0.0055403406966	0.0029717751494	0.0029717752923
30	0.0035130941084	0.0038996273319	0.0027731823214	0.0027731819429
50	0.0031684349018	0.0033671571248	0.0027290544109	0.0027290544718
100	0.0029266982087	0.0030140269476	0.0027095361903	0.0027095356462
200	0.0028114334735	0.0028521660145	0.0027044434237	0.0027044434237
300	0.0027738599146	0.0028003715269	0.0027034806675	0.0027034799569
500	0.0027441092824	0.0027597092216	0.0027029840011	0.0027029836292
1000	0.0027219769287	0.0027296623001	0.0027027735375	0.0027027730273
1500	0.0027146339967	0.0027197321803	0.0026995235218	0.0027027343949

α fijo. Para ello, sea $T \sim \exp(t; \lambda)$, con $\lambda = \delta \lambda_0$ e independiente de $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$. Se buscarán los pares de constantes (E_α, F_α) y (E_α^*, F_α^*) , tal que los límites de la carta control con $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ y $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ sean, respectivamente,

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^* = E_\alpha \frac{Y}{n-1}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^* = F_\alpha \frac{Y}{n-1} \quad (24)$$

y

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^* = E_\alpha^* \frac{Y}{n}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^* = F_\alpha^* \frac{Y}{n}. \quad (25)$$

Sean $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$ y $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$ las funciones de ARL incondicionales, usando los límites de control definidos en (24) y (25), respectivamente. Las expresiones matemáticas de estas funciones son similares a las dadas en (18) y (19) respectivamente, pero con (E_α, F_α) en lugar de (C_α, D_α) y (E_α^*, F_α^*) en lugar de (C_α^*, D_α^*) . Entonces se hallan (E_α, F_α) tal que

$$\left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^* \right|_{\delta=1} = 0, \quad P\left(T < E_\alpha \frac{Y}{n-1} \mid \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > F_\alpha \frac{Y}{n-1} \mid \lambda = \lambda_0\right) = \alpha \quad (26)$$

y (E_α^*, F_α^*) tal que

$$\left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^* \right|_{\delta=1} = 0, \quad P\left(T < E_\alpha^* \frac{Y}{n} \mid \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > F_\alpha^* \frac{Y}{n} \mid \lambda = \lambda_0\right) = \alpha, \quad (27)$$

con $T \sim \exp(t; \lambda_0)$.

Las propuestas dadas en (26) y (27) como en el caso anterior, se deben resolver para las constantes de corrección. En estos sistemas se pretende hallar los valores de los coeficientes (E_α, F_α) y (E_α^*, F_α^*) , respectivamente, que permitan que la ARL sea máximo cuando el parámetro está en control y que además, se cumpla la tasa de falsa alarma nominal esperada α , donde las expresiones probabilísticas dadas correspondan a las tasas de falsa alarma en cada carta, es decir, $T \sim \exp(t; \lambda_0)$.

La cantidad

$$P\left(T < E_\alpha \frac{Y}{n} \mid \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > F_\alpha \frac{Y}{n} \mid \lambda = \lambda_0\right), \quad (28)$$

corresponde a

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[\exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) \right] dy. \quad (29)$$

Entonces reemplazando (29) y $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$ evaluada $\delta = 1$ en (26) se obtiene,

$$\int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{F_\alpha \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - E_\alpha \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} dy = 0, \quad (30)$$

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \left[\exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) \right] dy = \alpha.$$

Semejante a lo anterior, (27) se puede escribir como,

$$\int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{F_\alpha^* \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha^* \frac{y}{n}\right) - E_\alpha^* \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha^* \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha^* \frac{y}{n}\right)\right]^2} dy = 0, \tag{31}$$

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \left[\exp\left(-\lambda_0 F_\alpha^* \frac{y}{n}\right) - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha^* \frac{y}{n}\right)\right] dy = \alpha.$$

En la Tabla 7 se muestran los resultados obtenidos para los pares (E_α, F_α) y (E_α^*, F_α^*) , mediante la función `multiroot` del paquete **R** `rootSolve` de Soetaert (2015), y que corresponden a las soluciones de las ecuaciones (30) y (31), para tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100$ y 200 y una tasa de falsa alarma nominal de $\alpha = 0.0027$. En la misma Tabla, se resumen la $ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}^*$ y $ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}^*$, que se obtienen en cada caso. La Tabla 7 evidencia, que $ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}^*$ es muy similar $ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}^*$, lo que se concluye que con ambos procedimientos se logra básicamente el mismo resultado para un tamaño de muestra seleccionado.

Tabla 7: Solución (E_α, F_α) y (E_α^*, F_α^*) de (30) y (31), y los correspondientes $ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}^*$ y $ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}^*$, considerando $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$.

n	E_α	F_α	$ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}^*$	E_α^*	F_α^*	$ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}^*$
5	0.000664400	10.0506300	963.4434	0.000830501	12.5632800	963.4430
15	0.001946460	8.914854990	408.7337	0.002085490	9.551630350	408.7336
30	0.002215870	8.608843730	380.1208	0.002292281	8.905700406	380.1208
50	0.002305278	8.451640554	373.9945	0.002352324	8.624123015	373.9946
100	0.002362570	8.308038010	371.3079	0.002386432	8.391957596	371.3078
200	0.008694300	8.223522866	370.6090	0.002398938	8.264846953	370.6089

La Tabla 8 compara los coeficientes $\frac{E_\alpha}{n-1}$ con $\frac{E_\alpha^*}{n}$, $\frac{F_\alpha}{n-1}$ con $\frac{F_\alpha^*}{n}$, usados como factores multiplicando a la variable aleatoria Y en los correspondientes límites de control superior e inferior dados en (24) y (25). Puede verse en cada tamaño de muestra que estos coeficientes son aproximadamente iguales, por lo que los límites de control en (24) y (25) resultan similares al igual que sus respectivas curvas ARL , exhibidas en las Figuras 4(a) y 4(b). Estas Figuras muestran que usando los límites corregidos según (24) y (25), la carta es de ARL insesgado para cada tamaño de muestra, además, se observa el comportamiento deseado en la ARL conforme aumenta el tamaño de muestra, esto es, que a mayor n menor es la ARL cuando el parámetro del proceso cambia, permitiendo detectar en promedio más rápido esta situación. Nótese además, la similitud entre las ARL de las Figuras 4(a) y 4(b) en cada tamaño de muestra n .

Si bien las correcciones a los límites propuestos en (16), (17) (24) y (25) producen cartas de ARL insesgado, las dos primeras permiten controlar el valor de la ARL_0 de acuerdo a la necesidad del usuario; es decir, se puede tener un valor de ARL_0 fijo sin importar el tamaño de la muestra con la que se cuente, además de lo anterior, los resultados son consistentes sin importar si el estimador de λ_0 es insesgado como el dado en (5) o sesgado como (6). Con las dos últimas propuestas son necesarios tamaños de muestra $n \geq 30$ para tener

Tabla 8: Valores de coeficientes de la variable aleatoria Y en los límites corregidos según ecuaciones (24) y (25), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ y las soluciones óptimas obtenidas para (22) y (23), $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01$.

n	$\frac{E_{\alpha}}{n-1}$	$\frac{E_{\alpha}^*}{n}$	$\frac{F_{\alpha}}{n-1}$	$\frac{F_{\alpha}^*}{n}$
5	0.00016610015000	0.00016610014000	2.51265600000000	2.51265600000000
15	0.00013903264286	0.00013903266667	0.63677535666667	0.63677535666667
30	0.00007640937931	0.00007640936667	0.29685668020000	0.29685668020000
50	0.00004704648980	0.00004704648000	0.17248246030000	0.17248246030000
100	0.00002386431313	0.00002352324000	0.08391957596000	0.08391957596000
200	0.00001199468844	0.00001199469000	0.04132423476500	0.04132423476500

una ARL_0 del nivel deseado, tal cual se muestra en las Figuras 4(a) y 4(b).

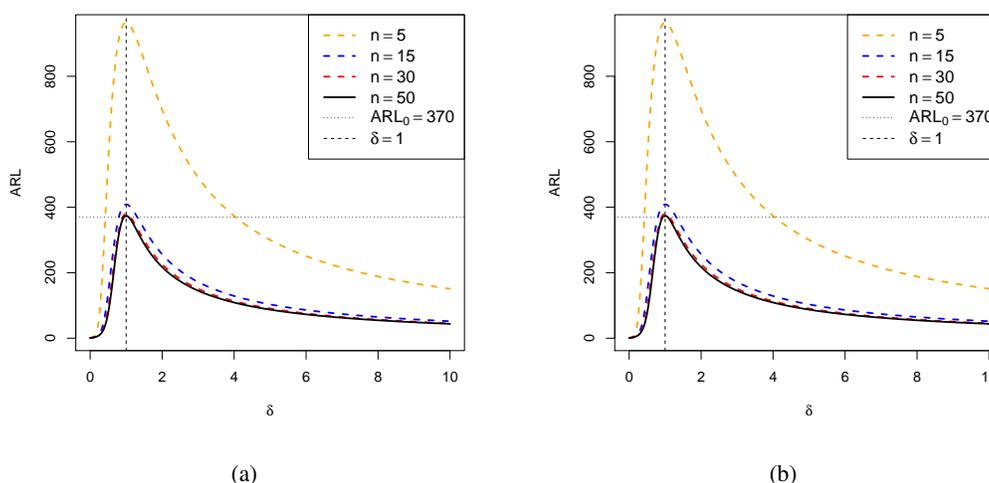


Figura 4: (a) Representa $ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$ sujeta a las correcciones dadas por (30). (b) es $ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$ sujeta a las correcciones dadas (31). En ambos casos $n = 5, 15, 30$ y $50, \alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01$. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 9 se presentan los valores de las $ARLs$ de las cartas t con parámetro λ_0 estimado sin correcciones de límites: $ARL(\delta)_{unb}, ARL(\delta)_{bias}$ y los límites corregidos $ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*, ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$. En esta Tabla se observa que si bien las cartas con límites (24) y (25) son de ARL insegado, la detección de cambios del proceso es más lenta que cuando los límites de la carta son (12) ó (13). Nótese además, que $ARL(\delta)_{\alpha,unb}^* = ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$.

4.2. Ajuste de Límites con Probabilidades Nominales de Colas Distintas

Una forma alternativa de escribir los límites de control de la carta t tal que ésta sea de ARL insegado cuando λ_0 es conocido es hallar β tal que

$$LCL_{\alpha,\beta} = -\frac{\log(1-\beta)}{\lambda_0}, \quad UCL_{\alpha,\beta} = -\frac{\log(\alpha-\beta)}{\lambda_0}, \quad \text{con } \beta \in (0, \alpha), \quad (32)$$

en donde se considera que las colas de probabilidad nominal no son necesariamente iguales; en este caso, β es tal que $P(T < LCL_{\alpha,\beta} | \lambda = \lambda_0) = \beta$, y $P(T > UCL_{\alpha,\beta} | \lambda = \lambda_0) = \alpha - \beta$. Además se debe cumplir que

Tabla 9: *ARL* de la carta t para algunos valores de δ , usando los límites dados en (12) y (13); los límites corregidos según (24) y (25) respectivamente. $\lambda_0 = 0.01$, $ARL_0 = 370$.

n	Medida	δ									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{unb}$	13.2	112.97	252.26	331.99	357.04	352.63	335.36	313.70	291.55	270.58
	$ARL(\delta)_{bias}$	7.29	59.36	172.64	273.70	331.99	355.10	356.64	346.65	331.21	313.70
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$	65.1	536.91	883.63	963.44	924.17	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$	65.1	536.91	883.63	963.44	924.17	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
15	$ARL(\delta)_{unb}$	6.55	48.30	195.04	356.67	427.41	426.55	396.20	359.40	324.75	294.53
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.74	37.56	158.87	320.96	414.12	432.43	412.12	379.08	345.07	314.16
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$	13.3	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$	13.3	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
30	$ARL(\delta)_{unb}$	5.79	35.79	165.51	363.87	460.02	454.01	412.14	367.41	328.57	296.32
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.46	31.75	146.56	340.92	453.01	459.82	422.82	378.90	339.50	306.40
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$	10.0	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$	10.0	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
50	$ARL(\delta)_{unb}$	5.54	31.74	150.43	366.79	477.78	465.94	417.20	369.21	329.17	296.52
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.35	29.62	139.12	351.08	473.74	470.62	424.36	376.39	335.79	302.54
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$	9.00	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$	9.00	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
100	$ARL(\delta)_{unb}$	5.37	29.08	137.75	368.85	494.06	474.63	420.00	369.98	329.37	296.57
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.28	28.12	132.23	359.97	492.27	477.55	423.83	373.63	332.68	299.56
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$	8.29	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$	8.29	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
200	$ARL(\delta)_{unb}$	5.29	27.87	131.02	369.73	503.47	478.62	421.02	370.21	329.43	296.58
	$ARL(\delta)_{bias}$	5.24	27.41	128.33	364.95	502.69	480.24	422.98	372.04	331.07	298.07
	$ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$	7.94	59.83	258.22	370.61	330.51	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08
	$ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$	7.94	59.83	258.22	370.61	330.51	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08

$P(LCL_{\alpha,\beta} \leq T \leq UCL_{\alpha,\beta} | \lambda = \lambda_0) = 1 - \alpha$. De acuerdo a lo anterior, se puede pensar que cuando λ_0 es desconocido, también es posible hacer uso de dicha idea, por lo que los límites dados en (32), usando los estimadores dados en (5) y (6), son

$$\widehat{LCL}_{\beta,unb} = -\log(1 - \beta) \frac{Y}{n-1}, \quad \widehat{UCL}_{\beta,unb} = -\log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n-1} \quad (33)$$

y

$$\widehat{LCL}_{\beta,bias} = -\log(1 - \beta) \frac{Y}{n}, \quad \widehat{UCL}_{\beta,bias} = -\log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n}, \quad (34)$$

para los cuales la *ARL* incondicional se escribe respectivamente,

$$ARL(\delta)_{\beta,unb} = \int_0^\infty \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dy}{1 + \exp\left(\delta \lambda_0 \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n-1}\right) - \exp\left(\delta \lambda_0 \log(1 - \beta) \frac{Y}{n-1}\right)} \quad (35)$$

y

$$ARL(\delta)_{\beta,bias} = \int_0^\infty \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 + \exp\left(\delta \lambda_0 \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n}\right) - \exp\left(\delta \lambda_0 \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}\right)} dy, \quad (36)$$

en donde $f_Y(y; n, 1/\lambda_0)$ es la f.d.p de $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$ definida en (4).

Se puede mostrar que si λ_0 es conocido, un valor óptimo para β , si $\alpha = 0.0027$ es 0.0023952. Las Figuras 5(a) y 5(b), comparan la ARL cuando λ_0 es conocido y $\beta = 0.0023952$ ($ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$) con $ARL(\delta)_{\beta,unb}$ y $ARL(\delta)_{\beta,bias}$ respectivamente, obtenidas a partir de (35) y (36) usando tamaños de muestra de $n = 5, 15, 30$ y 50 , $\lambda_0 = 0.01$, $\alpha = 0.0027$ y $\beta = 0.0023952$. Las Figuras permiten ver que cuando el tamaño de la muestra aumenta, las curvas $ARL(\delta)_{\beta,unb}$ y $ARL(\delta)_{\beta,bias}$ tienden a la curva $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$. Además de lo anterior, se puede observar que persiste el problema de que para tamaños de muestra $n < 30$ aproximadamente, se detecta más rápido que el proceso se ha salido de control, que para muestras de mayor tamaño, comportamiento que como se ha dicho, no es el esperado. Adicionalmente, la Tabla 10 contiene las ARL s en control: $ARL(1)_{\beta,unb}$ y $ARL(1)_{\beta,bias}$ y fuera de control: $ARL(1.02)_{\beta,unb}$ y $ARL(1.02)_{\beta,bias}$, para las cartas construidas con los límites (33) y (34) y mostradas en las Figuras 5(a) y 5(b), respectivamente. En esta Tabla se puede ver que $ARL(1.02)_{\beta,unb} > ARL(1)_{\beta,unb}$ y $ARL(1.02)_{\beta,bias} > ARL(1)_{\beta,bias}$, es decir, las cartas son de ARL sesgado (aunque el sesgo no es muy grande), aspecto que es más notorio en tamaños de muestra pequeños y cuando el estimador es $\hat{\lambda}_{bias}$. Debido al sesgamiento de la ARL de las cartas con límites como los definidos en (33) y (34), se hace necesario aplicar correcciones sobre ellos, tal que las cartas de control sean de ARL incesgado.

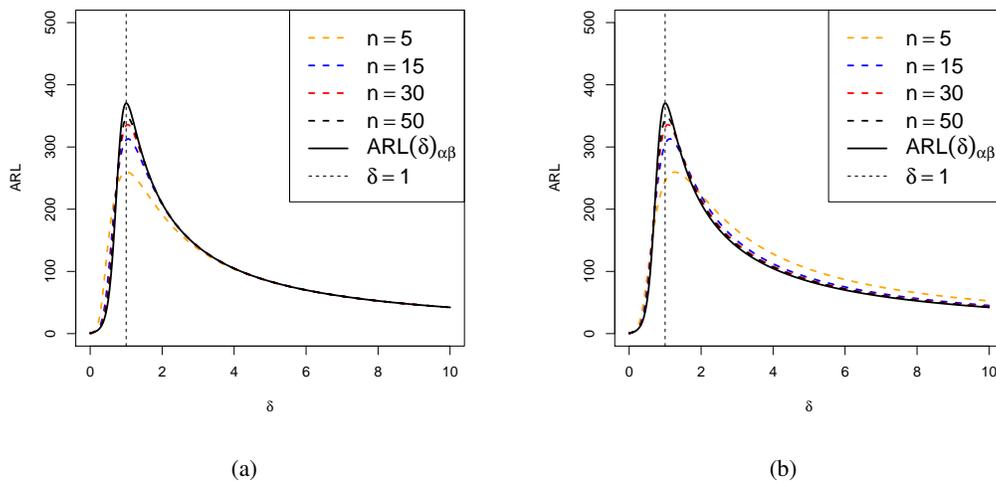


Figura 5: Curvas de ARL de la carta t con límites de probabilidades nominales de colas distintas, usando $\lambda_0 = 0.01$, $\alpha = 0.0027$, $\beta = 0.0023952$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ y 50 . (a) Curvas de $ARL(\delta)_{\beta,unb}$ según (35). (b) Curvas de $ARL(\delta)_{\beta,bias}$ según (36). Fuente: Elaboración propia.

4.2.1. Carta t de ARL Incesgado Fijando la ARL en Control

De acuerdo al problema presentado con anterioridad, se desea ajustar los límites (33) y (34) de forma que la carta de control sea de ARL incesgado y la ARL en control pueda ser fijado en una cantidad independiente del tamaño de muestra usado para estimar a λ_0 ; por ello, se escriben las ecuaciones (33) y (34) de la forma

$$\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,unb} = -C_{\beta} \log(1 - \beta) \frac{Y}{n - 1}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,unb} = -D_{\beta} \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n - 1} \quad (37)$$

Tabla 10: Valores $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$ y $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$ con $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$, $\beta = 0.0023952$, $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ en control (columnas 2 y 4) y fuera de control (columnas 3 y 5).

n	$ARL(1)_{\beta, \text{unb}}$	$ARL(1.02)_{\beta, \text{unb}}$	$ARL(1)_{\beta, \text{bias}}$	$ARL(1.02)_{\beta, \text{bias}}$
5	259.4811	259.5581	245.1988	247.4919
15	311.3006	312.2832	304.3328	306.9064
30	334.5052	335.5316	331.2363	333.3816
50	346.7565	347.5964	345.0957	346.7317
100	357.6600	358.1363	357.0721	358.0052
200	363.7838	363.9404	357.0721	363.9903

y

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} = -C_{\beta}^* \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} = -D_{\beta}^* \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n}, \quad (38)$$

en donde se supone que $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$, $\alpha = 0.0027$, $\beta = 0.0023952$ y los pares (C_{β}, D_{β}) y $(C_{\beta}^*, D_{\beta}^*)$ serán coeficientes por determinar. Lo anterior se puede obtener de forma similar como se hizo en la Sección 4.1.1; es decir, se busca que $ARL_{\alpha, \beta, \text{unb}}(1) = ARL_0$, $ARL_{\alpha, \beta, \text{bias}}(1) = ARL_0$ y que adicionalmente, $\frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha, \beta, \text{unb}}(\delta)|_{\delta=1} = 0$, $\frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha, \beta, \text{bias}}(\delta)|_{\delta=1} = 0$, por lo que se debe resolver en cada caso, el sistema de ecuaciones,

$$\left. \frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha, \beta, \text{unb}}(\delta) \right|_{\delta=1} = 0, \quad ARL_{\alpha, \beta, \text{unb}}(1) = ARL_0 \quad (39)$$

ó

$$\left. \frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha, \beta, \text{bias}}(\delta) \right|_{\delta=1} = 0, \quad ARL_{\alpha, \beta, \text{bias}}(1) = ARL_0, \quad (40)$$

en donde

$$ARL_{\alpha, \beta, \text{unb}}(\delta) = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}) + \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}})} dy, \quad (41)$$

$$ARL_{\alpha, \beta, \text{bias}}(\delta) = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}) + \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}})} dy, \quad (42)$$

con $f_Y(y; n, 1/\lambda_0)$ la f.d.p de Y definida en (4).

Usando (41) y (42) evaluada en $\delta = 1$ y su derivada en (39) y (40) se obtienen respectivamente,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}} \exp(-\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}) \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}} \exp(-\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}})} \\ & \times \frac{1}{\left[1 - \exp(-\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}) + \exp(-\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}) \right]^2} dy = 0, \quad (43) \\ & \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}) + \exp(-\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}})} dy = ARL_0 \end{aligned}$$

y

$$\int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}) - \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}})}{\left[1 - \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}) + \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}})\right]^2} dy = 0, \tag{44}$$

$$\int_0^\infty \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}) + \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}})} dy = ARL_0,$$

con las cantidades $\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$, $\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$, $\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$, $\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ de acuerdo a (37) y (38) respectivamente. La Tabla 11 muestra algunas soluciones obtenidas mediante la función `multiroot` del paquete **R** `rootSolve` de Soetaert (2015) para los sistemas de ecuaciones (43) y (44). En ella se muestra que la *ARL* en control alcanzada por la carta es de 370 para todo tamaño de muestra. La información mostrada en la Tabla 11 evidencia que a medida que $n \rightarrow \infty$, los valores de (C_β, D_β) y (C_β^*, D_β^*) se aproximan a 1, lo que hace pensar que para un tamaño de muestra grande, los límites de control construidos para el estimador $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ o $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ satisfaciendo (43) y (44) respectivamente, se acercan a los valores de los límites que se obtienen con (32).

Tabla 11: Solución (C_β, D_β) y (C_β^*, D_β^*) de (43) y (44) y los correspondientes $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ y $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$, considerando $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$, $\beta = 0.0023952$ y $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$.

n	C_β	D_β	$ARL_{\alpha, \beta, \text{unb}}(1)$	C_β^*	D_β^*	$ARL_{\alpha, \beta, \text{bias}}(1)$
5	0.7165618	1.0787306	370	0.8957023	1.3484132	370
15	0.9597009	1.0847159	370	0.8957208	1.1621956	370
30	0.9489875	1.059124	370	0.9817112	1.0956457	370
50	0.9715438	1.0423126	370	0.9913712	1.0635843	370
100	0.9886233	1.0256866	370	0.9986093	1.0019780	370
200	0.9969679	1.0155238	370	1.0019780	1.0206310	370

Las Figuras 6(a) y 6(b) son la representación de las curvas *ARL* de la carta t cuando los límites están determinados por las soluciones contenidas en la Tabla 11, con $n = 5, 15, 30$, y 50 . En ellas se muestra que las cartas son de *ARL* insesgado sin importar el tamaño de muestra y que el valor tomado en $\delta = 1$, es de 370, valor de la ARL_0 que es asignado de acuerdo al interés del usuario.

En la Tabla 12 se comparan los factores $-\log(1 - \beta) \frac{C_\beta}{n-1}$ con $-\log(1 - \beta) \frac{C_\beta^*}{n}$ y $-\log(\alpha - \beta) \frac{D_\beta}{n-1}$ con $-\log(\alpha - \beta) \frac{D_\beta^*}{n}$ usados sobre la variable aleatoria Y en los límites de control en (37) y (38) respectivamente. Puede observarse que en cada tamaño de muestra los factores correspondientes al estimador $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ y $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ son similares en sus valores, por lo que es de esperar que también sean similares los valores de los límites de control al igual que características como la *ARL*.

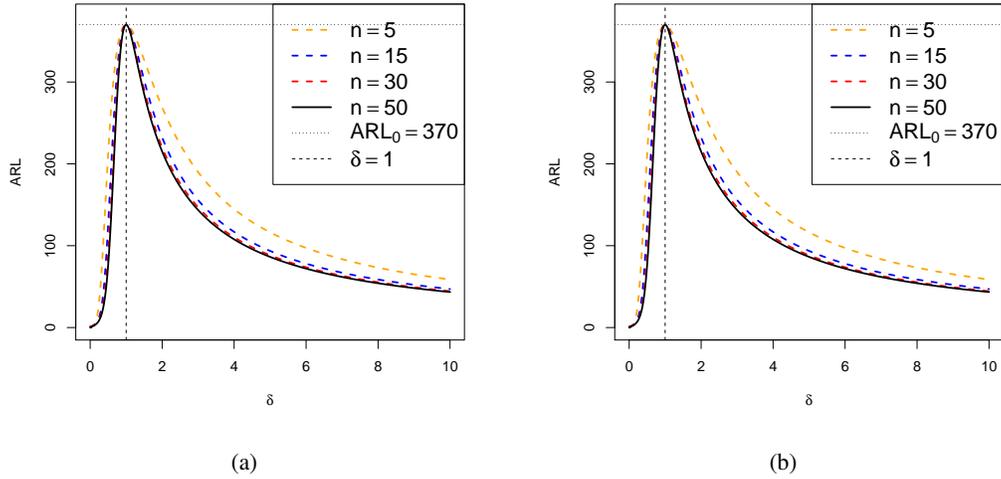


Figura 6: Curvas de ARL de la carta t con límites de probabilidades nominales de colas distintas usando los estimadores $\hat{\lambda}_{unb}$ y $\hat{\lambda}_{bias}$, $\lambda_0 = 0.01$, $\alpha = 0.0027$, $\beta = 0.0023952$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ y 50 . (a) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}$ según soluciones de (43). (b) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}$ según soluciones de (44). Fuente: Elaboración propia.

Tabla 12: Valores de coeficientes de la variable aleatoria Y en límites corregidos según ecuaciones (37) y (38), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$, soluciones óptimas para (C_β, D_β) y (C_β^*, D_β^*) , $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$, $\beta = 0.0023952$.

n	$-\log(1-\beta) \frac{C_\beta}{n-1}$	$-\log(1-\beta) \frac{C_\beta^*}{n}$	$-\log(\alpha-\beta) \frac{D_\beta}{n-1}$	$-\log(\alpha-\beta) \frac{D_\beta^*}{n}$
5	0.00042959476384	0.00042959478782	2.18332563470316	2.18332563470316
15	0.00015342987884	0.00015342988569	0.62726851730098	0.62726851730098
30	0.00007847436543	0.00007847436488	0.29567486476725	0.29567486476725
50	0.00004754793092	0.00004754792974	0.17221359645974	0.17221359645974
100	0.00002394754321	0.00002394754096	0.08387741206441	0.08387741206441
200	0.00001201416016	0.00001201416269	0.04131466945504	0.04131466945504

En la Tabla 13 se presenta la ARL de la carta t con los pares de límites dados en (33) y (34), (37) y (38), respectivamente, variando δ y n . En ella se observa que cuando $\delta \leq 1$, $ARL(\delta)_{\beta,bias}$ es menor $ARL(\delta)_{\beta,unb}$; sin embargo, sucede lo contrario cuando $\delta > 1$. También se observa en cada tamaño de muestra que los valores de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}$ son iguales a los de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}$; es decir, las correcciones propuestas sobre los límites de control definidos con los respectivos estimadores $\hat{\lambda}_{unb}$ y $\hat{\lambda}_{bias}$, según soluciones a los sistemas de ecuaciones en (43) y (44) respectivamente, conducen no sólo a una carta de ARL insesgado, sino también a cartas de igual desempeño en promedio. Note además que los valores tabulados de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}$ y $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}$ en cada tamaño de muestra, no sólo son iguales entre sí, sino también iguales a los reportados en la Tabla 5 para $ARL(\delta)_{\alpha,unb}$ y $ARL(\delta)_{\alpha,bias}$ y que corresponden a la carta t con límites corregidos según las ecuaciones (16) y (17), respectivamente.

Finalmente de la Tabla 13, al comparar los resultados de las $ARLs$, cartas t corregidas vs. no corregidas, se

paga un precio al controlar el valor de la ARL , pues se perjudica la detección cuando $\delta \neq 1$, puesto que para los límites corregidos según (37) y (38) sus ARL s son mayores que los de los límites sin corregir, según (33) y (34). Sin embargo, este efecto adverso se reduce al incrementar el tamaño de muestra.

La Tabla 14 exhibe la tasa de falsa alarma de las cartas construidas según los límites de control en (33), (34), (37) y (38), los dos últimos obedeciendo a las soluciones óptimas de (43) y (44) respectivamente para distintos tamaños de muestra n y denotadas en su orden por $\alpha_{\beta, \text{unb}}$, $\alpha_{\beta, \text{bias}}$, $\alpha_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ y $\alpha_{\alpha, \beta, \text{bias}}$. Puede observarse que previa corrección de los límites de control, existen diferencias entre las tasas de falsa alarma, particularmente para n pequeño, siendo $\alpha_{\beta, \text{unb}} < \alpha_{\beta, \text{bias}}$; sin embargo, luego de aplicar las correcciones a los límites de control, las diferencias entre las tasas de falsa alarma disminuyen notablemente (ver $\alpha_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ y $\alpha_{\alpha, \beta, \text{bias}}$). Se puede observar además, que a mayor n , las tasas de falsa alarma están más próximas a la tasa de falsa alarma nominal de $\alpha = 0.0027$; aunque dicha aproximación es más rápida con los límites corregidos, en general se requiere un tamaño de muestra grande para alcanzar este valor.

Tabla 13: ARL de la carta t para algunos valores de δ , de acuerdo a los límites (33), (34) (37) y (38). $\lambda_0 = 0.01$.

n	Medida	δ									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	23.7	146.00	236.36	259.48	250.82	231.84	211.20	191.92	174.83	159.96
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	12.2	91.46	191.91	245.20	259.48	253.83	239.93	223.54	207.18	191.92
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	29.8	203.67	335.58	370.06	358.18	331.19	301.70	274.13	249.69	228.43
15	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	10.3	92.07	246.89	311.30	300.24	267.64	235.16	207.73	185.36	167.11
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	8.71	73.27	220.31	304.33	308.26	281.31	249.80	221.68	198.22	178.87
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	11.0	106.67	292.56	369.75	356.22	317.19	278.51	245.93	219.41	197.79
30	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	8.70	72.90	247.77	334.51	316.20	274.84	238.02	208.83	185.79	167.29
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	8.08	64.40	230.96	331.24	322.33	283.06	245.90	215.94	192.16	173.04
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	9.06	79.35	274.47	370.23	349.06	302.99	262.26	230.06	204.67	184.28
50	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	8.19	64.95	247.27	346.76	322.38	276.69	238.50	208.95	185.82	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.85	60.23	235.88	345.10	326.80	281.91	243.28	213.19	189.60	170.70
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	8.43	68.79	265.08	370.45	343.29	294.30	253.59	222.16	197.56	177.86
100	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	7.85	59.13	246.14	357.66	326.46	277.58	238.67	208.98	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.69	56.94	239.79	357.07	328.98	280.26	241.06	211.09	187.70	168.98
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	8.28	65.31	267.13	370.00	331.69	280.98	241.44	211.39	187.96	169.22
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	8.28	65.31	267.13	370.00	331.69	280.98	241.44	211.39	187.96	169.22
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	7.99	61.26	256.43	370.17	336.69	286.03	245.89	215.30	191.44	172.35
200	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	7.69	56.32	245.15	363.78	328.20	277.87	238.72	208.99	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.61	55.27	241.77	363.59	329.53	279.23	239.91	210.04	186.76	168.14
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	7.79	57.72	251.60	370.13	332.75	281.54	241.84	211.72	188.26	169.48

Al comparar los resultados de la Tabla 6 con los de la Tabla 14, se notará que las diferencias entre las tasas

de falsa alarma para los límites corregidos, en cada tamaño de muestra considerado, son mínimas, pero al comparar los valores obtenidos con límites de control sin corregir, vemos que la Tabla 6 (columnas α_{unb} y α_{bias}) son mayores a los de la Tabla 14 (columnas $\alpha_{\beta, \text{unb}}$ y $\alpha_{\beta, \text{bias}}$). Si se comparan los resultados de las Tablas 6 y 14, se verá que las diferencias entre las tasas de falsa alarma con los límites corregidos y sin corregir, son más notables en el primer caso, nótese además que las diferencias entre $\alpha_{\beta, \text{unb}}$ y $\alpha_{\beta, \text{bias}}$ son menores que las observadas entre α_{unb} y α_{bias} para tamaños de muestra pequeños.

Tabla 14: Tasa de falsa alarma para los tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ de la carta t con los límites (33) y (34) y los límites óptimos hallados como solución de (39) y (40), con una tasa de falsa alarma nominal $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952$.

n	$\alpha_{\beta, \text{unb}}$	$\alpha_{\beta, \text{bias}}$	$\alpha_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	$\alpha_{\alpha, \beta, \text{bias}}$
5	0.0069468744960	0.0105074668097	0.0052043149237	0.0052043154323
10	0.0042955893270	0.0050507354435	0.0033031437175	0.0033031438923
15	0.0036306022201	0.0039379450730	0.0029717754412	0.0029717755677
30	0.0030972743137	0.0031665352948	0.0027731817729	0.0027731818200
50	0.0029221184691	0.0029462496278	0.0027290540078	0.0027290539143
100	0.0028050360076	0.0028111697690	0.0027095359183	0.0027095356241
200	0.0027510281671	0.0027527142881	0.0027044432041	0.0027044432041
300	0.0027336896028	0.0027345172283	0.0027034802428	0.0027034803326
500	0.0027200561983	0.0027204127452	0.0027029851213	0.0027029821528
1000	0.0027099691394	0.0027100955682	0.0026932643906	0.0027027736195
1500	0.0027066330143	0.0027067058640	0.0027027343554	0.0027027343867

4.2.2. Carta t de ARL Insegado Fijando la Tasa de Falsa Alarma en un Valor Nominal α

En esta sección se busca que la carta t sea de ARL insegado cuando el parámetro λ_0 es estimado, pero fijando la tasa de falsa alarma α en un valor deseado, por ejemplo $\alpha = 0.0027$. Para lograr lo anterior, sea

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* = -E_{\beta} \log(1 - \beta) \frac{Y}{n-1}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* = -F_{\beta} \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n-1} \quad (45)$$

y

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* = -E_{\beta}^* \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}, \quad \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* = -F_{\beta}^* \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n} \quad (46)$$

los límites de control de la carta t que se espera sea de ARL insegado, en donde se supone que $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$, $\beta = 0.0023952$ y $\alpha = 0.0027$ y con (E_{β}, F_{β}) coeficientes por determinar y tales que permitan satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\frac{d}{d\delta} \text{ARL}(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* \Big|_{\delta=1} = 0, \quad P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) = \alpha, \quad (47)$$

en tanto que $(E_{\beta}^*, F_{\beta}^*)$ son tales que

$$\frac{d}{d\delta} \text{ARL}(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* \Big|_{\delta=1} = 0, \quad P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) = \alpha, \quad (48)$$

con $T \sim \exp(t; \lambda_0)$ e independiente de Y .

Las ARLs incondicionales correspondientes a los límites en (45) y (46) son,

$$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^* = \int_0^\infty \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dy}{1 - \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{Y}{n-1}\right) + \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n-1}\right)}, \quad (49)$$

$$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^* = \int_0^\infty \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dy}{1 - \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}\right) + \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n}\right)}, \quad (50)$$

con $f_Y(y; n, 1/\lambda_0)$ la f.d.p de $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$ definida en (4). Las expresiones que definen a

$$P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,unb}^* \mid \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,unb}^* \mid \lambda = \lambda_0\right)$$

y

$$P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias}^* \mid \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias}^* \mid \lambda = \lambda_0\right),$$

son

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[\exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n-1}\right) \right] dy \quad (51)$$

y

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[\exp\left(\lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right) \right] dy = \alpha \quad (52)$$

respectivamente, por lo que sustituyendo $\frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^* |_{\delta=1}$ y (51) en (47), así como $\frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^* |_{\delta=1}$ y (52) en (48) se obtienen, respectivamente,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ & \times \frac{E_\beta \log(1 - \beta) \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{y}{n-1}\right) - F_\beta \log(\alpha - \beta) \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy = 0, \\ & 1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[\exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n-1}\right) \right] dy = \alpha \end{aligned} \quad (53)$$

y

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ & \times \frac{E_\beta^* \log(1 - \beta) \exp\left(\lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) - F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \exp\left(\lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(\lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) + \exp\left(\lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right)\right]^2} y dy = 0, \\ & 1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[\exp\left(\lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right) \right] dy = \alpha. \end{aligned} \quad (54)$$

La Tabla 15 presenta las soluciones o valores óptimos para los pares (E_β, F_β) y (E_β^*, F_β^*) de acuerdo a (53) y (54), respectivamente, así como las ARL en control, con $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100$ y 200 . Los resultados muestran que $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ y $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ son similares, aunque este último es un poco menor que el primero, además, ambas medidas tienden al valor de 370 conforme aumenta n , siendo que con n pequeño difieren bastante de este valor de 370. Por tanto, para aproximar el desempeño de las cartas con los límites corregidos según (45) y (46), al que se obtiene cuando λ_0 es conocido (es decir, según límites en (32)), es necesario estimar λ_0 a partir de muestras de $n \geq 50$ aproximadamente; sin embargo, en la práctica, muestras con tales tamaños son relativamente grandes y difíciles de obtener, en especial cuando los eventos de interés son de rara ocurrencia. Observe además que tal como ocurrió con los factores de corrección hallados en las soluciones a los sistemas de ecuaciones (43) y (44), (ver Tabla 11), aquí también se observa que los pares (E_β, F_β) y (E_β^*, F_β^*) se aproximan a 1 cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que los límites de control respectivos se aproximan a los límites en (32).

Tabla 15: Solución (E_β, F_β) y (E_β^*, F_β^*) de (53) y (54) y los correspondientes $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ y $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$, considerando $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$, $\beta = 0.0023952$ y $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$.

n	E_β	F_β	$ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	E_β^*	F_β^*	$ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$
5	0.2770541	1.2414455	963.4435	0.3463177	1.5518068	963.4432
15	0.8116702	1.1011558	408.7336	0.8696466	1.1798098	408.7336
30	0.9489875	1.0591242	380.1208	0.9558783	1.1000250	380.1208
50	0.9612978	1.0439399	373.9946	0.9809162	1.0652448	373.9945
100	0.9851875	1.0262022	371.3078	0.9951139	1.0365679	371.3078
200	0.9953521	1.0157630	370.6090	1.0003540	1.0208670	370.6088

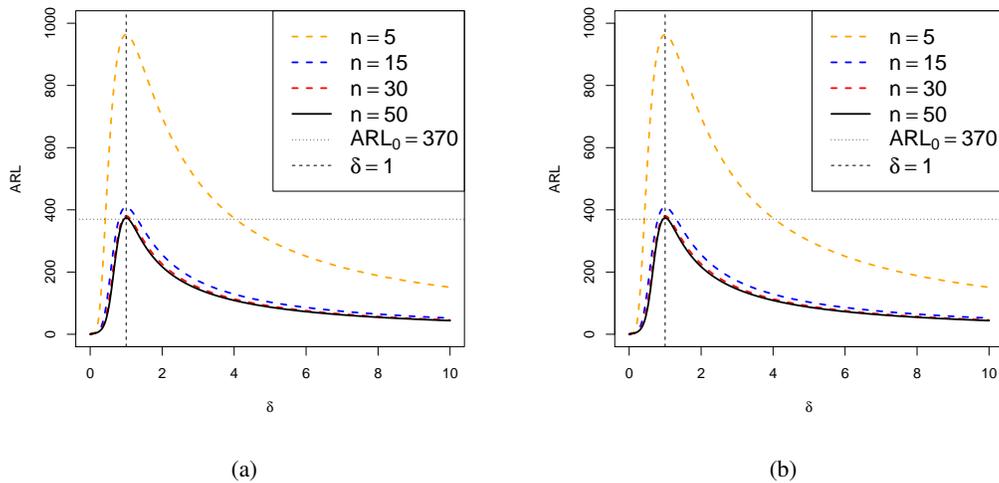


Figura 7: (a) Representa $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ sujeta a la solución de (53). (b) es $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ sujeta a la solución de (54). En ambos casos $n = 5, 15, 30$ y 50 , $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$. Fuente: Elaboración propia.

Las figuras 7(a) y 7(b) muestran que las cartas construidas usando los límites (45) y (46) con los factores de corrección según las soluciones óptimas de (53) y (54), respectivamente, son de ARL insesgado, pero el va-

lor en control varía con n , siendo que para n pequeños son mayores que 370 y con $n \rightarrow \infty$ se aproximan a 370.

La información contenida en la Tabla 16 corresponde a los factores que multiplican a la variable aleatoria Y en los límites de control dados en (45) y (46) con los factores de corrección obtenidos de acuerdo a la solución óptima de (53) y (54), respectivamente. Dada la similitud entre los valores de $-\log(1 - \beta) \frac{E_\beta}{n-1}$ y $-\log(1 - \beta) \frac{E_\beta^*}{n}$ y entre $-\log(\alpha - \beta) \frac{F_\beta}{n-1}$ y $-\log(\alpha - \beta) \frac{F_\beta^*}{n}$, se espera que el valor tomado por el par de límites $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*)$ sea similar al de $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*)$, de la misma manera que sus $ARLs$, tal como ocurrió con las correcciones previamente estudiadas.

Tabla 16: Valores de coeficientes de la variable aleatoria Y en límites corregidos según ecuaciones (45) y (46), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ y las soluciones óptimas para (E_β, F_β) y (E_β^*, F_β^*) , $\alpha = 0.0027$, $\lambda_0 = 0.01$, $\beta = 0.0023952$.

n	$-\log(1 - \beta) \frac{E_\beta}{n-1}$	$-\log(1 - \beta) \frac{E_\beta^*}{n}$	$-\log(\alpha - \beta) \frac{F_\beta}{n-1}$	$-\log(\alpha - \beta) \frac{F_\beta^*}{n}$
5	0.00016610016557	0.00016610014159	2.51265677801632	2.51265677801632
15	0.00013903267675	0.00013903266990	0.63677537924181	0.63677537924181
30	0.00007640937916	0.00007640937833	0.29685667831818	0.29685667831818
50	0.00004704648559	0.00004704648931	0.17248246153881	0.17248246153881
100	0.00002386431741	0.00002386431768	0.08391957554926	0.08391957554926
200	0.00001199468864	0.00001199469021	0.04132422262557	0.04132422262557

La Tabla 17 contiene los valores para $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$, $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$ correspondientes a los límites en (33) y (34) respectivamente y $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$, $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ correspondientes a los límites en (45), (46); en todos los casos $\alpha = 0.0027$ y $\beta = 0.0023952$. Los resultados dejan ver que las cartas de control con los límites definidos según (45) y (46) son de ARL insegado, pero la detección de cambios del proceso es más lenta que cuando los límites de la carta son dados por (33) ó (34). Además, se puede ver que $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* = ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$; la ARL de la carta t según los límites corregidos en (45) y (46) es la misma, pese a que los estimadores de λ_0 son $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ y $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$.

Tabla 17: Valores de ARL de la carta t para los tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$, $\delta, \lambda_0 = 0.01$ y $ARL_0 = 370$ usando los límites dados en (33) y (34), y los límites corregidos (37) y (38).

n	Medida	δ									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{\beta,unb}$	23.65	146.00	236.36	259.48	250.82	231.84	211.20	191.92	174.83	159.96
	$ARL(\delta)_{\beta,bias}$	12.17	91.460	191.91	245.20	259.48	253.83	239.93	223.54	207.18	191.92
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^*$	65.08	536.91	883.63	963.44	924.17	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^*$	65.08	536.91	883.63	963.44	924.18	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
15	$ARL(\delta)_{\beta,unb}$	10.26	92.07	246.89	311.30	300.24	267.64	235.16	207.73	185.36	167.11
	$ARL(\delta)_{\beta,bias}$	8.710	73.27	220.31	304.33	308.26	281.31	249.80	221.68	198.22	178.87
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^*$	13.25	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^*$	13.25	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
30	$ARL(\delta)_{\beta,unb}$	8.700	72.90	247.77	334.51	316.20	274.84	238.02	208.83	185.79	167.29
	$ARL(\delta)_{\beta,bias}$	8.080	64.40	230.96	331.24	322.33	283.06	245.90	215.94	192.16	173.04
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^*$	10.03	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^*$	10.03	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
50	$ARL(\delta)_{\beta,unb}$	8.190	64.95	247.27	346.76	322.38	276.69	238.50	208.95	185.82	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta,bias}$	7.850	60.23	235.88	345.10	326.80	281.91	243.28	213.19	189.60	170.70
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^*$	9.000	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^*$	9.000	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
100	$ARL(\delta)_{\beta,unb}$	7.850	59.13	246.14	357.66	326.46	277.58	238.67	208.98	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta,bias}$	7.690	56.94	239.79	357.07	328.98	280.26	241.06	211.09	187.70	168.98
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^*$	8.290	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^*$	8.290	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
200	$ARL(\delta)_{\beta,unb}$	7.690	56.32	245.15	363.78	328.20	277.87	238.72	208.99	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta,bias}$	7.610	55.27	241.77	363.59	329.53	279.23	239.91	210.04	186.76	168.14
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}^*$	7.940	59.83	258.22	370.61	330.52	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08
	$ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}^*$	7.940	59.83	258.22	370.61	330.52	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08

5. CONCLUSIONES

De acuerdo a lo discutido sobre la carta t con parámetro estimado, se pudo ver que en general la carta es de ARL sesgado y por tanto, se hacen necesarias correcciones sobre los límites de control.

Al trabajar con límites estimados sin corregir se pudo observar que es mejor usar límites con probabilidades de colas nominales distintas, cuando se desean detectar deterioros del proceso, debido a que muestran una ARL menor para los casos en los que $\delta > 1$, siendo la ARL más pequeña cuando el estimador usado es el insesgado.

Las estimaciones del parámetro λ_0 afectan desfavorablemente el comportamiento de la ARL de la carta t cuando no se han corregido los límites y se tienen muestras pequeñas. Las correcciones deben considerar los tamaños de muestra, por lo que se hace necesario la implementación de los procesos de optimización presentados con cada valor de n que se desea usar para la estimación.

Una vez corregidos los límites de control de la carta t , con cualquiera de los criterios de optimización uti-

lizados y bien sea usando límites con probabilidades de colas iguales o diferentes, da lo mismo usar un estimador sesgado o insesgado para estimar al parámetro λ_0 , puesto que en cada uno de los procedimientos de construcción de las cartas que se estudiaron, los valores de los límites obtenidos, así como las *ARLs*, con similares.

Las cartas obtenidas tienen un comportamiento muy similar en su *ARL* en control. Esto mismo sucede cuando se fija la tasa de falsa alarma. Sin embargo, es mejor controlar la *ARL* que la tasa de falsa alarma, debido a que si el tamaño de muestra es pequeño, la *ARL* en control es muy grande. La única forma de obtener los mismos resultados fijando la *ARL* o la tasa de falsa alarma es que el tamaño de la muestra usada sea grande, de tal forma que se pueda obtener una *ARL* en control cercana a $1/\alpha$. Por lo anterior, parece que no es conveniente obtener una carta de *ARL* insesgado fijando la tasa de falsa alarma, sino más bien fijando la *ARL*.

Destacando previamente que el trabajo desarrollado por Zhang *et al.* (2006) difiere con la metodología propuesta aquí, dado que en dicho trabajo estos usan muestreo secuencial, realizan el análisis de desempeño de la *ARL* de la carta t en fase I, obtienen la *ARL* a partir de un proceso de aproximación. En cambio, en este trabajo se realizó un análisis de desempeño durante la fase II, los límites de control se calculan usando dos estimadores que consideran para ello una muestra histórica que corresponde a tiempos que se distribuyen exponencial y que provienen de un proceso en control, además de lo cual, la *ARL* es obtenida de manera exacta. Pese a lo anterior, comparando las correcciones propuestas en este trabajo con las presentadas por Zhang *et al.* (2006), tanto con λ_0 conocido como estimado se lograron mejoras con las cartas corregidas partiendo de límites de probabilidades de cola con valores nominales iguales, especialmente en la detección del deterioro del proceso.

Apéndice

Cálculo de valor esperado de estimadores de λ_0

Desde que $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$, donde $n > 1, n \in \mathbb{Z}^+$ es el parámetro de forma y λ_0^{-1} es el parámetro de escala, entonces su densidad de probabilidad es la dada en la ecuación (5). Luego, por definición de esperanza, tenemos que,

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}_{\text{unb}}) &= (n-1) \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \times \frac{\lambda_0^n y^{n-1} \exp(-\lambda_0 y)}{(n-1)!} dy \\ &= \lambda_0 \int_0^{\infty} \frac{\lambda_0^{n-1} y^{n-2} \exp(-\lambda_0 y)}{(n-1)!} dy; \end{aligned} \tag{55}$$

observe que con $n > 1$, el integrando en (55) es la densidad de una variable aleatoria con distribución Gamma $(y; n-1, 1/\lambda_0)$, de allí que la integral es 1 y por tanto $E(\hat{\lambda}_{\text{unb}}) = \lambda_0$.

Por otra parte, desde que $\hat{\lambda}_{\text{bias}} = \frac{n}{\bar{Y}} = \left(\frac{n}{n-1}\right) \hat{\lambda}_{\text{unb}}$, se sigue que $E(\hat{\lambda}_{\text{bias}}) = \frac{n}{n-1} \lambda_0$

Referencias

- Aslam, M., Azam, M. & Jun, C.-H. (2015). A new control chart for exponential distributed life using ewma., *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 37(2), 205–210. DOI: 10.1177/0142331214537293.
- Borror, C. M., Keats, J. B. & Montgomery, D. C. (2003). Robustness of the time between events cusum, *International Journal of Production Research* 41(15), 3435–3444. DOI: 10.1080/0020754031000138321.
- Calvin, T. W. (1983). Quality control techniques for zero-defects, *IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology* 6(3), 323–328. DOI: 10.1109/TCHMT.1983.1136174.
- Chakraborti, S. (2007),. Run length distribution and percentiles: The shewhart chart with unknown parameters., *Quality Engineering*, 19(2), 119 – 127. DOI: 10.1080/08982110701276653.
- Chan, L. Y., Xie, M. & Goh, T. (2000). Cumulative quantity control charts for monitoring production processes, *International Journal of Production Research* 38(62), 397–408. DOI: 10.1080/002075400189482.
- Cheng, C.-S. & Chen, P.-W. (2010). An ARL-unbiased design of time-between-events control charts with runs rules, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 857–871. DOI: 10.1080/00207543.2014.974848.
- Goh, T. N. (1987). A control chart for very high yield processes, *Quality Assurance*, 13(1), 18–22.
- Guo, B., Wang, B. X. & Xie, M. (2014). ARL-unbiased control charts for the monitoring of exponentially distributed characteristics based on type-II censored samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(12), 2734–2747. DOI: 10.1080/00949655.2014.898766.
- Huang, S. & Yang, J. (2015). An ARL-unbiased design of gamma control chart, in ‘2015 First International Conference on Reliability Systems Engineering (ICRSE)’, pp. 1–6.
- Jensen, W. A., Jones-Farmer, A., Charles, C. & Woodall, W. (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review, *Journal of Quality Technology*, 38(4), 349–364.
- Khoo, M. B., Lee, M., Teoh, W., Liew, J. & Teh, S. (2013). The effects of parameter estimation on minimising the in-control average sample size for the double sampling \bar{X} chart, *South African Journal of Industrial Engineering*, 24(3), 58-67.
- Kumar, N., Chakraborti, S. & Rakitzis, A. C. (2017). Improved shewhart-type charts for monitoring times between events, *Journal of Quality Technology*, 49(3), 278–296. DOI: 10.1080/00224065.2017.11917995.
- Montgomery, C. D. (2007). *Introduction to statistical quality control*, John Wiley & Sons.

- Ozsan, G., Testik, M. C. & Weiß, C. H. (2010). Properties of the exponential EWMA chart with parameter estimation, *Quality and Reliability Engineering International*, 26(6), 555–569. DOI: 10.1002/qre.1079.
- Psarakis, S., Vynioua, A. K. & Castagliola, P (2014). Some recent developments on the effects of parameter estimation on control charts, *Quality and Reliability Engineering International*, 30(8), 1113-1129. DOI: 10.1002/qre.1556.
- Radaelli, G. (1998). Planning time-between-events Shewhart control charts, *Total Quality Management* 9(1), 133–140. DOI: 10.1080/0954412989324.
- Ryan, T. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*, John Wiley & Sons..
- Saghir, A., Lin, Z. & Chen, C.-W. (2015). The properties of the geometric-poisson exponentially weighted moving control chart with estimated parameters, *Cogent Mathematics*, 2 (1), 992381. DOI: 10.1080/23311835.2014.992381.
- Santiago, E. & Smith, J. (2013). Control charts based on the exponential distribution: Adapting runs rules for the t chart, *Quality Engineering*, 25(2), 85–96. DOI: 10.1080/08982112.2012.740646.
- Soetaert, K. (2015), *rootSolve: Nonlinear root finding, equilibrium and steady-state analysis of ordinary differential equations*[Software]. R-package version 1.7.
- Tang, L. C. & Cheong, W. T. (2004). Cumulative conformance count chart with sequentially updated parameters, *IIE Transactions*, 36(9), 841–853. DOI: 10.1080/07408170490473024.
- Knoth, S., & Schmid, W. (Eds.). (2015). *Frontiers in Statistical Quality Control 11*, Springer International Publishing, chapter Some Recent Results on Monitoring the Rate of a Rare Event, pp. 15–27. DOI: 10.1007/978-3-319-12355-4.
- Woodall, W. H. & Montgomery, D. C. (2014). Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring, *Journal of Quality Technology* 46(1), 78–94.
- Xie, M. & Goh, T. N. (1992). Some procedures for decision making in controlling high yield processes, *Quality and Reliability Engineering International*, 8(4), 355–360. DOI: 10.1002/qre.4680080409.
- Xie, M., Goh, T. N. & Kuralmani, V. (2000). On optimal setting of control limits for geometric chart, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 7(01), 17–25.
- Xie, M., Goh, T. & Ranjan, P. (2002). Some effective control chart procedures for reliability monitoring., *Reliability Engineering and System Safety*, 77(2), 143-150.
- Yang, Z., Xie, M., Kuralmani, V. & Tsui, K.-L. (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits, *Journal of Quality Technology*, 34(4), 448–458.

- Yen, F. Y., Chong, K. M. B. & Ha, L. M. (2013). Synthetic-type control charts for time-between-events monitoring, *PLoS one* 8(6), 1–13. DOI: 10.1371/journal.pone.0065440.
- Zhang, C. W., Xie, M. & Goh, T. N. (2005). Economic design of exponential charts for time between events monitoring, *International Journal of Production Research*, 43(23), 5019–5032. DOI: 10.1080/00207540500219387.
- Zhang, C. W., Xie, M. & Goh, T. N. (2006). Design of exponential control charts using a sequential sampling scheme, *IIE Transactions*, 38(12), 1105–1116. DOI: 10.1080/07408170600728905.
- Zhang, M., Peng, Y., Schuh, A., Megahed, F. M. & Woodall, W. H. (2013). Geometric charts with estimated control limits, *Quality and Reliability Engineering International*, 29(2), 209–223. DOI: 10.1002/qre.1304.