

DESEMPEÑO DEL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA Y HOLLING APLICADO A SISTEMAS PRESA-DEPREDADOR^a

PERFORMANCE OF THE LOTKA-VOLTERRA AND HOLLING MODEL APPLIED TO PREY-PREDATOR SYSTEMS

ALBERTO ERNESTO GUTIÉRREZ BORDA^{b *}

Recibido 09-09-2020, aceptado 08-10-2021, versión final 13-12-2021

Artículo Investigación

RESUMEN: En este trabajo se demuestra computacionalmente la condición crítica del modelo Lotka-Volterra, partiendo de la suposición formal de crecimiento presa-depredador en relación 1 : 1, utilizando el método Runge-Kutta y asumiendo valores hipotéticos de las constantes fijas positivas A (tasa de crecimiento de la presa), B (tasa a la que los depredadores destruyen a la presa), C (tasa de mortalidad de los depredadores), y D (tasa a la que los depredadores aumentan al consumir presas respectivamente); interactuando entre sí en el ecosistema, de forma tal que se estimó la dependencia de las variables x (presa) e y (depredador) en función del tiempo a través de los diferenciales dx/dt y dy/dt . Se consideró también un modelo depredador-presa de respuesta funcional de tipo II de Holling, observando que el depredador presentó una saturación y fue necesario un período de tiempo para la captura, según las curvas diferenciales de trayectorias y campos de dirección; el resultado concluyente es la variable presa que se superpone a la variable depredador, ajustándose los valores a una colinealidad en función del tiempo. Este estudio tuvo como objetivo implementar el Modelo de Lotka-Volterra y Holling para ser aplicado a sistemas presa-depredador.

PALABRAS CLAVE: Colinealidad; condición crítica; curvas diferenciales; reducción paramétrica.

ABSTRACT: In this work, the critical condition of the Lotka-Volterra model was demonstrated, starting from the formal assumption of prey-predator growth in a 1 : 1 ratio, using the Runge-Kutta method and assuming hypothetical values of the positive fixed constants A (growth rate prey), B (rate at which predators destroy prey), C (death rate of predators), and D (rate at which predators increase by consuming prey, respectively); interacting with each other in the ecosystem, in such a way that the dependence of the variables x (prey) and y (predator) as a function of time was estimated through the dx/dt and dy/dt differentials. A Holling type II functional response predator-prey model was considered, observing that the predator had saturation and a period of time was necessary for the capture, according to the differential curves of trajectories and direction fields; the conclusive result is the prey variable that is superimposed on the predator variable, adjusting the values to a collinearity as a function of time. This study aimed to implement the Lotka-Volterra and Holling Model to be applied to prey-predator systems.

KEYWORDS: Collinearity; critical condition; differential curves; parametric reduction.

^aGutiérrez-Borda, A. E. (2022). Desempeño del modelo de Lotka-Volterra y Holling aplicado a sistemas presa-depredador. *Rev. Fac. Cienc.*, 11 (1), 6–16. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v11n1.90452>

^bUniversidad Nacional San Luis Gonzaga De Ica, Perú.

* Autor para la correspondencia: gutierrezbordaalberto@gmail.com

1. INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de un modelo estandarizado para evaluar el comportamiento de especímenes (presa-depredador), el más común es el de Lotka-Volterra, pero se debe señalar que existe una crítica a este modelo matemático, desde la comprensión del investigador matemático, científicos, entre otros; por ello, al estar dispuesto a cambiar las tasas de natalidad y mortalidad no hace más que modificar el período de la oscilación, es decir, ninguna especie puede dominar, y no hay posibilidad de especie en vías de extinción (Lv *et al.*, 2018).

Sin embargo, se espera a que alguna especie ganara en reproducción sobre la otra y es lo que sucede, siempre en teoría al suponer la presa sobre el depredador (Wang & Zou, 2020). Por lo tanto, se quiere demostrar en los tres modelos evaluados, que el primero es un modelo crítico estacionario donde las tasas de mortalidad y natalidad son variables y el segundo es un estudio de reducción paramétrica, donde se observa una variabilidad de x e y , presa y depredador, respectivamente (Surendran *et al.*, 2020), el tercer modelo es desarrollado por el método Runge-Kutta, considerando la funcionalidad tipo II de Holling.

Además, se observa la representación de estos modelos a través de curvas diferenciales (Dengata *et al.*, 2020), pues he aquí un caso bien interesante; siempre se observa biológicamente el modelo de Lotka-Volterra, pero aún no existen estudios de geometría diferencial sobre este planteamiento, el hecho de que se superpone a la presa sobre el depredador (Meng & Zhang, 2020), a fin de garantizar la no extinción. Este artículo busca demostrar la colinealidad de la función tiempo según las tasas o bien llamadas coeficientes fijos positivos de las variables x e y (Khan & Chaudhary, 2020).

En este sentido se desarrollan tres modelos interesantes, no sin antes abordar cómo se originó este modelo. Aun cuando un conjunto (presa-depredador) sigue la dinámica de Lotka-Volterra con la premisa de no extinción (Wang & Zou, 2020), eventos aleatorios como la caza furtiva es independiente de este modelo, pues no se adapta a la dinámica de las poblaciones pequeñas, si es excesiva la caza. Una forma de entender los sistemas de ecuaciones es considerar el alcance finito en su comportamiento (Arora & Kumar, 2020).

En este caso, hay cuatro comportamientos, que se dividen en dos clases amplias: la primera, si ambos tamaños de población son inicialmente positivos, las poblaciones oscilarán en un patrón fijo indefinidamente, permaneciendo positivas, sin embargo, si ambos tamaños de población son inicialmente cero, los tamaños de población seguirán siendo cero. Además, si el tamaño de la población de depredadores es cero y el tamaño de la población de presas es positivo, el tamaño de la población de depredadores sigue siendo cero y la población de presas crece sin límite. Por último, si el tamaño de la población de depredadores es positivo y el tamaño de la población de presas es cero, el tamaño de la población de presas sigue siendo cero, mientras que la población de depredadores se reduce hacia el tamaño cero (Ito *et al.*, 2020). Este es el escenario actual sobre el modelo de Lotka-Volterra.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. Modelo crítico de Lotka-Volterra

El modelo Lotka-Volterra representa un sistema ecológico depredador-presa y en el campo de la medicina parásito-huésped (Mandal *et al.*, 2020); entonces para un conjunto de constantes positivas fijas: tasa de crecimiento de la presa A , tasa a la que los depredadores destruyen a la presa B , tasa de mortalidad de los depredadores C , y la tasa a la que los depredadores aumentan al consumir presas D ; se cumplen las siguientes condiciones:

1. Una población de presas “ x ” aumenta a una velocidad proporcional al número de presas,

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (1)$$

pero es destruida simultáneamente por los depredadores a una velocidad proporcional al producto del número de presas y depredadores (Mavinga, 2017).

$$\frac{dx}{dt} = -Bxy. \quad (2)$$

2. Una población de depredadores “ y ” disminuye a un ritmo proporcional al número de depredadores,

$$\frac{dy}{dt} = -Cy, \quad (3)$$

pero aumenta a un ritmo nuevamente proporcional al producto del número de presas y depredadores (Xie *et al.*, 2016).

$$\frac{dy}{dt} = Dxy. \quad (4)$$

Ahora, se acoplan las constantes fijas positivas A y B ; similar se hace con C y D ,

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy, \quad \frac{dy}{dt} = -Cy + Dxy. \quad (5)$$

En este tipo de modelo, la curva de presa siempre lidera la curva de depredador. Se igualan los diferenciales de “ x ”, “ y ” con respecto al tiempo a cero, porque allí están los puntos críticos del modelo; para obtener un sistema de ecuaciones,

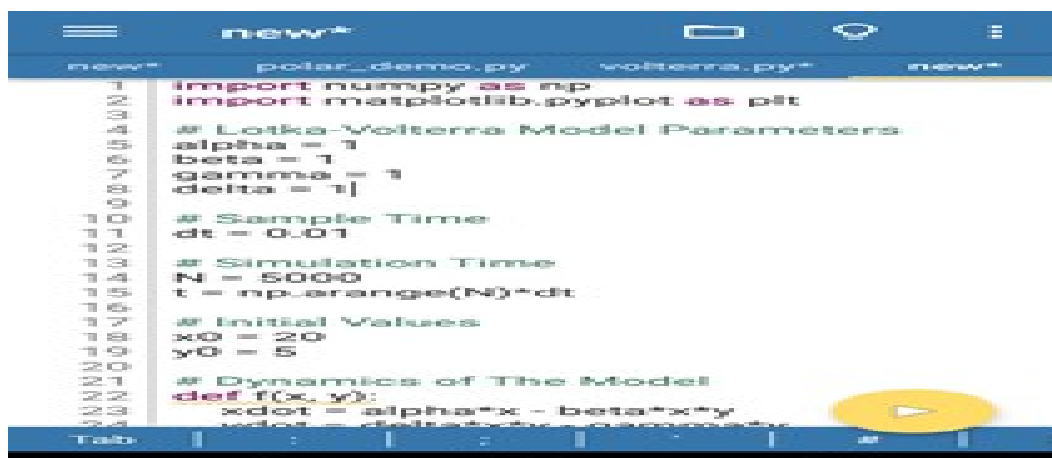
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0 \quad (6)$$

$$A - By = 0 \quad (7)$$

$$-C + Dx = 0. \quad (8)$$

Por lo tanto, el único punto estacionario se encuentra en

$$(x, y) = \left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B} \right). \quad (9)$$



```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Lotka-Volterra Model Parameters
5 alpha = 1
6 beta = 1
7 gamma = 1
8 delta = 1
9
10 # Sample Time
11 dt = 0.01
12
13 # Simulation Time
14 N = 5000
15 t = np.arange(N)*dt
16
17 # Initial Values
18 x0 = 20
19 y0 = 5
20
21 # Dynamics of The Model
22 def f(x, y):
23     xdot = alpha*x - beta*x*y
24     ydot = delta*y*(gamma - x)
25
26

```

Figura 1: Sintaxis de programación en Pydroid 3, tasa depredador-presa 1:1. Fuente: Pydroid 3 V 3.02

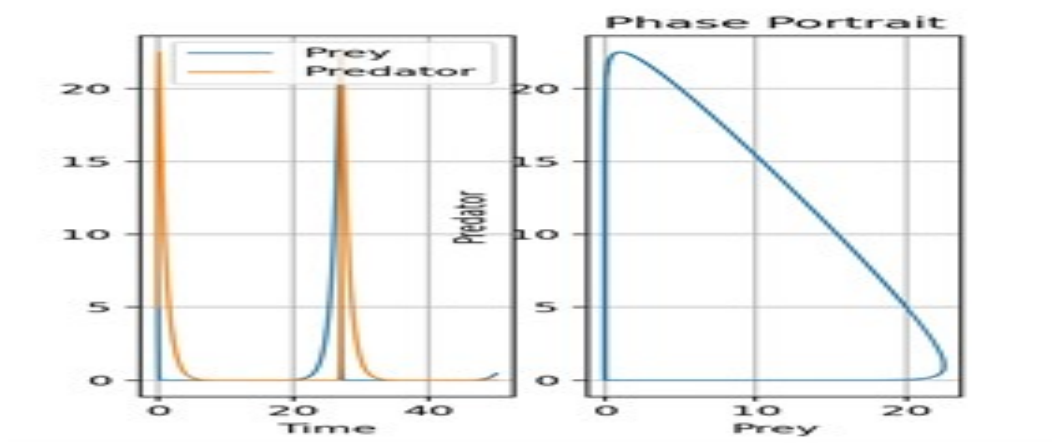


Figura 2: Curvas de trayectoria y campos de dirección de presa-depredador. Fuente: Elaboración propia

De forma teórica, cuando las constantes fijas positivas tienen el mismo comportamiento, la condición única en matemática es hacer A , B , C y D igual a la unidad (Figura 1), caso contrario cuando la presa supera al depredador (Figura 2) (Meng *et al.*, 2018). Se representó cada caso de forma gráfica, utilizando el software Pydroid V 3.02; este modelo también es llamado modelo de competitividad.

2.2. Reducción paramétrica del modelo Lotka-Volterra

Los parámetros (A, B, C, D) juegan un papel clave en la determinación del comportamiento del sistema. Sin embargo, no todos son independientes. Si se hacen las transformaciones $x \rightarrow x'(c/d)$ e $y \rightarrow y'(a/b)$ y $t \rightarrow t'/a$, entonces el sistema se puede escribir como:

$$\frac{dx'}{dt'} = x' - x'y'. \quad (10)$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left(-y'_i + x'_i y'_i \right). \quad (11)$$

Se utilizó la ecuación dx'/dt' en su solución paramétrica, observando una serie de curvas de fase.

2.3. Modelo de respuesta funcional de Holling

En este método es fundamental el trazado de trayectorias y campos de dirección, modelando el mismo en lenguaje Python. De esta manera, se investigó el equilibrio y la estabilidad del sistema en el sistema depredador-presa, específicamente aplicando el conjunto de ecuaciones Lotka-Volterra con la respuesta funcional Tipo II de Holling, pues se consideró saturación del depredador y fue necesario un periodo de tiempo para la captura (Yan, 2020). He aquí el modelo estudiado, a partir de la notación de la derivada parcial:

$$\frac{dx}{dt} = bx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{axy}{1 + ahx}. \quad (12)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{caxy}{1 + ahx} - dy. \quad (13)$$

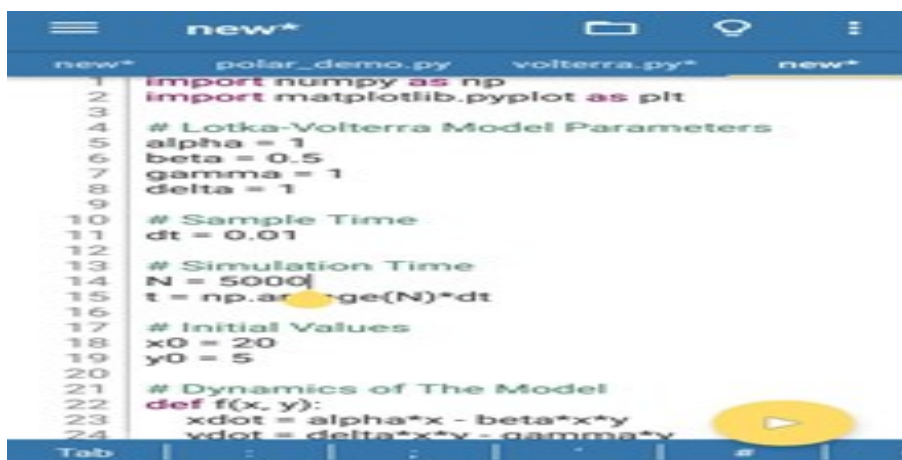
Donde “ x ” es abundancia de presas, “ y ” es abundancia de depredadores, “ b ” es la tasa de crecimiento de la presa, “ d ” es la tasa de mortalidad de depredadores, “ c ” es la tasa con que la presa consumida se convierte en depredador, “ a ” es la tasa con la que un depredador mata a la presa por unidad de tiempo, “ K ” es la capacidad de carga de la presa dadas las condiciones ambientales de la presa y “ h ” es el tiempo de manipulación. Este sistema tiene tres condiciones: la primera, cuando ambas especies están muertas (0, 0); la segunda, cuando los depredadores están muertos y la presa crece hasta su capacidad de carga (K , 0) y la tercera, un equilibrio no trivial donde ambas especies cohabitan en el ecosistema (Zu *et al.*, 2015), y es la más importante. Ésta viene dada por:

$$y'' = \frac{b}{a} \left(1 + ahx'' \right) \left(1 - \frac{x''}{K} \right). \quad (14)$$

$$x'' = \frac{d}{a(c - dh)}. \quad (15)$$

3. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En la investigación se desarrolló una sintaxis de programación basado en lenguaje ©Python, utilizando el software Pydroid 3 versión 3.02. Primero, se ejecutó el programa con el modelo crítico de Lotka-Volterra con valores ideales de tasa depredador-presa, $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$, ver Figura 1. Para demostrar la relación entre presa-depredador en condiciones iguales o tasas en proporción 1 : 1 (Liu & Bai, 2016a), se observa que la curva azul correspondiente a la presa, está en las mismas coordenadas (x, y) que la curva naranja correspondiente al depredador, ver Figura 2 en este sentido, las especies cohabitan en condiciones de equidad.



```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Lotka-Volterra Model Parameters
5 alpha = 1
6 beta = 0.5
7 gamma = 1
8 delta = 1
9
10 # Sample Time
11 dt = 0.01
12
13 # Simulation Time
14 N = 5000
15 t = np.arange(N)*dt
16
17 # Initial Values
18 x0 = 20
19 y0 = 5
20
21 # Dynamics of The Model
22 def f(x, y):
23     xdot = alpha*x - beta*x*y
24     ydot = delta*x*y - gamma*y

```

Figura 3: Variación de B a 0.5, en el cuadro de diálogo de Pydroid V 3.02. Fuente: Elaboración propia

En el modelo crítico de Lotka-Volterra, se supone que la coordenada “ x ” es la relación entre “ C ” y “ D ” igual a la unidad, mismo caso con la coordenada “ y ” cuya relación es A/B . Ahora, se varía en un 50 % la tasa a la que los depredadores destruyen a la presa, es decir $B = 0.5$, ver Figura 3. El objetivo es mantener igual la tasa a la que los depredadores aumentan al consumir las presas “ D ” (Li & Yin, 2016), esto se ve en la comparación entre las curvas azul y naranja, pues el depredador supera ampliamente a la presa, ver Figura 4.

Comparando ambos resultados, se apreció que el modelo de Lotka-Volterra está estandarizado a la superioridad de la presa sobre el depredador, sin embargo, variando la tasa a la que los depredadores aumentan al consumir presas, el modelo se adapta a la superioridad del depredador.

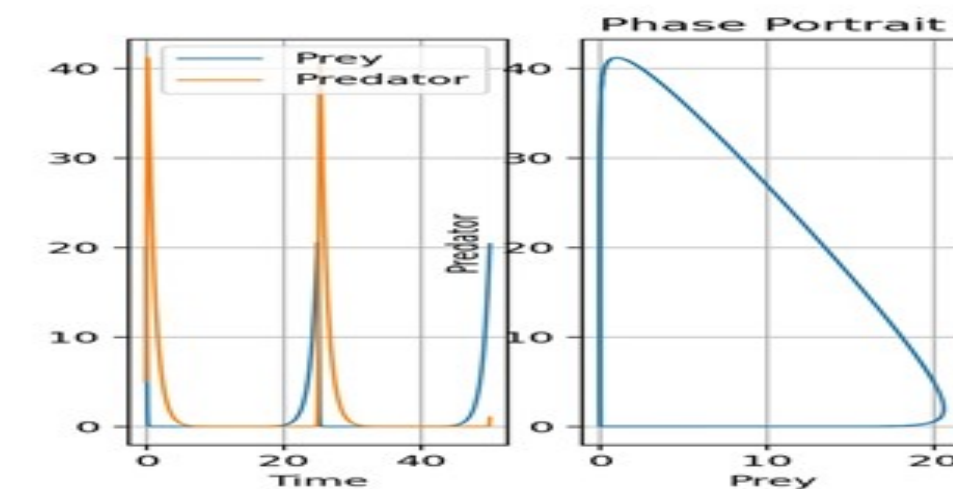


Figura 4: Gráfico presa-depredador, con reducción de B a 0.50. Fuente: Elaboración propia

```

new* polar_demo.py volterra.py* new*
10 I know that when my populations are zero
11 there's some division by zero and
12 the resulting error terminates my function,
13 which I want to avoid in this case.
14 ---
15 np.seterr(divide='ignore', invalid='ignore')
16 # These are the parameter values we'll be
17 using
18 a = 0.1
19 b = 0.1
20 c = 0.4
21 d = 0.1
22 h = 0.1
23 K = 2000
24 # Define the system of ODEs
25 # P[0] is prey, P[1] is predator
26 def fish(P, t=0):
27     return ((b*P[0]*(1-P[0]/K) - (a*P[0]*P[1])/
28             (1+a*h*P[0]),
29             c*(a*P[0]*P[1])/(1+a*h*P[0]) -
30             d*P[1])

```

Figura 5: Valores de entrada $a = b = d = 1$ en Pydroid V 3.02 para el modelo. Fuente: Elaboración propia

En el método de Lotka-Volterra con la respuesta funcional Tipo II de Holling, también se corrió en lenguaje Python, el propósito es obtener el valor de la abundancia de presas “ x ”, también la abundancia de depredadores “ y ” (Abobakr *et al.*, 2020); asumiendo la tasa de crecimiento de la presa “ b ”, la tasa con la que un depredador mata a la presa por unidad de tiempo “ a ” y la tasa de mortalidad de depredadores “ d ” con el mismo crecimiento de 0.1, ver Figura 5.

Luego de ejecutar el código se obtiene los gráficos de trayectoria y campos de dirección del sistema presa-depredador, ver Figura 6. Con base en este gráfico, se observa en la curva diferencial $P_0 = (3, 1)$ que hay tres presas por cada depredador en tiempo de manipulación de 0.1 días, luego en la medida que se incrementa el tiempo, por ejemplo, en la curva $P_0 = (114, 45)$ tiene el mismo comportamiento hay 145 presas en abundancia por cada 45 depredadores. Se demuestra entonces, con este modelo, el mismo estándar del

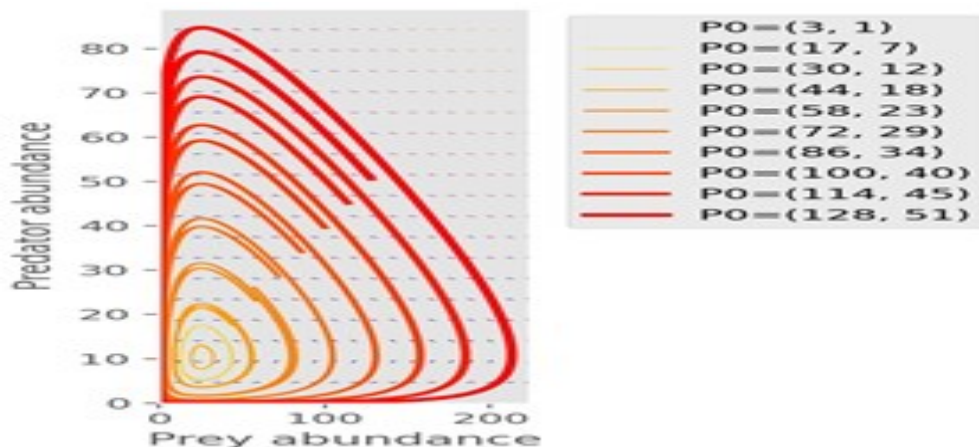


Figura 6: Comportamiento de la trayectoria y campos de dirección presa-depredador. Fuente: Elaboración propia

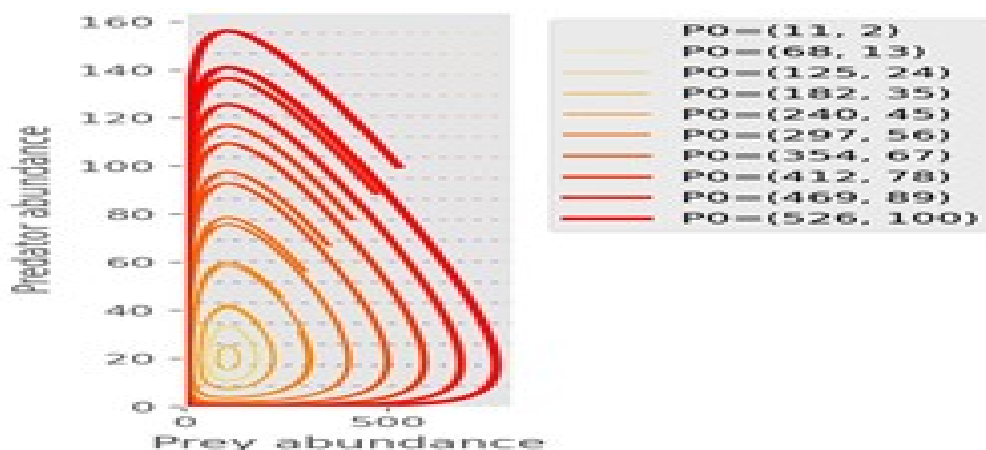


Figura 7: Gráfico de incremento de la tasa de mortalidad de la presa en 90%. Fuente: Elaboración propia

modelo crítico, que la curva presa se superpone a la curva depredador (Liu & Bai, 2016b).

Ahora se aumenta la tasa con la que un depredador mata a la presa por unidad de tiempo “ a ”, en un 90 % de 0.1 en el modelo anterior a un valor de 1, manteniendo el resto constante, se obtiene el resultado de la corrida y se aprecia en las curvas presa-depredador, ver Figura 7.

Aquí hay un comportamiento bastante significativo, por ejemplo en la curva $P_0 = (182, 35)$ hay abundancia de presas en 182 contra 35 en la abundancia de depredadores, pero es interesante este resultado porque a simple vista se esperaría una disminución de las presas debido al aumento de la tasa de mortalidad, la respuesta es que la tasa de crecimiento de la presa se hace mayor y la tasa la mortalidad del depredador se hace menor en el tiempo de manipulación, en este sentido también se demuestra que la presa está por encima al depredador en los modelos de Lotka-Volterra. En este sentido el resultado más significativo del estudio está en el estándar de los modelos de Lotka-Volterra, la curva presa está superpuesta a la curva depredador, en condiciones ideales. Resultados que se demuestran en los tres modelos planteados de este estudio, ver Figura 8.

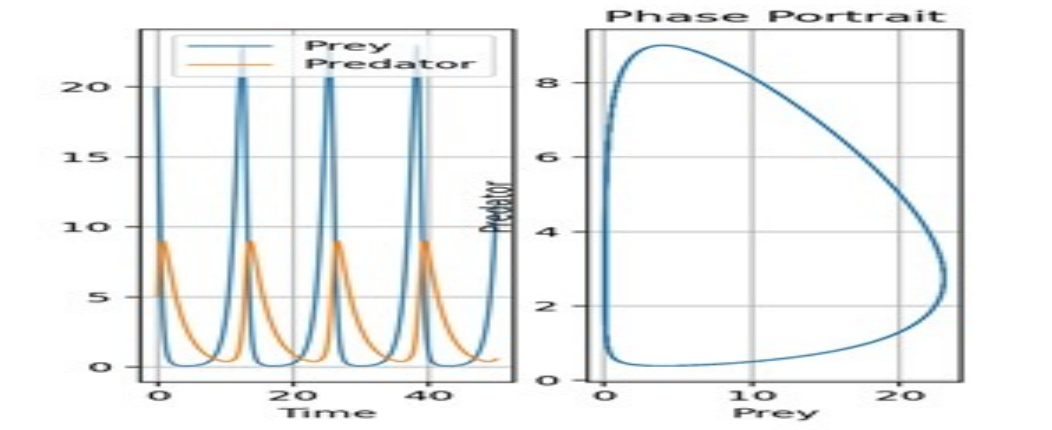


Figura 8: Gráfico de superposición en el sistema presa-depredador. Fuente: Elaboración propia

4. CONCLUSIONES

El modelo de Lotka-Volterra mostró el resultado del modelado crítico a partir de parámetros ideales para el estudio de la densidad del depredador la cual oscilaba mientras que la densidad de la presa permanecía casi constante. Los resultados teóricos sugieren que la relación entre presa-depredador en condiciones iguales o tasas en proporción es 1 : 1. Además, la rápida evolución de las presas puede explicar este patrón, ya que las gráficas de la Figura 4 muestran la comparación entre las curvas azul y naranja, donde se observa que el depredador supera ampliamente a la presa. El papel de la rápida evolución contemporánea en la dinámica de la población ha sido ampliamente hipotético. En los dos casos, los resultados muestran que las características de los depredadores aumentan en frecuencia cuando la depredación es severa, y las presas se vuelven dominantes cuando la presión de depredación está ausente o baja. Ya se puede concluir que esta herramienta permitirá modelar cualquier tipo de sistema siempre que se tengan datos reales a utilizar, esto debido a que las variables “ x ” e “ y ”, descritas anteriormente, dependen en si en su modelo más crítico en una relación entre las constantes fijas positivas, más aún cuando la tasa de estas cuatro variables estudiadas es igual a la unidad. Se ha demostrado aquí que existen condiciones relevantes en las cuales las oscilaciones en la abundancia de “ x ” de “ y ” son casi exactamente compensatorias, de modo que la densidad total de la presa se mantiene esencialmente constante. Incluso cambios sutiles en la tasa de la presa pueden producir respuestas sustanciales en la densidad de depredadores, ésta es la realidad observada en el sistema presa-depredador; porque los datos sobre las densidades de población de depredadores y presas por sí solos llevarían a la conclusión incorrecta de que no había interacción presente. En conclusión, el modelo más realista es el de Holling, porque en el sistema de Lotka-Volterra, las presas son eliminadas por los depredadores sin control alguno. En contraste, al comparar con Holling tipo II, existe un control en el tiempo, pues es una variable manipulable (Ma *et al.*, 2019).

Referencias

- Abobakr, A. H., Hussien, H. S. & Mansour, M. B. A. (2020). On Wave Patterns in a Spatially Extended Holling-Tanner Model. *Int. J. Appl. Comput. Math*, 6 (93). <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00854-x>
- Arora, C. & Kumar, V. (2020). Dynamics of Predator-Prey System with Migrating Species and Disease in Prey Population. *Differ Equ Dyn Syst*. <https://doi.org/10.1007/s12591-020-00529-5>
- Dengata, J. & Ma, S. (2020). Modified Chebyshev collocation method for delayed predator-prey system. *Adv Differ Equ*, 313. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02769-9>
- Ito, H. C., Dieckmann, U. & Metz, J. A. J. (2020). Lotka-Volterra approximations for evolutionary trait-substitution processes. *J. Math. Biol.* 80, 2141-2226. <https://doi.org/10.1007/s00285-020-01493-y>
- Khan, T. & Chaudhary, H. (2020). Estimation and Identifiability of Parameters for Generalized Lotka-Volterra Biological Systems Using Adaptive Controlled Combination Difference Anti-Synchronization. *Differ Equ Dyn Syst*. <https://doi.org/10.1007/s12591-020-00534-8>
- Li, X. & Yin, G. (2016). Logistic models with regime switching: permanence and ergodicity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 441(2), 593-611.
- Liu, M. & Bai, C. (2016a). Dynamics of a stochastic one-prey two-predator model with Lévy jumps. *Applied Mathematics and Computation*, 284, 308-321.
- Liu, M. & Bai, C. (2016b). Analysis of a stochastic tritrophic food chain model with harvesting. *Journal of Mathematical Biology*, 73(3), 597-625.
- Lv, W., Wang, F. & Li, Y. (2018). Adaptive finite-time tracking control for nonlinear systems with unmodeled dynamics using neural networks. *Adv Differ Equ*, 159 (2018). <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1615-x>
- Ma, T., Meng, X. & Chang, Z. (2019). Dynamics and optimal harvesting control for a stochastic one predator two prey time delay system with jumps. *Complexity*, 2019, 19-20.
- Mandal, P. S., Kumar, U. & Garain, K. (2020). Allee effect can simplify the dynamics of a prey-predator model. *J. Appl. Math. Comput.* 63, 739–770. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01337-4>
- Mavinga, R. (2017). Bifurcation from infinity for reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* 147-A, 649-671.
- Meng, X., Li, F. & Gao, S. (2018). Global analysis and numerical simulations of a novel stochastic eco-epidemiological model with time delay. *Applied Mathematics and Computation*, 339, 701–726.

- Meng, Y. & Zhang, W. (2020). Properties of Traveling Wave Fronts for Three Species Lotka-Volterra System. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 19, 67. <https://doi.org/10.1007/s12346-020-00404-2>
- Surendran, A., Plank, M. J. & Simpson, M. J. (2020). Small-scale spatial structure affects predator-prey dynamics and coexistence. *Theor Ecol.* 13., 537–550. <https://doi.org/10.1007/s12080-020-00467-6>
- Wang, H. & Zou, C. (2020). Propagation Direction of the Traveling Wave for the Lotka-Volterra Competitive Lattice System. *J Dyn Diff Equat Syst.* 19, 67. <https://doi.org/10.1007/s10884-020-09853-4>
- Wang, Y. & Zou, X. (2020). On a Predator-Prey System with Digestion Delay and Anti-Predation Strategy. *J Nonlinear Sci* 30, 1579–1605. <https://doi.org/10.1007/s00332-020-09618-9>
- Xie, X., Xue, Y. & Chen, J. (2016). Permanence and global attractivity of a nonautonomous modified Leslie-Gower predator-prey model with Holling-type II schemes and a prey refuge. *Adv Differ Equ*, 184. <https://doi.org/10.1186/s13662-016-0892-5>
- Yan, W. (2020). Traveling Waves in a Stage-Structured Predator-Prey Model with Holling Type Functional Response. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* <https://doi.org/10.1007/s40840-020-00953-4>
- Zu, L., Jiang, D., O-Regan, D. & Ge, B. (2015). Periodic solution for a non-autonomous Lotka-Volterra predator-prey model with random perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 430(1), 428-437.