

AISLANTES TOPOLÓGICOS EN ESPINTRÓNICA^a

TOPOLOGICAL INSULATORS IN SPINTRONICS

DAVID ANDRÉS GALEANO GONZÁLEZ^b

Recibido 28-08-2018, aceptado 20-11-2018, versión final 22-11-2018.

Artículo Revisión

RESUMEN: En este trabajo, los aislantes topológicos son considerados como materiales para el desarrollo de dispositivos espintrónicos. En primer lugar, se introduce el término de aislante topológico y se explican sus propiedades asociadas. Posteriormente, se estudian los conceptos de las corrientes de espín en los que se fundamenta la espintrónica para luego mostrar algunos desarrollos teóricos y experimentales que se han llevado a cabo con los aislantes topológicos. Finalmente, se da un panorama de los retos y oportunidades que se tienen a futuro.

PALABRAS CLAVE: Aislantes topológicos; espintrónica; corrientes de espín; espín.

ABSTRACT: In this work, topological insulators are considered as materials for the development of spintronic devices. First of all, we introduce topological insulator term and we explain its associated properties. Subsequently, the concepts of spin currents on which spintronics is based are studied, then we show some theoretical and experimental developments that have been carried out with the topological insulators. Finally, there is an overview of the challenges and opportunities for the future.

KEYWORDS: Topological insulators; spintronics; spin currents; spin.

1. INTRODUCCIÓN

Desarrollos recientes en nanotecnología y espintrónica abren la posibilidad de construir nuevos dispositivos. Por ejemplo, existen muchas iniciativas para construir computadores cuánticos basados en espintrónica (Castelvecchi, 2017) y los aislantes topológicos son candidatos para ser utilizados como parte del hardware de estos debido a las propiedades (Amaricci *et al.*, 2015; Sissa Medialab, 2015) que se describen en la sección 2. En este punto, basta con referirse a la propiedad macroscópica más destacada de los aislantes topológicos: su núcleo se comporta como un aislante eléctrico y en su superficie (o borde, si es un material bidimensional) como un superconductor de corrientes de espín, las cuales se explican en la sección 3.

^aGaleano, D. (2018). Aislantes topológicos en espintrónica. *Rev. Fac. Cienc.*, 8(1), 100–123. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v8n1.74526>

^bPhD(c) en Física, Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia. dandres.galeano@udea.edu.co

Así, estos materiales son propicios para explorar fenómenos tales como el acople espín órbita, transiciones de fase, corrientes polarizadas, etcétera, como se expone más adelante. De igual forma, la naturaleza no magnética que exhiben los aislantes topológicos permite que al ponerlos en contacto con metales ferromagnéticos se desvíe la corriente polarizada, permitiendo múltiples aplicaciones (Zhao & Prenat, 2015) (ver sección 5.1).

A continuación se hace una introducción a los aislantes topológicos (sección 2) y las corrientes de espín (sección 3). Con la comprensión teórica y del estado del arte en estos dos tópicos se mostrarán algunos progresos teóricos y experimentales en el campo de la espintrónica. Finalmente, se hace un análisis de la posibilidad de utilizar los aislantes topológicos para nuevos campos.

2. AISLANTES TOPOLÓGICOS

Una definición básica de un aislante topológico, es dada por (Kane & Mele, 2005) donde lo describen como un material con simetría topológica de orden protegido^c no trivial que se comporta como un aislante en su interior y como un conductor en la superficie o borde según sea un material tridimensional o bidimensional, respectivamente.

El desarrollo de estos materiales comenzó cuando Pankratov *et al.* (1987) predijeron la simetría de inversión temporal en estados de borde protegidos en pozos cuánticos 2D (posteriormente, Murakami (2007) realizó un trabajo similar en pozos cuánticos 3D). Desde entonces, se han realizado múltiples trabajos teóricos para cimentar la teoría de lo que hoy se conoce como aislantes topológicos (Kane & Mele, 2005; Haldane, 1988; Pollmann *et al.*, 2012).

Para entender el comportamiento de los aislantes topológicos es conveniente comprender primero el efecto Hall cuántico de espín. La comprensión de este concepto permitirá una mejor descripción de este estado de la materia mediante ideas de la topología.

2.1. Efecto Hall cuántico de espín

Se dedican unas líneas para explicar el efecto Hall clásico (en el contexto de la presente discusión se podría llamar “efecto Hall eléctrico”, en contraste con el “efecto Hall de espín”). Luego se pasa al efecto Hall cuántico, para finalmente decantar al concepto del efecto Hall cuántico de espín.

^cLa simetría topológica de orden protegido se define como un tipo de estado de la materia en la mecánica cuántica a temperatura cero que presentan simetría y un gap de energía finita. De acuerdo a Gu & Wen (2009) esta clase de simetría no puede ser deformada suavemente sin una transición de fase. Si no hubiera transición de fase después de la deformación implicaría un rompimiento de la simetría durante la deformación.

Supóngase una corriente I en la dirección x a través de un canal conductor bidimensional en presencia de un campo magnético B con dirección z como se muestra en la Figura 1. Allí se detecta un voltaje Hall inducido en la dirección y .

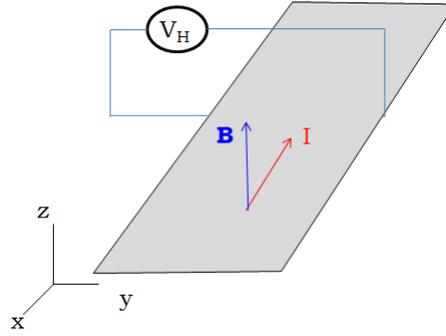


Figura 1: Representación esquemática del efecto Hall clásico. Fuente: Elaboración propia.

Como la ecuación de movimiento de una partícula cargada de masa m y carga e en un campo B está dada por

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -e \frac{dr}{dt} \times B, \quad (1)$$

cuya solución está dada por $x(t) = X - R \sin(\omega_B t + \phi)$ y $y(t) = Y - R \cos(\omega_B t - \phi)$, donde $\omega_B = \frac{eB}{m}$ es la frecuencia de ciclotrón. Con $B > 0$, los parámetros X, Y , el radio R y la fase ϕ dependerán de las condiciones de frontera y condiciones iniciales.

Al aplicar un campo eléctrico E para acelerar las cargas, la ecuación (1) se puede escribir como

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -eE - e \frac{dr}{dt} \times B - \frac{m}{\tau} \frac{dr}{dt}, \quad (2)$$

donde $\frac{m}{\tau} \frac{dr}{dt}$ se asemeja a un término de fricción, tal que τ se conoce como el *tiempo de scattering*. La ecuación (2) también se conoce como el modelo de Drude.

La densidad de corriente J y el campo eléctrico E , en muchos casos de interés están relacionados linealmente a través de la conductividad escalar σ , mediante $J = \sigma E$. En otros casos, la relación sigue siendo lineal pero se expresa con el tensor de conductividad, $J_i = \sigma_{ij} E_j$. Tong (2016) mostró a partir de la ecuación (2) y de que J puede ser expresada como $J = -ne \frac{dr}{dt}$ donde n es la densidad de portadores de carga, que el tensor de conductividad σ puede ser escrito como

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_{DC}}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega_B \tau \\ \omega_B \tau & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

con $\sigma_{DC} = \frac{ne^2\tau}{m}$ y n la densidad de portadores de carga. De acuerdo a la ecuación (3) los términos fuera de la diagonal son los responsables del efecto Hall clásico. Por lo tanto, se define el *coeficiente Hall* como

$$R_H = -\frac{E_y}{J_x B} = \frac{\rho_{xy}}{B} = \frac{\omega_B}{B\sigma_{DC}} = \frac{1}{ne}, \quad (4)$$

el cual tiene unidades de m^3/C u $\Omega cm/G$. J_x es la densidad de corriente en x , E_y es el campo eléctrico en y y ρ_{xy} es la resistividad fuera de la diagonal de acuerdo a la ecuación (3). Es importante resaltar de la ecuación (4) que el coeficiente Hall no depende del tiempo de scattering τ .

Con base en estos conceptos, Klitzing *et al.* (1980) mostraron que la resistividad en presencia de un campo magnético intenso se comporta de manera discretizada como se muestra en la Figura 2, dando lugar a lo que se conoce como efecto Hall cuántico entero.

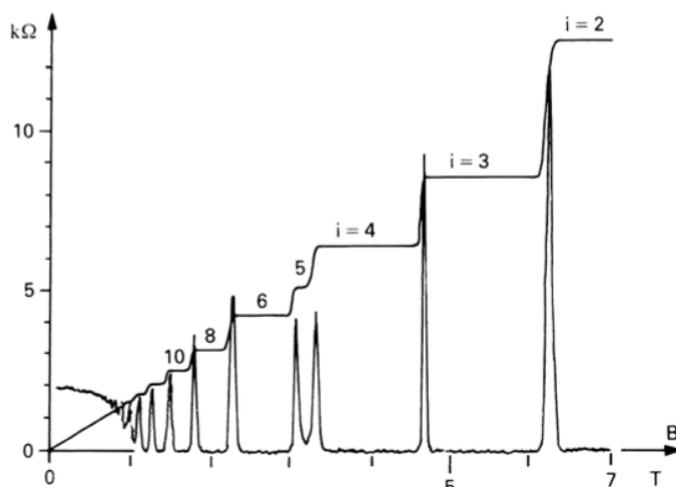


Figura 2: Efecto Hall cuántico entero. Fuente: Tong (2016).

De la Figura 2 se observa que la resistividad Hall ρ_{xy} se encuentra en una meseta para un rango de campo magnético, antes de dar un salto a la siguiente meseta. Así, la resistividad Hall cuántica se define como

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

donde $2\pi\hbar/e^2$ se conoce como *resistividad cuántica* y ν como *el factor de llenado de los niveles de Landau*. Es importante anotar que la meseta en la Figura 2 ocurre cuando el campo magnético toma valores

$$B = \frac{2\pi\hbar n}{\nu e} = \frac{n}{\nu} \Phi_0, \quad (6)$$

donde n es la densidad de electrones y $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ es la unidad atómica de flujo magnético.

Respecto a la resistividad longitudinal ρ_{xx} , mientras que ρ_{xy} se ubica en mesetas $\rho_{xx} \rightarrow 0$, en otras palabras, se comporta como un conductor perfecto.

Tomando la relación inversa entre la resistividad y la conductividad $\rho = \sigma^{-1}$, entonces

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Se puede mostrar que $\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$, y $\sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$, lo cual significa que $\rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = 0$ (si $\rho_{xy} \neq 0$). Por lo tanto, $\sigma_{xx} = 0$ implica que no hay flujo de corriente en la dirección longitudinal.

Con base en lo anterior, a continuación se explica el efecto Hall cuántico que se presenta con las corrientes de espín y que se conoce como efecto Hall cuántico de espín.

El experimento desarrollado por Hirsch (1999) y que se muestra en la Figura 3 consiste en hacer circular una corriente de espín por un metal paramagnético generando un voltaje Hall en ausencia de campo magnético, dado por $V_{SC} = 8\pi^2 R_s^2 l \frac{(n\mu_B)^2}{\rho} j_x$ donde R_s es el coeficiente Hall anómalo, l es el ancho de la placa, n es la concentración total de electrones en la banda de conducción, μ_B es el magneton de Bohr, ρ es la resistividad del material y j_x es la densidad de corriente en la dirección x .

Si al mismo material se le aplica un campo magnético B , el voltaje que aparece estará dado por $V_t(B) = (R_H^2 B^2 + R_s^2 B_{eq}^2) \frac{l}{\rho} j_x$ donde R_H es el coeficiente Hall y $B_{eq} = 4\pi n \mu_B / \sqrt{2}$.

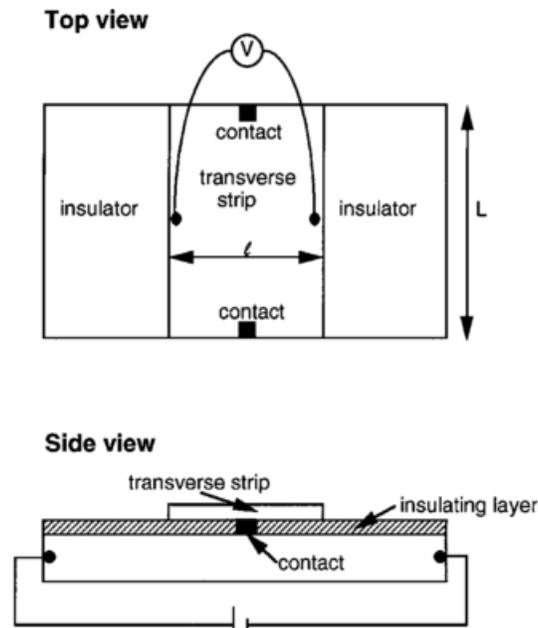


Figura 3: Diagrama del experimento propuesto por Hirsch para la detección del efecto Hall de espín. Fuente: Hirsch (1999).

Posteriormente, Murakami *et al.* (2004) desarrollaron la metodología exacta para el cálculo de la corriente cuántica de espín sin disipación con base en la fórmula de Kubo. En un trabajo posterior (Murakami *et*

al., 2004) hicieron la predicción teórica del efecto Hall cuántico de espín sin disipación convirtiéndose así en el primer ejemplo no trivial de la estructura topológica en una banda aislante sin campo magnético.

Haldane (1988) y Kane & Mele (2005) fueron quienes primero propusieron la existencia de un estado Hall cuántico de espín en el cual la conductancia Hall de espín es exactamente $\sigma_{xy}^{spin} = 2 \frac{e}{4\pi}$. Similarmente, Bernevig *et al.* (2006) propusieron un modelo en el cual aparece el efecto Hall cuántico de espín de forma cuantizada debido al acople espín-órbita en ausencia de un campo magnético.

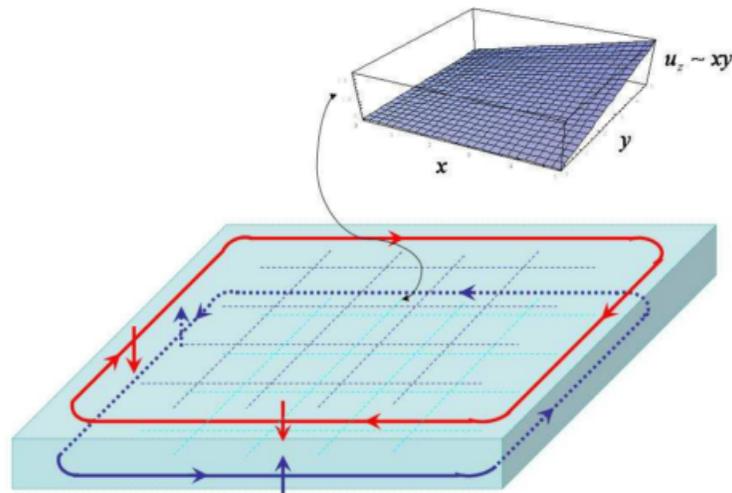


Figura 4: Conductancia Hall de espín como un estado quirral (espín-arriba) y un estado anti-quirral (espín-abajo). Fuente: Bernevig *et al.* (2006).

El modelo de Bernevig *et al.* (2006) se muestra en la Figura 4 donde nuevamente aparece la conductancia total de espín de forma cuantizada en unidades de $2 \frac{e}{4\pi}$. Como un electrón con carga e trae consigo un espín $\hbar/2$, el factor de $\hbar/(2e)$ se usa para convertir conductancia de carga a conductancia de espín donde los electrones de espín arriba tienen una conductancia Hall de carga positiva y los electrones con espín abajo tienen una conductancia de carga Hall negativa.

2.2. Algunos aspectos topológicos

Como se ha mencionado antes, los aislantes topológicos son considerados un estado cuántico de la materia con un gap diferente de cero en las bandas del núcleo y topológicamente protegido con el gap cerrado en las bandas de la superficie (borde), por lo tanto es un material que se comporta como aislante en el núcleo y conductor en la superficie (borde).

Los aislantes topológicos presentan simetría de inversión temporal, lo cual implica que por ejemplo en la zona de Brillouin en un material 2D $\Gamma_a = 0 < k_x < \Gamma_b = \pi/a$ es una imagen de $-\pi/a < k_x < 0$, tal como se muestra en la Figura 5. Adicionalmente, como explica Franz & Molenkamp (2013), un número impar de

cruces de las bandas por la energía de Fermi en la zona de Brillouin, produce estados de borde protegidos topológicamente.

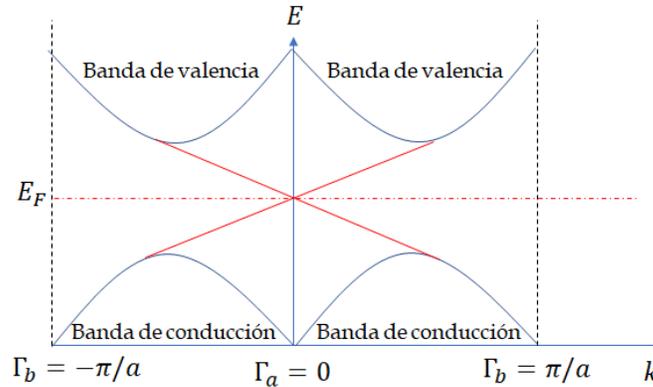


Figura 5: Estados electrónicos asociados con el borde de un aislante topológico en la zona de Brillouin definida entre $-\pi/a$ y π/a con $a \in \mathbb{N}$. Fuente: Elaboración propia.

Adicionalmente, la fuerte interacción espín órbita que presentan los aislantes topológicos degeneran en unos puntos particulares de la zona de Brillouin. En otras palabras, los electrones en el núcleo del material están localizados en órbitas cerradas, convirtiéndolo en un aislante. Sin embargo, en la superficie (borde), existe un flujo de portadores en una dimensión que se conoce como estados de superficie (borde) quirales como se ilustra en las Figuras 4 y 6. Cada uno de esos canales de borde, en el cual los portadores fluyen en una sola dirección y sin ninguna disipación, genera una conductancia Hall cuantizada de espín (Awschalom *et al.*, 2015).

Básicamente, esta conductancia consiste en dos copias del sistema Hall cuántico para formar un par que cumpla simetría de inversión temporal, tal como se muestra en la Figura 6. Este efecto Hall cuántico de espín, requiere la contrapropagación de estados de espines opuestos (Qi & Zhang, 2010).



Figura 6: Efecto Hall cuántico de espín en aislantes topológicos. En los bordes del aislante topológico los espines up se propagan en una dirección mientras que los los espines down lo hacen en dirección opuesta, como se explica en la Tabla 1. Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a Qi *et al.* (2016), un par de Kramers de estados de borde quirales en el efecto Hall cuántico no es inmune a los desfases de espín. Sin embargo, en el caso de aislantes topológicos, los defectos magnéticos y los rompimientos de la simetría de inversión temporal en superficies polarizadas, no afectan la corriente de espín en el borde (superficie) (Van Dyke & Morr, 2017).

Es importante hacer notar que existen clasificaciones para los aislantes topológicos de acuerdo a la insensibilidad de estos frente a variaciones en su Hamiltoniano. Por ejemplo, Ryu *et al.* (2010) propusieron

una clasificación que depende de si el material presenta invarianza \mathbb{Z} (primer número de Chern) o \mathbb{Z}_2 (simetría de inversión temporal) (Franz & Molenkamp, 2013; Kaufmann *et al.*, 2015). Por otra parte, Kitaev (2009) propone una tabla periódica para aislantes topológicos y superconductores la cual se caracteriza por la simetría y dimensión espacial (2D o 3D) además de la insensibilidad de sus propiedades ante perturbaciones.

2.3. Aislantes topológicos 2D y 3D

Tomando en cuenta la teoría de bandas, existen muchos modelos para explicar el comportamiento de los aislantes topológicos 2D. Por ejemplo, el modelo TKNN (Thouless *et al.*, 1982) muestra que el número de Chern, definido en una superficie cerrada como $n = \frac{1}{2\pi} \int_S \mathcal{F} d^2k$ está directamente relacionado con la conductividad Hall entera cuantizada en el borde como $\sigma_{xy} = ne^2/h$, donde $\mathcal{F} = \nabla \times A$ es la curvatura de Berry y A el potencial vectorial electromagnético.

Por su parte, Haldane (1988) usó una descripción de dos bandas del efecto Hall cuántico de espín (propio de los aislantes topológicos) para describir el comportamiento del grafeno y que puede ser utilizado en múltiples aislantes topológicos 2D. La ecuación que describe el Hamiltoniano de Haldane está dada por

$$H = 2t_2 \cos \phi \sum_{i=1}^6 \cos(k \cdot b_i) I + t_1 \sum_{i=1}^3 [\cos(k \cdot a_i) \sigma_x + \sin(k \cdot a_i) \sigma_y] + \left[M - 2t_2 \sin \phi \sum_{i=1}^6 \sin(k \cdot b_i) \right] \sigma_z \quad (8)$$

donde σ_j son las matrices de Pauli, M es el término que da cuenta del rompimiento de la simetría de inversión, t_1 es la energía necesaria para el salto de primer vecino en la red de Haldane y t_2 es la energía necesaria para el salto de segundo vecino en la red de Haldane. El ángulo ϕ es la fase adquirida por los elementos t_2 de la matriz. Ver Figura 7.

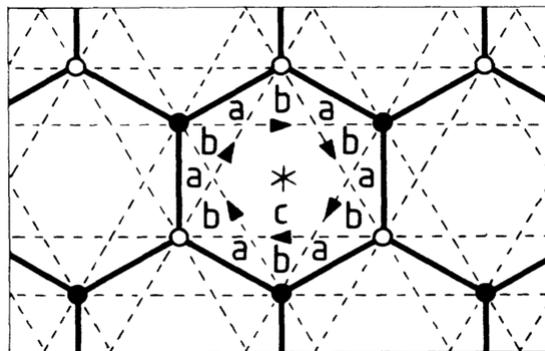


Figura 7: Estructura cristalina del grafeno para el modelo de Haldane donde se muestran los primeros vecinos (líneas sólidas) y los segundos vecinos (líneas punteadas). Puntos blancos y negros marcan las subredes A y B, respectivamente. Las flechas entre los segundos vecinos marcan la dirección del salto de fase positiva cuando hay rompimiento de simetría de inversión temporal.

Fuente: Haldane (1988).

Otro modelo importante para los aislantes topológicos 2D es el desarrollado por Kane & Mele (2005), quienes estudiaron el efecto de la interacción espín-órbita en la estructura de bajas energías del grafeno con la

variación de la temperatura, el potencial químico, desórdenes y rompimiento de simetría. En este modelo, ellos encontraron que el grafeno puede ser un aislante topológico con estado de bordes no quirales.

Aunque en una capa de grafeno las propiedades son bien conocidas, las propiedades en bicapas de grafeno aún son materia de investigación. Jung *et al.* (2015) estudiaron los estados de corrientes persistentes en bicapas de grafeno y mostraron que la interacción electrón-electrón rompe la invarianza de inversión temporal. Por lo tanto, esta configuración, no sería candidata a ser aislante topológico, así esté compuesta por dos capas de ellos. Sin embargo, esta configuración mantiene ciertas propiedades útiles en la espintrónica.

Por otro lado, Bernevig *et al.* (2006) describen el efecto Hall cuántico de espín en un pozo cuántico de HgTe a partir del Hamiltoniano $H = \begin{bmatrix} h(k) & 0 \\ 0 & h^*(-k) \end{bmatrix}$ donde $h(k) = \varepsilon(k)I_{2 \times 2} + d_a(k)\sigma_a$.

Aunque existen otros modelos que describen la estructura atómica de distintos aislantes topológicos 2D y 3D, aún es materia de investigación un modelo teórico general que los describa a todos.

Una estrategia ampliamente utilizada para construir aislantes topológicos 3D consiste en modelar una pila de aislantes topológicos 2D (Kohmoto *et al.*, 1992), sin embargo, como se mostró antes con el caso de bicapas de grafeno, esta estrategia no siempre es efectiva. Sin embargo, en el caso de que el modelo resultante describa de forma correcta el aislante topológico, cada una de las láminas tendrá una conductividad Hall e^2/h y por lo tanto, la conductividad 3D será un tensor dado por $\sigma_{\mu\nu} = \frac{e^2}{2\pi h} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} G_\lambda$ donde $G = (2\pi/d)n\hat{n}$ es el vector recíproco en la red asociada con la separación d entre las capas, perpendicular a \hat{n} (Kohmoto *et al.*, 1992).

3. CORRIENTES DE ESPÍN

Las corrientes de espín, como el nombre sugiere, son la base para el desarrollo de la espintrónica.

Para introducir la definición de la corriente de espín, en las ecuaciones (9) y (10) se compara directamente la definición de la i -ésima componente de la densidad de corriente de carga (j_{c_i}) y la densidad de corriente de α -espín ($j_{s_i}^\alpha$) bajo la acción de un potencial magnético (A_{em}) y al acople espín-órbita en un material con un potencial escalar ϕ_{so} . Para una mejor comprensión de la diferencia entre las corrientes de espín y de carga, se han marcado con color rojo los términos que diferencian ambas ecuaciones (Maekawa *et al.*, 2012).

$$j_{c_i} \equiv e \left\langle -i \frac{\hbar}{2m} c^\dagger \overleftrightarrow{\nabla}_i c - \frac{e}{m} A_{em_i} c^\dagger c - \frac{\lambda_{so}}{\hbar} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} (\nabla_j \phi_{so}) (c^\dagger \sigma_k c) \right\rangle \quad (9)$$

$$j_{s_i}^\alpha \equiv e \left\langle -i \frac{\hbar}{2m} c^\dagger \overleftrightarrow{\nabla}_i \sigma_\alpha c - \frac{e}{m} A_{em_i} c^\dagger \sigma_\alpha c - \frac{e\lambda_{so}}{\hbar} \sum_j \varepsilon_{ij\alpha} (\nabla_j \phi_{so}) (c^\dagger c) \right\rangle \quad (10)$$

donde c^\dagger , c son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente. σ_α es la α matriz de Pauli, A_{em_i} es la i -ésima componente del vector potencial magnético, $\lambda_{so} = \frac{e\hbar^2}{4m^2c^2}$ donde c es la velocidad de la

luz en la última ecuación. $\nabla_i \phi_{so}$ es el gradiente de la i -ésima componente del potencial escalar del acople espín-órbita. El operador $\overleftrightarrow{\nabla}_i$ aplicado sobre, por ejemplo, el operador creación-anihilación, es la siguiente abreviación $c^\dagger \overleftrightarrow{\nabla}_i c = c^\dagger \nabla_i c - (\nabla_i c^\dagger) c$.

Comparando las ecuaciones (9) y (10) es claro que los últimos dos términos hacen referencia al campo magnético sobre el material y al efecto del acople espín órbita, respectivamente. En particular, el primer término de ambas ecuaciones se refiere a la definición de corriente (carga o espín) sin ningún efecto.

Es importante notar que las matrices de Pauli aparecen en los dos primeros términos de la ecuación de corriente de espín y solo en el último término de la corriente de carga. Esto implica que en la corriente de carga aparece una componente de espín cuando existe el acople espín-órbita.

Por otra parte, Shi *et al.* (2006) proponen una definición general de corriente de espín

$$I_s = \left\langle \frac{d(s_z r)}{dt} \right\rangle = \langle s_z \dot{r} \rangle + \langle \dot{s}_z r \rangle. \quad (11)$$

Es importante anotar que un término importante en la corriente de espín es la polarización de la corriente, la cual está definida como

$$P_{I_s} = \frac{Q_\uparrow - Q_\downarrow}{Q_\uparrow + Q_\downarrow}, \quad 0 \leq P_{I_s} \leq 1 \quad (12)$$

donde $Q_{\uparrow(\downarrow)}$ es la cantidad de electrones fluyendo por unidad de tiempo con espín arriba (abajo). Este concepto es clarificado con la Tabla 1. La corriente de carga se presenta cuando la dirección del flujo electrónico va en el mismo sentido, independientemente de la polarización, mientras que la corriente quiral de espín implica la superposición cuántica de los estados de la carga eléctrica circulando en direcciones opuestas con polaridades opuestas.

Como el objeto central de este trabajo es el uso de los aislantes topológicos en la espintrónica, es conveniente hacer un paralelo entre la corriente de carga y la corriente de espín. La Tabla 1 ilustra la diferencia entre ambas.

Como se puede ver en la Tabla 1, la corriente de espín requiere la alineación de los espines de cada uno de los electrones (o la mayoría de ellos) en la misma dirección. Para el caso de los aislantes topológicos la corriente quiral de espín cobra una importancia particular en los estados de borde como se vio en la sección 2.

4. DESARROLLOS TEÓRICOS Y EXPERIMENTALES

En la espintrónica se han hecho algunos desarrollos teóricos de varios elementos que se relacionan en la sección 4.1. De igual forma, a partir de los desarrollos en nanotecnología, se han dado pasos importantes

Tabla 1: Diferencia entre la corriente de carga y de espín. La flecha roja hace referencia a espín arriba, la flecha azul al espín abajo y la flecha a la derecha (izquierda) es la dirección de la corriente de carga. La longitud de las flechas representa su magnitud. **(a)** La corriente fluye en una dirección, sin embargo, los espines de los electrones no están alineados en la misma dirección. $P_{I_s} = 0$. **(b)** La corriente fluye en una dirección, sin embargo, la mayoría de los electrones tienen la misma dirección de espín, $P_{I_s} \neq 0$. **(c)** La corriente fluye en una dirección y todos los electrones tienen la misma dirección de espín. $P_{I_s} = 1$. **(d)** Dos canales de corriente propagándose en sentidos contrarios con dirección de espín diferente. Se produce una superposición de estados cuánticos y se conoce como estados quirales de corriente de espín.

Nombre	Esquema	Corriente de carga	Corriente de Espín
(a) Corriente sin polarización			No hay corriente de espín
(b) Corriente de espín parcialmente polarizada			
(c) Corriente de espín totalmente polarizada			
(d) Corriente quiral de espín		No hay corriente de carga	$\frac{ \uparrow\rangle \pm \downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$

en la fabricación de ciertos dispositivos espintrónicos. En la sección 5 se muestra la relación entre estos dispositivos espintrónicos con los aislantes topológicos.

4.1. Elementos circuitales espintrónicos

A continuación se muestra el desarrollo teórico de algunos elementos básicos circuitales espintrónicos. Para mayor facilidad en la comprensión, se trata siempre de mantener un paralelo entre el elemento espintrónico y el análogo en la electrónica.

4.1.1. Resistencia de corriente de espín

Como se mostró en la sección 2.1, el efecto Hall cuántico de espín considera una resistencia longitudinal dada por $\frac{2\pi\hbar}{e^2} \approx 25.81k\Omega$. Por lo tanto, en el formalismo de Landauer-Büttiker la relación entre la corriente y el voltaje está descrita por Franz & Molenkamp (2013)

$$I_i = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_j (T_{ji}V_i - T_{ij}V_j) = 38.74\mu S \sum_j (T_{ji}V_i - T_{ij}V_j), \quad (13)$$

donde I_i es la corriente que fluye desde el i -ésimo contacto hacia el interior de la región, V_i es el voltaje del i -ésimo contacto, y T_{ij} es la probabilidad de transmisión entre el contacto i y j . Debido a las leyes

circuitales de Kirchhoff la corriente total del circuito se debe conservar, esto es, $\sum_i I_i = 0$.

Un concepto muy importante en espintrónica es la magnetorresistencia, la cual hace referencia al cambio en la resistencia eléctrica de un material debido a la aplicación de un campo magnético (Awschalom *et al.*, 2015)

La GMR (giant magnetoresistance) es un efecto observado en multicapas compuestas de placas alternantes entre materiales ferromagnéticos y no ferromagnéticos. Por otra parte, el efecto TMR (tunnel magnetoresistance) se presenta con dos materiales ferromagnéticos separados por una delgada capa aislante, tal como se muestra en la Figura 8.



Figura 8: Composición básica de materiales con configuración GMR y TMR. Fuente: Elaboración propia.

En la configuración GMR se pueden definir dos geometrías básicas: corriente en plano o CIP (por sus siglas en inglés) donde la corriente fluye de forma paralela a las placas, y corriente perpendicular a las placas o CPP (por sus siglas en inglés) donde la corriente fluye perpendicular a las placas, tal como se muestra en la Figura 9.

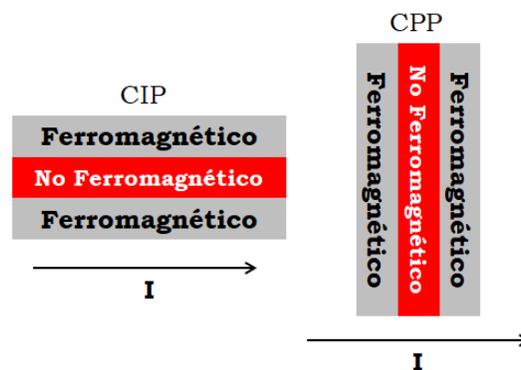


Figura 9: Distintas geometrías de dispositivos GMR. Fuente: Elaboración propia.

En la configuración CIP-GMR, la corriente fluye en el plano de una multicapa delgada. El reto experimental en esta clase de materiales es hacer capas lo suficientemente delgadas, comparado con el camino libre de electrones y controlar la orientación relativa de los momentos magnéticos en las placas ferromagnéticas. Por otro lado, la geometría CPP-GMR presenta retos adicionales a la hora de medir la resistencia y dirección de la corriente que cruza de forma perpendicular las capas.

El modelo propuesto por Zhang y Butler (Awschalom *et al.*, 2015) consiste en dos series paralelas de resistencias, donde cada serie representa un canal de espín, tal como se muestra en la Figura 10.

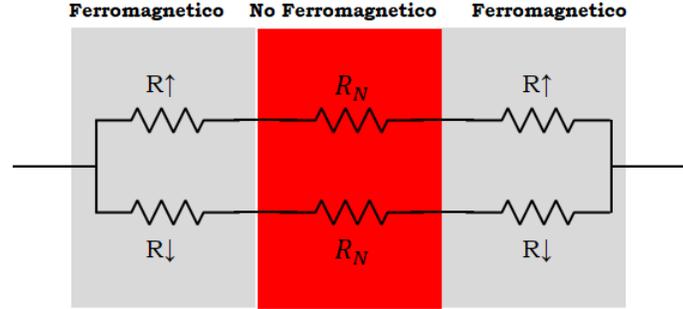


Figura 10: Modelo circuital del modelo de Zhang y Butler para multicapas magnéticas en la geometría CPP. Las dos series paralelas de resistencias representan un canal de espín. Fuente: Elaboración propia.

Para entender la Figura 10, es importante ver que cuando un campo es aplicado en un material homogéneo, los espines de los electrones arriba y abajo contribuyen a la densidad total de corriente

$$J = (\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow})\mathcal{E}, \quad (14)$$

donde la magnitud de J se calcula como el flujo de una corriente de carga por un área transversal a la dirección de J . \mathcal{E} es el campo eléctrico y $\sigma_{\uparrow(\downarrow)}$ es la conductividad eléctrica espín-dependiente. Como $\mathcal{E} = \Delta V/l$ donde l es el grosor, se puede escribir

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{(\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow})\frac{A}{l}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\uparrow}} + \frac{1}{R_{\downarrow}}} = \frac{R_{\uparrow}R_{\downarrow}}{R_{\uparrow} + R_{\downarrow}} \quad (15)$$

En otras palabras, cuando existe una relación local entre la corriente y un campo como lo expuesto en (14), los dos canales de espín se comportan como dos canales conductores paralelos, cada uno con su propia resistencia R_{\uparrow} y R_{\downarrow} .

El espesor del material no magnético permite el correcto acople entre las placas ferromagnéticas, es decir, si todas las placas ferromagnéticas tienen el mismo grosor y existe un número n par de placas ferromagnéticas, la resistencia total del arreglo es

$$R^{AP} = \frac{R_{\uparrow}^{AP}R_{\downarrow}^{AP}}{R_{\uparrow}^{AP} + R_{\downarrow}^{AP}} = \frac{n}{4} (R_{\uparrow}^F + R_{\downarrow}^F + 4R_N), \quad (16)$$

donde $R_{\uparrow}^{AP} = R_{\downarrow}^{AP} = \frac{n}{2} (R_{\uparrow}^F + R_{\downarrow}^F)$ son las resistencias para los dos canales de espín, $R_{\uparrow(\downarrow)}^F$ son los \uparrow (\downarrow) canales de resistencia de espín para una placa ferromagnética, R_N es la resistencia total para una placa no ferromagnética y n es el número total de bicapas, incluida una capa ferromagnética y una capa no ferromagnética.

Si un campo magnético se aplica para alinear los momentos en todas las placas ferromagnéticas, la resistencia para cada canal de espín está dada por

$$R_{\uparrow(\downarrow)}^P = n \left(R_{\uparrow(\downarrow)}^F + 2R_N \right). \quad (17)$$

Por lo tanto, la resistencia total de la configuración es

$$R^P = \frac{R_{\uparrow}^P R_{\downarrow}^P}{R_{\uparrow}^P + R_{\downarrow}^P} = n \frac{(R_{\uparrow}^F + 2R_N)(R_{\downarrow}^F + 2R_N)}{R_{\uparrow}^F + R_{\downarrow}^F + 4R_N}. \quad (18)$$

En caso de la configuración TMR, el material que está en medio de las placas conductoras es un aislante muy delgado, de tal forma que los electrones pueden viajar desde una placa metálica (magnética) a la otra via tunelamiento cuántico. Por lo tanto, si se suponen vectores de onda en tres regiones del espacio k_{\uparrow} (lado izquierdo), κ (región de barrera), y k_{\downarrow} (lado derecho), la magnetorresistencia de tunelamiento (TMR), definida como $(G_P - G_{AP})/G_P$, está dada por

$$\frac{G_P - G_{AP}}{G_P} = \frac{2(\kappa^2 - k_{\uparrow}k_{\downarrow})^2(k_{\uparrow} - k_{\downarrow})^2}{(\kappa^2 + k_{\uparrow}k_{\downarrow})^2(k_{\uparrow} + k_{\downarrow})^2 + (\kappa^2 - k_{\uparrow}k_{\downarrow})^2(k_{\uparrow} - k_{\downarrow})^2}, \quad (19)$$

donde $G_{P(AP)}$ son las conductancias para la alineación paralela (antiparalela) de los momentos.

4.1.2. Capacitores de espín

El concepto de capacitancia de carga es ampliamente usado en electrónica y hace referencia a la habilidad de un material para acumular carga y por lo tanto, energía. En espintrónica, Zhu *et al.* (2017) introducen el concepto de la capacitancia de espín como la habilidad de un material de almacenar espines en vez de carga.

El trabajo de Zayets (2012) mostró que si un material presenta una conductividad dependiente del espín de los electrones que circulan por él (σ_{\uparrow} o σ_{\downarrow}), se puede asumir que el material presenta un potencial químico dependiente del espín (μ_{\uparrow} o μ_{\downarrow}) lo que permite definir

$$\mu_{carga} = \frac{\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow}}{2} \text{ y } \mu_{spin} = \frac{\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}}{2}, \quad (20)$$

donde el potencial químico (μ_{carga}) se refiere a la difusión y acumulación de carga y el potencial químico (μ_{spin}) a la difusión y acumulación de los espines.

De acuerdo a la Figura 11 si se considera un potencial químico dependiente del espín $\mu_{\pm}(z) = \mu_{carga}(z) \pm \mu_{spin}(z)$ y $\mu_{carga} = \mu^0$ en una placa ferromagnética, donde μ^0 es el nivel de Fermi, y considerando que l_{sf} es la longitud de difusión del espín, entonces la solución de la ecuación de difusión de espín

$$\frac{\partial^2 \mu_{spin}(z)}{\partial z^2} = \frac{\mu_{spin}(z)}{l_{sf}^2} \quad (21)$$

está dada por

$$\begin{aligned}\mu_{spin}^F &= \mu_{spin}(0^-)e^{z/l_{sf}^F}, & z < 0 \\ \mu_{spin}^N &= \mu_{spin}(0^+)e^{-z/l_{sf}^N}, & z > 0\end{aligned}\quad (22)$$

donde

$$\mu_{spin}(0^-) = eR_F\alpha_F J_0, \quad \mu_{spin}(0^+) = eR_N\alpha_N J_0 \quad (23)$$

y e es la carga de un electrón, $R_F = \rho_F^* l_{sf}^F$, $R_N = \rho_N^* l_{sf}^N$, ρ_F^* (ρ_N^*) es la resistividad ferromagnética (no-ferromagnética) y α_F (α_N) son parámetros adimensionales definidos en Zhu *et al.* (2017).

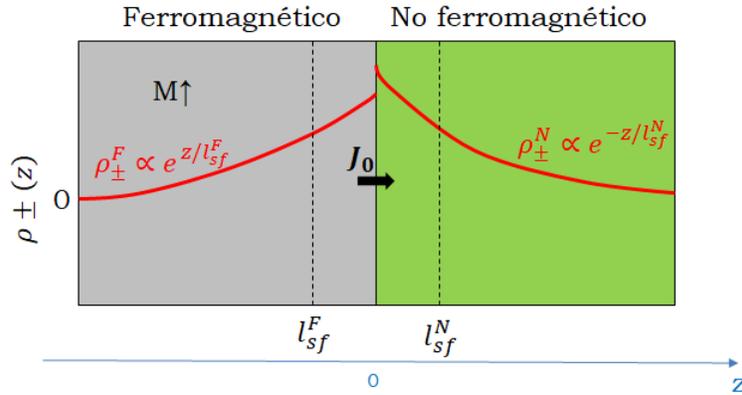


Figura 11: Esquema de la densidad de carga espín-dependiente $\rho_{\pm}(z)$ en una juntura ferromagnética - no ferromagnética. Fuente: Imagen adaptada de Zhu *et al.* (2017).

En este tipo de capacitores la energía almacenada es dependiente del potencial químico, el cual a su vez es dependiente del espín. La energía almacenada en un material como el mostrado en la Figura 11, es

$$W_T = W_{sa}^F + W_{sa}^N = \frac{1}{2} [C_{sa}^F (V_c^F)^2 + C_{sa}^N (V_c^N)^2], \quad (24)$$

donde $C_{sa}^F = \frac{T_1^F}{2R_F}$, $C_{sa}^N = \frac{T_1^N}{2R_N}$ y T_1^F (T_1^N) es el tiempo de relajación de espín en una placa ferromagnética (no ferromagnética).

4.1.3. Inductores de espín

En la Tabla 1 se muestra que una corriente de espín no necesariamente transporta carga. Específicamente en los aislantes topológicos se presentan corrientes quirales de espín, es decir, corrientes que se contrapropagan con espines opuestos (Schnyder *et al.*, 2008) debido a la simetría de inversión temporal.

Es sabido que el fenómeno de inducción está relacionado directamente al “vector de flujo eléctrico” calculado como el producto cruz de un campo eléctrico y la trayectoria de la partícula.

$$\Phi_E = \oint dl \times E.$$

Cherkasov *et al.* (2014) extrapola este concepto de flujo eléctrico a la corriente de espín.

El Lagrangiano relativístico describe la dinámica de una partícula de masa m en términos de su energía en presencia de un campo eléctrico E el cual está dado por

$$\mathcal{L}_\mu = \frac{1}{2}mv \cdot v + \frac{1}{c^2}E \cdot (v \times \mu), \quad (25)$$

donde μ es el momento magnético y v la velocidad de la partícula. Por lo tanto, la fuerza sobre esta partícula estará dada por

$$F = \frac{d}{dt}mv = \frac{1}{c^2}\nabla[E \cdot (v \times \mu)] - \frac{1}{c^2}\mu \times \frac{dE}{dt}. \quad (26)$$

Si el dipolo se mueve en un ciclo cerrado (loop), el trabajo hecho por la fuerza (26) es

$$W = -\frac{1}{c^2} \oint \mu \times \frac{dE}{dt} \cdot dl, \quad \text{if } \mu \approx cte \Rightarrow W = -\frac{\mu}{c^2} \cdot \left(\oint \frac{dE}{dt} \times dl \right). \quad (27)$$

De acuerdo a Hirsch (1999) una corriente de espín posee una auto-inductancia que se debe al campo que genera. Así, si la carga de una corriente de espín dI_μ/dt se debe al cambio en el campo eléctrico dE/dt se puede escribir

$$\oint \frac{dE}{dt} \times dl = c^2 \underline{L}_\mu \cdot \hat{\mu} \frac{dI_\mu}{dt} \quad (28)$$

lo cual significa que a partir de la integración de $dE/dt \times dl$ a lo largo de una espira, el resultado es un vector que apunta en la dirección $\underline{L}_\mu \cdot \hat{\mu}$ y que es proporcional a dI_μ/dt . Aquí, \underline{L}_μ representa el tensor de autoinductancia, el cual depende de la forma de la espira, y $\hat{\mu}$ es el vector unitario a lo largo de la dirección de μ . Por lo tanto, se define la *fuerza espín motriz* como

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{W}{|\mu|} = -\hat{\mu} \cdot \underline{L}_\mu \cdot \hat{\mu} \frac{dI_\mu}{dt} \quad (29)$$

Así, un cambio en la corriente de espín induce una fuerza espín motriz \mathcal{E}_μ y ésta tiende a oponerse a un cambio en la corriente de espín, lo cual marca precisamente el significado de la autoinductancia.

Por su parte, el flujo causado por la corriente de espín es un vector descrito en el trabajo de Cherkasov *et al.* (2014)

$$\Phi_E = \oint dl \times E = c^2 \underline{L}_\mu \cdot \hat{\mu} I_m. \quad (30)$$

Por lo anterior, existe una analogía con la ley de inducción de Faraday^d $\mathcal{E}_\mu = -\hat{\mu} \cdot d\Phi_E/c^2 dt$.

^d $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ donde \mathcal{E} es la fuerza electromotriz (EMF) y Φ_B es el flujo magnético.

4.2. Apantallamiento electromagnético en espintrónica

En el diseño de circuitos electrónicos, el control de los campos electromagnéticos es de vital importancia para lograr el correcto funcionamiento del dispositivo. En dispositivos espintrónicos, el campo electromagnético es muy intenso y por lo tanto una adecuada manipulación es indispensable para la reducción de la interferencia con campos electromagnéticos externos.

De acuerdo a la teoría electromagnética, para apantallar el campo eléctrico basta con que un conductor ideal encierre el dispositivo a proteger (lo que se conoce como jaula de Faraday).

Sin embargo, el apantallamiento del campo magnético es diferente y más complejo pues un conductor ideal no responde a campos magnéticos estáticos a menos que el conductor tenga un movimiento relativo al campo magnético. Una técnica común para apantallar el campo magnético consiste en variar el campo magnético para generar corrientes de Eddy que actúen para cancelar el campo magnético externo.

Se ha observado que debido al efecto Meissner^e, los materiales superconductores pueden repeler campos magnéticos.

En el caso de aislantes topológicos de Bi_2Se_3 dopados con Cu se presenta un comportamiento de superconductividad por debajo de 3.8K para un dopaje con una concentración de $x = 0.12$, (Figura 12) donde M es la susceptibilidad magnética.

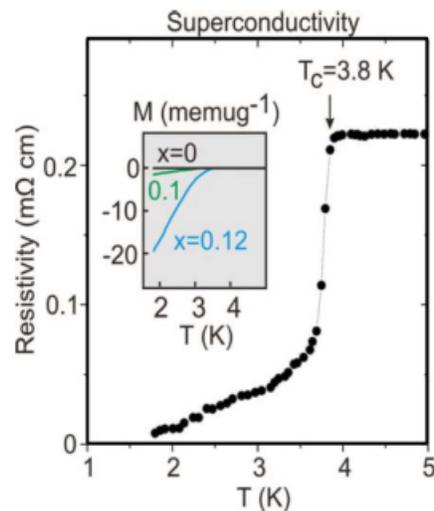


Figura 12: Comportamiento superconductor y efecto Meissner del Bi_2Se_3 . Fuente: Imagen adaptada de Hasan & Kane (2010).

El coeficiente de atenuación η describe la efectividad de un material para apantallar campos magnéticos externos desde una cavidad que lo rodee. Esto depende del espesor y la permeabilidad magnética del

^eExpulsión de un campo magnético desde un superconductor durante su transición al estado de superconducción.

material. Por ejemplo, Jackson (1999) describe el coeficiente de atenuación de un cascarón esférico con una permeabilidad μ , con un radio interior a y un radio exterior b . En la Figura 13 se muestra la gráfica de η con $a = 1$ y μ, b variables.

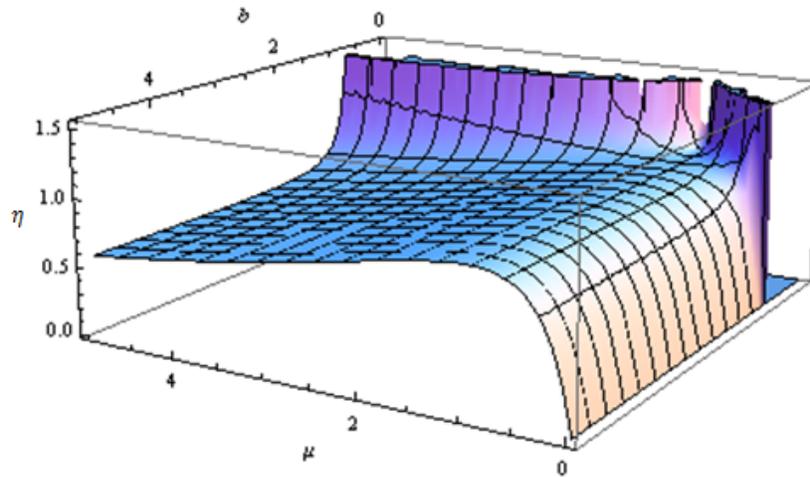


Figura 13: Coeficiente de atenuación η de un cascarón esférico con permeabilidad μ , con radio interno $a = 1$ y radio externo b en un campo uniforme. Fuente: Elaboración propia.

En espintrónica, Wang & Jiang (2008) exponen las limitaciones y desafíos del apantallamiento de dispositivos, cuyo principal desafío es “la temperatura del cuarto de operación” (la mayoría de dispositivos espintrónicos son diseñados para operar a temperatura ambiente, pero el uso de superconductores para deflectar el campo magnético supone una temperatura extremadamente baja) y la “operación no volátil y de baja potencia” (la protección de campo siempre debe estar encendida incluso cuando el circuito protegido está apagado. Esto aumenta el consumo de energía del circuito).

Por el otro lado, el principal reto del apantallamiento de dispositivos espintrónicos es la compensación entre la eficiencia de blindaje y la relación volumen/masa de la carcasa.

Finalmente, es importante enfatizar que los conceptos clásicos de compatibilidad electromagnética, como acoplamiento, blindaje e igualación de impedancia, deben reconsiderarse si se tienen en cuenta las correlaciones y túneles cuánticos, así como las interacciones espín-espín y dipolo-dipolo como lo muestran Slepyan *et al.* (2014). Esto hace parte de los retos que aún se tienen en espintrónica, donde los fenómenos cuánticos toman preponderancia.

5. DESARROLLO DE DISPOSITIVOS ESPINTRÓNICOS A PARTIR DE AISLANTES TOPOLÓGICOS

A continuación se describe el estado del arte en el uso de aislantes topológicos en espintrónica y posteriormente se discutirán algunas ventajas y desventajas de su uso.

Como se explica previamente, los aislantes topológicos poseen dos canales de borde que presentan contra-propagación de corrientes con dirección de espín opuesta. Específicamente, Götte *et al.* (2016) investigaron las heteroestructuras de los aislantes topológicos y los aislantes topológicos ferromagnéticos (FTI, por sus siglas en inglés)^f para proponer dispositivos espintrónicos capaces de crear, conmutar y detectar corrientes de espín como las descritas por las ecuaciones (10) y (11).

El generador de espín mostrado en la Figura 14 se puede entender como un flujo de espín a lo largo del borde (ver ecuación (12)), donde $0 \leq P_s \leq 1$ es la polarización de los estados de borde. Los valores de P_s han sido reportados entre 0.3 y 0.9, dependiendo del material (Götte *et al.*, 2014).

La eficiencia en la conversión de corriente de carga a corriente de espines está dado por $\Theta = \frac{e j_s}{\hbar j_c}$ donde j_c es la densidad de corriente de carga y j_s es la densidad de corriente de espín. Otro importante factor que afecta la eficiencia es la temperatura, debido a que un incremento en esta implica la desaparición de los estados de borde.

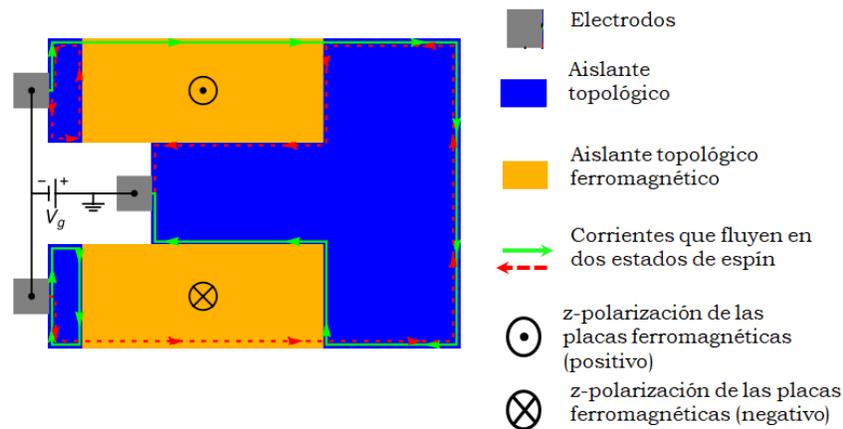


Figura 14: El generador de espín consiste en dos electrodos metálicos de inyección y otro de extracción unidos por una hoja de aislante topológico con un voltaje aplicado V_g . Dos placas FTI con polaridad opuesta evitan el flujo de corriente directa desde el electrodo negativo al electrodo positivo, conduciendo las corrientes de espín a lo largo del borde. Fuente: Imagen adaptada de Götte *et al.* (2016).

La Figura 15 muestra el esquema básico de un detector de espines usando aislantes topológicos. El

^fAislantes topológicos con un campo de intercambio ferromagnético (FEF, por sus siglas en inglés) lo suficientemente fuerte.

mecanismo consiste en la transformación de corrientes de espín a corrientes de carga, como se explica en el pie de la imagen.

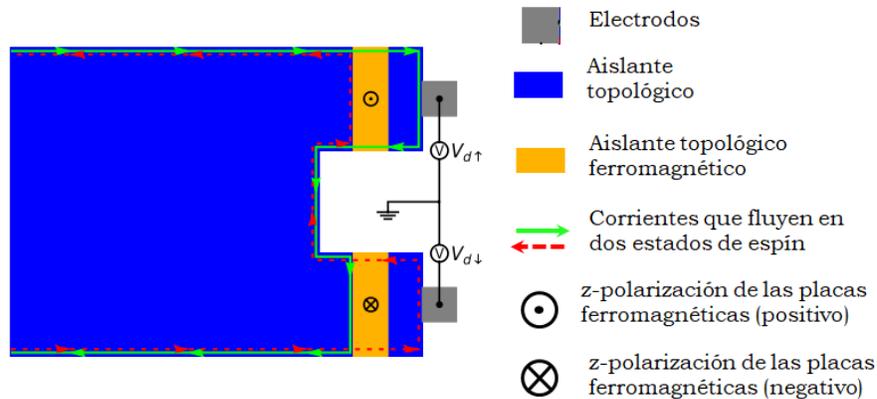


Figura 15: El detector de corrientes de espín es básicamente un generador invertido con dos placas FTI. Esta configuración permite separar la medición de las dos corrientes de espín polarizadas por medio del bloqueo de una de ellas mientras que la otra circula. La corriente eléctrica resultante puede ser medida como una caída de voltaje $V_{d\uparrow}$ y $V_{d\downarrow}$ respecto al nodo neutro común del generador. En el caso de una corriente pura de espín, aquellos voltajes son iguales. Fuente: Imagen adaptada de Götte *et al.* (2016).

El transistor de espín refleja o transmite corrientes puras de espín por medio de un cambio en su configuración, como se muestra en la Figura 16. Esta es cambiada por medio de campos magnéticos a través del FTI.

Otro uso interesante de los aislantes topológicos en espintrónica es la combinación de varias capas moleculares, como por ejemplo, de un aislante topológico de bismuto de selenio (Bi_2Se_3) con una capa ultrafina de un material magnético como el sulfuro de europio (EuS) (Katmis *et al.*, 2016). Mientras que el EuS mantiene un estado magnético a extremadamente bajas temperaturas (17 Kelvin), el material combinado mantiene aquellas mismas características a temperatura ambiente.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se han discutido las bases fundamentales de la espintrónica y las propiedades fundamentales de los aislantes topológicos, para mostrar que existe una compatibilidad y complementariedad directa entre ambos temas para el desarrollo tecnológico.

Un campo activo de investigación es el diseño de dispositivos espintrónicos a partir de aislantes topológicos. Proponer las bases teóricas y experimentales para controlar las corrientes de espín y los campos electromagnéticos en diseños circuitales que se realicen con aislantes topológicos abriría grandes posibilidades para el desarrollo de nuevos dispositivos.

Como se vio, una de las ventajas de los aislantes topológicos en la espintrónica es la versatilidad en la

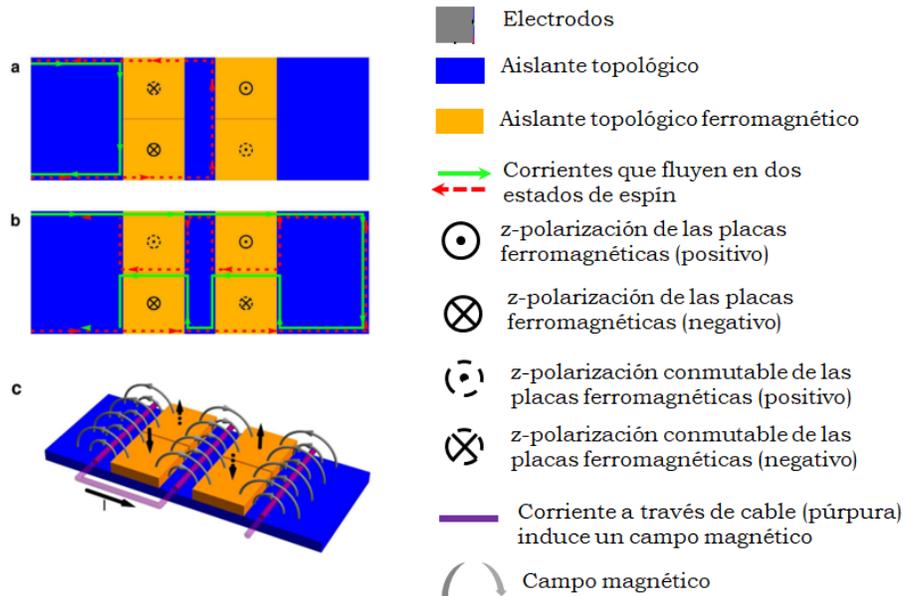


Figura 16: El transistor de espín consiste en cuatro dominios de FTI de los cuales dos son intercambiables. Los otros dos dominios de FTI están fijos mediante un voltaje de polarización. (a,b) Muestra las dos configuraciones, donde (a) bloquea ambos estados de espín, mientras que (b) permite que estos pasen. (c) Muestra una posibilidad de intercambiar el transistor de espín. Una corriente a través de un conductor induce un campo magnético con polaridad opuesta a los dos dominios magnéticos intercambiables. El bucle hace el campo más fuerte y homogéneo. Fuente: Imagen adaptada de Götze *et al.* (2016).

combinación con otros materiales basados en el acople espín-órbita y el uso de las corrientes de borde para producir diferentes efectos.

Se abre así un nuevo campo de investigación del uso de corrientes quirales en la espintrónica y la posibilidad de utilizar las propiedades de los aislantes topológicos en el desarrollo de, por ejemplo, computadores cuánticos.

Referencias

- Amaricci, A.; Budich, J. C.; Capone, M.; Trauzettel, B. & Sangiovanni, G. (2015). First-order character and observable signatures of topological quantum phase transitions. *Physical Review Letters*, 114(18), 185701. 10.1103/PhysRevLett.114.185701
- Awschalom, D. D.; Xu, Y. & Nitta, J. (2015). *Handbook of spintronics*. Springer Publishing Company, Incorporated. 10.1007/978-94-007-7604-3
- Bernevig, B. A. & Zhang, S. C. (2006). Quantum spin Hall effect. *Physical Review Letters*, 96(10), 106802. 10.1146/annurev-conmatphys-062910-140538

- Bernevig, B. A.; Hughes, T. L. & Zhang, S. C. (2006). Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells. *Science*, 314(**5806**), 1757–1761. 10.1126/science.1133734
- Castelvecchi, D. (2017). IBM's quantum cloud computer goes commercial. *Nature News*, 543(**7644**), 159.
- Chen, W. (2014). Inductance due to spin current. *Journal of Applied Physics*, 115(**11**), 113901.
- Franz, M. & Molenkamp, L. (2013). *Topological Insulators. Contemporary Concepts of Condensed Matter Science*. Elsevier.
- Götte, M.; Paananen, T.; Reiss, G. & Dahm, T. (2014). Tunneling magnetoresistance devices based on topological insulators: ferromagnet-insulator-topological-insulator junctions employing Bi₂Se₃. *Physical Review Applied*, 2(**5**), 1–11. 10.1103/PhysRevApplied.2.054010
- Götte, M.; Joppe, M. & Dahm, T. (2016). Pure spin current devices based on ferromagnetic topological insulators. *Scientific reports*, 6, 1–9.
- Gu, Z. C. & Wen, X. G. (2009). Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order. *Physical Review B*, 80(**15**), 1–23. 10.1103/PhysRevB.80.155131
- Haldane, F. D. M. (1988). Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the “parity anomaly”. *Physical Review Letters*, 61(**18**), 2015–2018.
- Hasan, M. Z. & Kane, C. L. (2010). Colloquium: topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, 82(**4**), 3045–3067. 10.1103/RevModPhys.82.3045
- Hirsch, J. E. (1999). Spin hall effect. *Physical Review Letters*, 83(**9**), 1834–1837. 10.1103/PhysRevLett.83.1834
- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. New Jersey: John Wiley & Sons. 10.1119/1.19136
- Jung, J.; Polini, M. & MacDonald, A. H. (2015). Persistent current states in bilayer graphene. *Physical Review B*, 91(**15**), 1–6. 10.1103/PhysRevB.91.155423
- Kane, C. L. & Mele, E. J. (2005). Quantum spin Hall effect in graphene. *Physical Review Letters*, 95(**22**), 226801. 10.1103/PhysRevLett.95.226801
- Kane, C. L. & Mele, E. J. (2005). Z₂ topological order and the quantum spin Hall effect. *Physical Review Letters*, 95(**14**), 146802. 10.1103/PhysRevLett.95.146802
- Katmis, F.; Lauter, V.; Nogueira, F. S.; Assaf, B. A.; Jamer, M. E.; Wei, P.; Satpati, B.; Freeland, J. W.; Eremin, I.; Heiman, D.; Moodera, J. S. & Jarillo-Herrero, P. (2016). A high-temperature ferromagnetic topological insulating phase by proximity coupling. *Nature*, 533(**7604**), 513–516. 10.1038/nature17635

- Kaufmann, R.; Li, D. & Wehefritz-Kaufmann, B. (2015). Notes on topological insulators. 10.1142/S0129055X1630003X
- Kitaev, A. (2009). Periodic table for topological insulators and superconductors. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1134, No. 1, pp. 22-30). AIP.
- Klitzing, K. V.; Dorda, G. & Pepper, M. (1980). New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Physical Review Letters*, 45(6), 494–497. 10.1103/PhysRevLett.45.494
- Kohmoto, M.; Halperin, B. I. & Wu, Y. S. (1992). Diophantine equation for the three-dimensional quantum Hall effect. *Physical Review B*, 45(23), 13488. 10.1103/PhysRevB.45.13488
- Maekawa, S.; Valenzuela, S. O.; Saitoh, E. & Kimura, T. (2012). *Spin Current*. Oxford University Press. 10.1073/pnas.0703993104
- Murakami, S.; Nagaosa, N. & Zhang, S. C. (2004). Spin-hall insulator. *Physical Review Letters*, 93(15), 156804. 10.1103/PhysRevLett.93.156804
- Murakami, S.; Nagaosa, N. & Zhang, S. C. (2004). SU(2) non-Abelian holonomy and dissipationless spin current in semiconductors. *Physical Review B*, 69(23), 235206. 10.1103/PhysRevB.69.235206
- Murakami, S. (2007). Phase transition between the quantum spin Hall and insulator phases in 3D: emergence of a topological gapless phase. *New Journal of Physics*, 9(9), 356. 10.1088/1367-2630/9/9/356
- Pankratov, O. A.; Pakhomov, S. V. & Volkov, B. A. (1987). Supersymmetry in heterojunctions: Band-inverting contact on the basis of $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ and $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$. *Solid State Communications*, 61(2), 93–96. 10.1016/0038-1098(87)90934-3
- Pollmann, F.; Berg, E.; Turner, A. M. & Oshikawa, M. (2012). Symmetry protection of topological phases in one-dimensional quantum spin systems. *Physical Review B*, 85(7), 075125. 10.1103/PhysRevB.85.075125
- Qi, X. L. & Zhang, S. C. (2010). The quantum spin Hall effect and topological insulators. *Phys Today*, 63(1), 33–38. 10.1063/1.3293411
- Qi, J.; Liu, H.; Jiang, H. & Xie, X. (2016). Effective spin dephasing mechanism in confined two-dimensional topological insulators. *Science China. Physics, Mechanics & Astronomy*, 59(7), 677811. 10.1007/s11433-016-0100-1
- Ryu, S.; Schnyder, A. P.; Furusaki, A. & Ludwig, A. W. (2010). Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy. *New Journal of Physics*, 12(6), 065010. 10.1088/1367-2630/12/6/065010

- Schnyder, A. P.; Ryu, S.; Furusaki, A. & Ludwig, A. W. (2008). Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions. *Physical Review B*, 78(19), 195125. 10.1103/PhysRevB.78.195125
- Shi, J.; Zhang, P.; Xiao, D. & Niu, Q. (2006). Proper definition of spin current in spin-orbit coupled systems. *Physical Review Letters*, 96(7), 076604. 10.1103/PhysRevLett.96.076604
- Sissa Medialab. (2015). Quantum computing and spintronics: Topological insulators become a little less “elusive”. Recuperado de www.sciencedaily.com/releases/2015/05/150512075122.htm
- Slepyan, G.; Boag, A.; Miano, G.; Mordachev, V.; Sinkevich, E.; Portnoi, M.; Maksimenko, S.; Kuzhir, P. & Maffucci, A. (2014). Electromagnetic compatibility concepts at nanoscale. In *Electromagnetic Compatibility, Tokyo (EMC'14/Tokyo), 2014 International Symposium on* (pp. 13-16). IEEE.
- Thouless, D. J.; Kohmoto, M.; Nightingale, M. P. & den Nijs, M. (1982). Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*, 49(6), 405–408. 10.1103/PhysRevLett.49.405
- Tong, D. (2016). *The quantum Hall effect*. Cambridge: Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Centre for Mathematical Sciences.
- Van Dyke, J. S. & Morr, D. K. (2017). Effects of defects and dephasing on charge and spin currents in two-dimensional topological insulators. *Physical Review B*, 95(4), 045151. 10.1103/PhysRevB.95.045151
- Wang, W. & Jiang, Z. (2008). Magnetic shielding design for magneto-electronic devices protection. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(11), 4175–4178. 10.1109/TMAG.2008.2002798
- Zayets, V. (2012). Spin and charge transport in materials with spin-dependent conductivity. *Physical Review B*, 86(17), 174415.
- Zhao, W. & Prenat, G. (Eds.). (2015). *Spintronics-based computing* (pp. 1-52). Berlin, Germany: Springer. 10.1007/978-3-319-15180-9
- Zhu, Y. H.; Zhang, X. X.; Liu, J. & He, P. S. (2017). Spin-accumulation capacitance and its application to magnetoimpedance. *Journal of Applied Physics*, 122(4), 043902.